

УДК 531.36

© 2007 г. А.П. МАРКЕЕВ

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ, ПОДВЕШЕННОГО НА ИДЕАЛЬНОЙ НИТИ

Рассматривается плоское движение стержня, подвешенного на идеальной нити в однородном поле тяжести. Исследуется нелинейная задача об орбитальной устойчивости поступательного периодического движения стержня вдоль вертикали. В зависимости от двух безразмерных параметров задачи получены выводы об орбитальной неустойчивости, устойчивости для большинства начальных условий или о формальной устойчивости.

**1. Постановка задачи.** Пусть тонкий однородный стержень  $AB$  массы  $m$  и длины  $a$  движется в фиксированной вертикальной плоскости  $Oxy$  в однородном поле тяжести (фиг. 1). К точке  $A$  стержня прикреплен один конец абсолютно гибкой невесомой нерастяжимой нити длины  $l$ . Другой конец нити закреплен в неподвижной точке  $O$ .

Условие нерастяжимости нити задает неударивающую связь  $l - r \geq 0$ , где  $r$  – расстояние от точки  $A$  стержня до неподвижной точки  $O$ . За обобщенные координаты примем величину  $q = l - r$  ( $q \geq 0$ ) и углы  $\varphi$  и  $\psi$  радиуса – вектора точки  $A$  и стержня с вертикалью (фиг. 1).

Для координат  $x_c, y_c$  центра масс стержня имеем выражения

$$x_c = (l - q) \cos \varphi + 1/2 a \cos \psi, \quad y_c = (l - q) \sin \varphi + 1/2 a \sin \psi \quad (1.1)$$

Потенциальная энергия  $\Pi = -mgx_c$ , а кинетическая энергия  $T$  вычисляется по теореме Кенига

$$T = 1/2 m v_c^2 + 1/24 m a^2 \dot{\psi}^2$$

где  $v_c$  – скорость центра масс стержня, точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

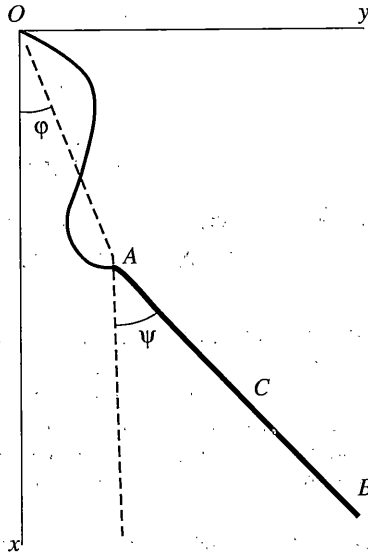
Учитывая равенства (1,1), можно получить следующее выражение для функции Лагранжа  $L = T - \Pi$ :

$$L = 1/2 [\dot{q}^2 + (l - q)^2 \dot{\varphi}^2] + 1/6 m a^2 \dot{\psi}^2 + 1/2 m a \dot{\psi} [(l - q) \cos(\varphi - \psi) \dot{\varphi} - \sin(\varphi - \psi) \dot{q}] + mg [(l - q) \cos \varphi + 1/2 a \cos \psi] \quad (1.2)$$

При ослабленной связи ( $q > 0$ ) движение стержня может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода с лагранжианом (1.2). Если в момент выхода на связь  $q = 0$  величина  $\dot{q}$  отлична от нуля, то происходит удар. При ударе выполняется соотношение

$$\dot{q}^+ = -\dot{q}^- \quad (1.3)$$

где индексами  $(-)$  и  $(+)$  обозначены значения величины  $\dot{q}$  непосредственно перед ударом и после него.



Фиг. 1

Существует частное решение уравнений движения, которое соответствует периодическому движению стержня вдоль вертикали, проходящей через точку  $O$ . Период  $\tau$  равен  $2\sqrt{2h/g}$ , где  $h$  – высота подскока конца  $A$  стержня вдоль вертикали при ослабленной после удара нити; считаем, что  $h < l$ . На промежутке времени  $0 \leq t < \tau$  периодическое движение описывается равенствами

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad q = -1/2gt^2 + \sqrt{2gh}t$$

Удары происходят в моменты времени, кратные  $\tau$ . В моменты удара  $q = 0$ , а  $\dot{q}$  меняется скачком в соответствии с равенством (1.3).

Цель данной работы состоит в исследовании орбитальной устойчивости описанного периодического движения стержня вдоль вертикали.

**2. Гамильтониан возмущенного движения.** При исследовании устойчивости для описания движения стержня с ослабленной связью будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Из обычных соотношений для импульсов

$$p = \partial L / \partial \dot{q}, \quad p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}, \quad p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi}$$

находим выражения для обобщенных скоростей

$$\dot{q} = \frac{1 + 3 \sin^2(\varphi - \psi)}{m} p - \frac{3 \sin 2(\varphi - \psi)}{2m(l - q)} p_\varphi + \frac{6 \sin(\varphi - \psi)}{ma} p_\psi \quad (2.1)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{3 \sin 2(\varphi - \psi)}{2m(l - q)} p + \frac{1 + 3 \cos^2(\varphi - \psi)}{m(l - q)^2} p_\varphi - \frac{6 \cos(\varphi - \psi)}{ma(l - q)} p_\psi \quad (2.2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{6 \sin(\varphi - \psi)}{ma} p - \frac{6 \cos(\varphi - \psi)}{ma(l - q)} p_\varphi + \frac{12}{ma^2} p_\psi \quad (2.3)$$

Функция Гамильтона  $H$  равняется полной механической энергии  $T + \Pi$ , в которой обобщенные скорости заменены по формулам (2.1)–(2.3). Получаем

$$H = \frac{4 - 3 \cos^2(\varphi - \psi)}{2m} p^2 - \frac{3 \sin 2(\varphi - \psi)}{2m(l-q)} p p_\varphi + \frac{6 \sin(\varphi - \psi)}{ma} p p_\psi + \frac{1 + 3 \cos^2(\varphi - \psi)}{2m(l-q)^2} p_\varphi^2 - \frac{6 \cos(\varphi - \psi)}{ma(l-q)} p_\varphi p_\psi + \frac{6}{ma^2} p_\psi^2 - mg \left[ (l-q) \cos \varphi + \frac{1}{2} a \cos \psi \right] \quad (2.4)$$

В канонически сопряженных переменных невозмущенное периодическое движение стержня вдоль вертикали при  $0 \leq t < \tau$  описывается формулами

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_\psi = 0$$

$$q = -1/2gt^2 + \sqrt{2gh}t, \quad p = -mgt + m\sqrt{2gh}$$

а в моменты удара выполняется соотношение  $p^+ = -p^-$ .

В невозмущенном движении переменным  $q$  и  $p$  соответствует функция Гамильтона

$$H^{(0)} = \frac{1}{2m} p^2 + mgq \quad (2.5)$$

Если, следуя работам [1, 2], вместо  $q$  и  $p$  ввести новые переменные  $J, v$  (переменные действие – угол для гамильтониана (2.5)) при помощи канонического унивалентного преобразования

$$q = \left( \frac{9\pi^2}{8m^2g} \right)^{1/3} J^{2/3} f_2(v), \quad p = (3m^2\pi g)^{1/3} J^{1/3} f_1(v)$$

где  $f_1, f_2$  –  $2\pi$ -периодические функции  $v$ , причем при  $0 \leq v < 2\pi$   $f_1 = 1 - v/\pi$ ,  $f_2 = v/\pi(2 - v/\pi)$ , то функция (2.5) примет вид

$$H^{(0)} = 1/2(9m\pi^2g^2)^{1/3} J^{2/3}$$

При этом в невозмущенном движении

$$J = I = \frac{2mh}{3\pi} \sqrt{2gh}, \quad v = \pi \sqrt{\frac{g}{2h}} t$$

Для исследования орбитальной устойчивости периодического движения стержня введем (безразмерные) возмущения  $q_1, q_2, p_1, p_2, R$ , характеризующие отклонение траекторий возмущенного движения от траекторий невозмущенного периодического движения стержня. Возмущения введем при помощи следующего канонического преобразования (с валентностью  $\pi \sqrt{hl(2g)} / (ml^2)$ ):

$$\varphi = q_1, \quad \psi = q_2, \quad p_\varphi = \frac{ml^2}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}} p_1, \quad p_\psi = \frac{ml^2}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}} p_2$$

$$q = \left( \frac{9\pi^2}{8m^2g} \right)^{1/3} f_2 \left( I + \frac{ml^2}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}} R \right)^{2/3}, \quad p = (3m^2\pi g)^{1/3} f_1 \left( I + \frac{ml^2}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}} R \right)^{1/3} \quad (2.6)$$

Кроме того, для удобства последующих вычислений перейдем от независимой переменной  $t$  к новой независимой переменной  $\pi \sqrt{g/(2h)} t$ .

Гамильтониан возмущенного движения обозначим через  $F$ . Он равен умноженной на  $h/(mgl^2)$  функции Гамильтона (2.4), в которой сделана замена переменных по формулам (2.6). Гамильтониан  $F$   $2\pi$  – периодичен относительно координаты  $v$  (канонически сопряженной с импульсом  $R$ ), зависит от двух безразмерных параметров  $\kappa_1 = a/l$ ,  $\kappa_2 = h/l$  и может быть представлен в виде сходящегося ряда по формам четных степеней относительно  $q_1, q_2, p_1, p_2, |R|^{1/2}$ . Если отбросить несущественную аддитивную постоянную, то получим

$$F = R + h_2(q_1, q_2, p_1, p_2, v) + \dots \quad (2.7)$$

Многоточием здесь обозначена совокупность членов четвертой и более высоких степеней относительно  $q_1, q_2, p_1, p_2, |R|^{1/2}$ , а

$$h_2 = \sum h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \quad (2.8)$$

где суммирование производится по целым неотрицательным числам  $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ , сумма которых равна двум, причем

$$h_{2000} = 1/2\kappa_2[1 + \kappa_2(6f_1^2 - f_2)], \quad h_{1100} = -6\kappa_2^2 f_1^2, \quad h_{0200} = 1/4\kappa_2(\kappa_1 + 12\kappa_2 f_1^2)$$

$$h_{1010} = -h_{0110} = \frac{6\kappa_2 f_1}{\pi(1 - \kappa_2 f_2)}, \quad h_{1001} = -h_{0101} = \frac{12\kappa_2 f_1}{\pi\kappa_1}, \quad h_{0020} = \frac{4}{\pi^2(1 - \kappa_2 f_2)^2}$$

$$h_{0011} = \frac{12}{\pi^2 \kappa_1(1 - \kappa_2 f_2)}, \quad h_{0002} = \frac{12}{\pi^2 \kappa_1^2}$$

Орбитальная устойчивость (неустойчивость) периодического движения стержня означает устойчивость (неустойчивость) решения  $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = R = 0$  системы дифференциальных уравнений движения с гамильтонианом (2.7) по отношению к возмущениям величин  $q_1, q_2, p_1, p_2, R$ .

**3. О методе исследования орбитальной устойчивости.** Задачу об орбитальной устойчивости периодического движения стержня будем решать, сводя ее к исследованию устойчивости неподвижной точки четырехмерного симплектического отображения окрестности точки  $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$  на себя.

Для построения отображения рассмотрим возмущенные движения на том же (нулевом) уровне энергии  $F = 0$ , на котором находится и изучаемое невозмущенное периодическое движение стержня. Величины  $q_1, q_2, p_1, p_2, v$  будем рассматривать как прямоугольные координаты в пятимерном пространстве, определяемом изоэнергетическим уровнем  $F(q_1, q_2, p_1, p_2, v, R) = 0$ . Возмущенное движение изображается кривой в пространстве  $q_1, q_2, p_1, p_2, v$ . Когда кривая проходит плоскости  $v = 0, v = 2\pi, \dots$ , происходит удар (стержень выходит на связь  $q = 0$ ). Учитывая  $2\pi$ -периодичность функции  $F$  по  $v$ , отождествим эти плоскости, считая их одной поверхностью сечений Пуанкаре.

Пусть  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2$ ) – начальные (при  $v = 0$  или, что то же, при  $t = 0$ , где  $t = 0$  – первый момент схода стержня со связи  $q = 0$ ) значения величин  $q_j, p_j$ , а  $q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$  – их значения при  $v = 2\pi$  (или, что то же, при  $t = t_1$ , где  $t_1$  – второй момент схода стержня со связи  $q = 0$ ). При достаточно малых  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$  величины  $q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$  будут аналитическими функциями относительно  $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}$  и задают отображение окрестности положения равновесия на себя. Это отображение является симплектическим, так как при со-

ударениях величины  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) являются неизменными [3, 4], а в промежутках между соударениями на изонергетическом уровне  $F = 0$  движение описывается уравнениями Уиттекера (имеющими гамильтонову форму) с независимой переменной  $v$  и симплектичность отображения следует из того, что движения гамильтоновой системы задают каноническое унивалентное преобразование [4, 5].

Отображение  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)} \rightarrow q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$  имеет неподвижную точку  $q_j = p_j = 0$ , соответствующую исследуемому периодическому движению стержня. Задача об устойчивости этой неподвижной точки отображения и задача об орбитальной устойчивости периодического движения стержня эквивалентны.

**4. Построение отображения.** Фактическое построение отображения представляет собой довольно громоздкую задачу. Оно осуществлялось на компьютере при помощи систем аналитических вычислений. При вычислениях использовались равенства (1.1), (2.7), (2.8), соотношения (2.1)–(2.3) и формулы замены (2.6). При этом численное интегрирование уравнений возмущенного движения не понадобилось, так как при  $0 < v < 2\pi$  (или, что то же, при  $0 < t < t_1$ ), когда нить ослаблена ( $q > 0$ ), движение стержня полностью известно:

$$x_c(t) = 1/2gt^2 + \dot{x}_c(0)t + x_c(0), \quad y_c(t) = \dot{y}_c(0)t + y_c(0), \quad \psi(t) = \dot{\psi}(0)t + \psi(0)$$

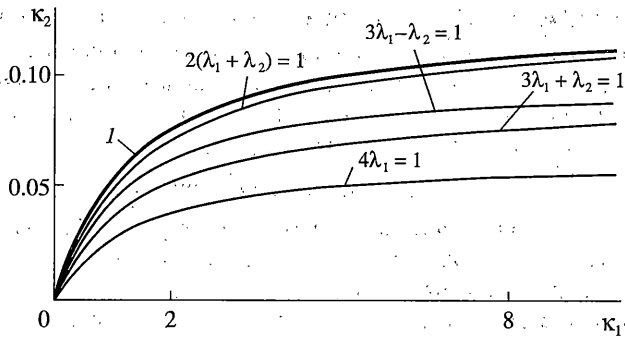
При ударе же (когда  $q = 0$ ) выполняется равенство (1.3), а величины  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) неизменны [3, 4].

Вычисления показали, что искомое отображение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} q_1^0 - \frac{\partial S_4}{\partial p_1^{(0)}} + O_5 \\ q_2^0 - \frac{\partial S_4}{\partial p_2^{(0)}} + O_5 \\ p_1^0 + \frac{\partial S_4}{\partial q_1^{(0)}} + O_5 \\ p_2^0 + \frac{\partial S_4}{\partial q_2^{(0)}} + O_5 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 - 16\kappa_2 & 12\kappa_2 & 16/\pi & -24/(\pi\kappa_1) \\ 24\kappa_2/\kappa_1 & (\kappa_1 - 24\kappa_2)/\kappa_1 & -24/(\pi\kappa_1) & 48/(\pi\kappa_1^2) \\ 2\pi\kappa_2(8\kappa_2 - 1) & -12\pi\kappa_2^2 & 1 - 16\kappa_2 & 24\kappa_2/\kappa_1 \\ -12\pi\kappa_2^2 & -\pi\kappa_2(\kappa_1 - 12\kappa_2) & 12\kappa_2 & (\kappa_1 - 24\kappa_2)/\kappa_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

где  $O_5$  – совокупность членов выше четвертой степени относительно  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ ;  $S_4$  – форма четвертой степени относительно  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2$ ). Ее коэффициенты являются функциями параметров  $\kappa_1, \kappa_2$ . Явное выражение для  $S_4$  не выписываем ввиду его громоздкости.



Фиг. 2

**5. Анализ линейной задачи. 5.1. Характеристическое уравнение и область устойчивости в первом приближении.** Характеристическое уравнение матрицы  $X$  линеаризованного отображения (4.1) является возвратным и записывается в виде

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0$$

$$a_1 = 4 - 16 \frac{(2\kappa_1 + 3)\kappa_2}{\kappa_1}, \quad a_2 = 6 - 32 \frac{(2\kappa_1 - 12\kappa_2 + 3)\kappa_2}{\kappa_1} \quad (5.1)$$

Для устойчивости неподвижной точки отображения (4.1) необходимо, чтобы все корни (мультипликаторы) уравнения (5.1) имели модули, не превосходящие единицу [6]. Это означает [7], что коэффициенты  $a_1, a_2$  уравнения (5.1) должны лежать в области, задаваемой системой неравенств

$$a_2 < 6, \quad a_2 > 2a_1 - 2, \quad a_2 > -2a_1 - 2, \quad a_2 < 1/4a_1^2 + 2 \quad (5.2)$$

Учитывая положительность параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , получаем, что второе и четвертое из неравенств (5.2) всегда выполняются, а система (5.2) эквивалентна следующей системе из двух неравенств:

$$12\kappa_2 < 2\kappa_1 + 3, \quad 24\kappa_2^2 - 4\kappa_2(2\kappa_1 + 3) + \kappa_1 > 0$$

Последняя система, как нетрудно видеть, сводится к одному неравенству

$$\kappa_2 < f(\kappa_1) \quad (5.3)$$

$$f(\kappa_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\kappa_1 - \frac{1}{12}\sqrt{4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9} \quad (5.4)$$

Кривая  $\kappa_2 = f(\kappa_1)$  показана на фиг. 2 (кривая 1). Для значений параметров  $\kappa_1, \kappa_2$ , лежащих ниже этой кривой, выполняются необходимые условия орбитальной устойчивости периодического движения стержня. Здесь мультипликаторы – комплексно-сопряженные числа с модулями, равными единице:

$$\rho_j = \exp(i2\pi\lambda_j), \quad \rho_{2+j} = \exp(-i2\pi\lambda_j) \quad (j = 1, 2) \quad (5.5)$$

где  $\pm\lambda_j$  – чисто мнимые характеристические показатели.

Для значений же параметров  $\kappa_1, \kappa_2$ , лежащих выше кривой  $\kappa_2 = f(\kappa_1)$ , уравнение (5.1) имеет корень с модулем, большим единицы и, следовательно [6], периодическое движе-

ние стержня орбитально неустойчиво (в строгой нелинейной постановке задачи, а не только в линейном приближении). Отметим, что кривая  $\kappa_2 = f(\kappa_1)$  имеет горизонтальную асимптоту  $\kappa_2 = 1/8$ . Отсюда, в частности, следует, что, если высота послеударного подскока стержня в невозмущенном движении превосходит одну восьмую часть длины нити, то рассматриваемое периодическое движение стержня орбитально неустойчиво (независимо от длины самого стержня).

**5.2. Характеристические показатели.** Пусть параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  лежат внутри области (5.3) орбитальной устойчивости в первом приближении. Из (5.1) и (5.5) следует, что величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  удовлетворяют системе уравнений:

$$2(\cos 2\pi\lambda_1 + \cos 2\pi\lambda_2) = a_1, \quad 4\cos 2\pi\lambda_1 \cos 2\pi\lambda_2 + 2 = a_2$$

где  $a_1, a_2$  – коэффициенты уравнения (5.1). Отсюда следует, что

$$\cos 2\pi\lambda_1 = c_1, \quad \cos 2\pi\lambda_2 = c_2 \tag{5.6}$$

$$c_1 = 1 - 4\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(2\kappa_1 + 3 + \sqrt{4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9}), \quad c_2 = 1 - 4\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(2\kappa_1 + 3 - \sqrt{4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9}) \tag{5.7}$$

Из (5.6) величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются неоднозначно. Для устранения неоднозначности рассмотрим предварительно матрицу  $Y(v)$  фундаментальных решений линейной системы с гамильтонианом  $h_2$ , задаваемым равенством (2.8). Пусть  $Y(0) = E$ , где  $E$  – единичная матрица четвертого порядка. Тогда матрица  $Y(2\pi)$  совпадает с матрицей (4.2) линеаризованного отображения (4.1).

Теперь воспользуемся непрерывностью характеристических показателей  $\pm i\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) по параметру  $\kappa_2$ . В предельном случае  $\kappa_2 = 0$  (высота  $h$  подскока стержня в невозмущенном движении равна нулю) гамильтониан  $h_2$  не зависит от переменной  $v$ :

$$h_2 = \frac{4}{\pi^2}p_1^2 - \frac{12}{\pi^2\kappa_1}p_1p_2 + \frac{12}{\pi^2\kappa_1^2}p_2^2$$

Все четыре корня характеристического уравнения линейной системы соответствующей этому гамильтониану, равны нулю. Поэтому величины  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) должны обращаться в нуль при  $\kappa_2 = 0$ . В дальнейшем принимаем для определенности, что величины  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) при  $\kappa_2 \neq 0$  являются положительными. Тогда, в соответствии с равенствами (5.6), имеем

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi} \arccos c_j \quad (j = 1, 2) \tag{5.8}$$

**5.3. Нормальная форма линеаризованного отображения.** Нормальная форма линеаризованного отображения (4.1) в области (5.3) устойчивости в первом приближении представляет собой два независимых поворота на углы  $2\pi\lambda_1$  и  $2\pi\lambda_2$ . Она задается матрицей  $G$  вида

$$G = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda_1 & 0 & \sin 2\pi\lambda_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\lambda_2 & 0 & \sin 2\pi\lambda_2 \\ -\sin 2\pi\lambda_1 & 0 & \cos 2\pi\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\pi\lambda_2 & 0 & \cos 2\pi\lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Приведение матрицы  $X$  (см. (4.2)) линеаризованного отображения к ее нормальной форме (5.9) можно осуществить следующим образом. Введем обозначения

$$g_j = 2\kappa_1(16\kappa_2 - 1)\sin^2 \pi\lambda_j - 96\kappa_2^2 + 24\kappa_2 - \kappa_1 \quad (j = 1, 2)$$

$$u_j = \{8\pi\kappa_1\kappa_2^2(\cos 2\pi\lambda_1 - \cos 2\pi\lambda_2)\sin 2\pi\lambda_j[(8\kappa_2 - 1)\sqrt{4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9} + (-1)^j(2\kappa_1 - 12\kappa_2 - 16\kappa_1\kappa_2 - 3)]\}^{-1/2}$$

и определим элементы  $n_{kj}$  матрицы  $\mathbf{N}$  четвертого порядка по формулам:

$$n_{1j} = u_j(24\kappa_2 - \kappa_1 - g_j \cos 2\pi\lambda_j), \quad n_{2j} = 24u_j\kappa_2 \sin^2 2\pi\lambda_j \quad (j = 1, 2)$$

$$n_{1,j+2} = -u_j \sin 2\pi\lambda_j(\kappa_1 + g_j), \quad n_{2,j+2} = -12\kappa_2 u_j \sin 4\pi\lambda_j$$

$$n_{3j} = 4\pi\kappa_2 u_j \cos 2\pi\lambda_j [12\kappa_2(1 - 2\kappa_2) - \kappa_1(1 - 8\kappa_2) \sin^2 \pi\lambda_j]$$

$$n_{3,j+2} = 4\pi\kappa_2 u_j \sin 2\pi\lambda_j [12\kappa_2(1 - 2\kappa_2) - \kappa_1(1 - 8\kappa_2) \sin^2 \pi\lambda_j]$$

$$n_{4j} = 24\pi\kappa_1\kappa_2^2 u_j \cos 2\pi\lambda_j \cos^2 \pi\lambda_j, \quad n_{4,j+2} = 24\pi\kappa_1\kappa_2^2 u_j \sin 2\pi\lambda_j \cos^2 \pi\lambda_j$$

Так построенная матрица  $\mathbf{N}$  является симплектической и приводит матрицу  $\mathbf{X}$  к ее вещественной нормальной форме  $\mathbf{G}$ , т.е.

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{N}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{N} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

где  $\mathbf{E}_2$  — единичная матрица второго порядка.

Вместо переменных  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) введем в отображении (4.1) новые переменные  $Q_j, P_j$  ( $j = 1, 2$ ) при помощи унивалентного канонического преобразования, задаваемого матрицей  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = \mathbf{N} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

В новых переменных отображение примет вид

$$\begin{vmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{vmatrix} = \mathbf{G} \begin{vmatrix} Q_1^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_1^{(0)}} + O_5 \\ Q_2^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_2^{(0)}} + O_5 \\ P_1^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_1^{(0)}} + O_5 \\ P_2^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_2^{(0)}} + O_5 \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

где  $\mathbf{G}$  — матрица (5.9), а  $F_4$  — это форма  $S_4$  из (4.1), в которой переменные  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$  выражены через  $Q_j^{(0)}, P_j^{(0)}$  в соответствии с заменой (5.10).



**6. Нелинейная задача. 6.1. Об алгоритме нелинейного исследования.** Для исследования устойчивости неподвижной точки отображения (4.1) (а, следовательно, и орбитальной устойчивости рассматриваемого периодического движения стержня вдоль вертикали) в строгой нелинейной постановке задачи приведем отображение (5.11) к нормальной форме в членах третьей степени. Соответствующую близкую к тождественной нелинейную каноническую замену переменных  $Q_j, P_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$  ( $j = 1, 2$ ) найдем по алгоритму работы [8]. По полученной нормальной форме отображения построим затем  $2\pi$ -периодический по  $\nu$  гамильтониан  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \nu)$ , который за период изменения  $\nu$  от 0 до  $2\pi$  порождает нормализованное отображение. К системе с гамильтонианом  $\Gamma$  можно затем применить известные [9–11] условия устойчивости и неустойчивости. Эти условия можно [8] явно выразить через величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и коэффициенты формы  $F_4$ , входящей в отображение (5.11) с нормализованной линейной частью.

**6.2. Резонансные кривые.** При этом существенно, есть в нашей системе резонанс четвертого порядка или нет, т.е. возможно резонансное соотношение

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = n \tag{6.1}$$

где  $m_1, m_2, n$  – целые числа ( $|m_1| + |m_2| = 4$ ) или нет.

Анализ показал, что в области (5.3) устойчивости в первом приближении возможны только четыре резонанса четвертого порядка:

$$4\lambda_1 = 1, \quad 2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1, \quad 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \tag{6.2}$$

Соответствующие им резонансные кривые показаны на фиг. 2. Первые два резонанса реализуются на кривых, задаваемых уравнениями

$$\kappa_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \kappa_1 - \frac{1}{24} \sqrt{4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9} \quad \text{и} \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_1}{4(2\kappa_1 + 3)}$$

соответственно. Для следующих двух резонансов получение явного выражения  $\kappa_2$  через  $\kappa_1$  затруднительно. Неявно соответствующие резонансные кривые задаются третьим и четвертым соотношениями из (6.2) при учете равенств (5.7) и (5.8).

На всех резонансных кривых  $\kappa_2$  – монотонно возрастающая функция от  $\kappa_1$ . Все кривые при  $\kappa_1 \rightarrow \infty$  имеют горизонтальные асимптоты. Для первых двух резонансов это будут прямые  $\kappa_2 = 1/16$  и  $\kappa_2 = 1/8$  соответственно, а для следующих двух – прямая  $\kappa_2 = 3/32$ .

**6.3. Об условиях устойчивости и неустойчивости.** Если нет резонансов четвертого порядка, то построенная по нормализованному отображению функция  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; \nu)$  имеет вид

$$\Gamma = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^3) \tag{6.3}$$

$$\xi_j = \sqrt{2} r_j \sin \varphi_j, \quad \eta_j = \sqrt{2} r_j \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2)$$

где  $c_{ij} = c_{ij}(\kappa_1, \kappa_2)$  – постоянные коэффициенты.

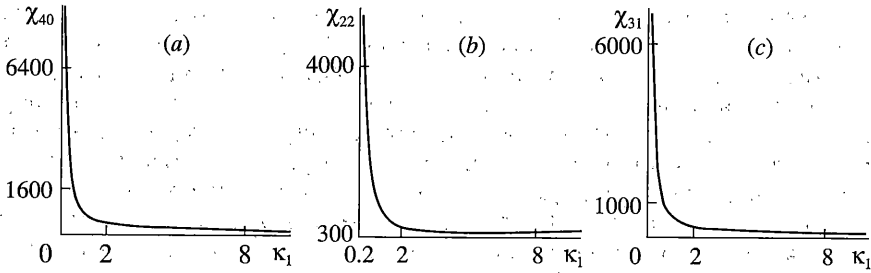
Если

$$D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0 \tag{6.4}$$

то неподвижная точка отображения (4.1) устойчива для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [9, 12]. Кроме того, если функция

$$M(r_1, r_2) = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \tag{6.5}$$

знакоопределенна при  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ , то неподвижная точка отображения (4.1) формально устойчива (т.е. устойчива при учете в отображении (4.1) членов до сколь угодно высокой конечной степени относительно  $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ ) [13, 14].



Фиг. 3

При резонансе четвертого порядка (6.1) в случае разных знаков чисел  $m_1$  и  $m_2$  неподвижная точка отображения (4.1) устойчива в третьем приближении (т.е. при учете в отображении членов до третьей степени включительно относительно  $q_j^{(0)}$ ,  $p_j^{(0)}$ ). Можно даже утверждать, что имеет место формальная устойчивость (если при этом отсутствуют резонансы (6.1) шестого, восьмого и т.д. порядков с одинаковыми знаками чисел  $m_1$  и  $m_2$  [13]).

Пусть имеет место резонанс (6.1) четвертого порядка, в котором числа  $m_1$  и  $m_2$  имеют одинаковые знаки. Для определенности пусть  $m_1 \geq 0$ ,  $m_2 \geq 0$  (как в конкретной задаче для первых трех резонансов из (6.2)). Тогда [8] к функции  $\Gamma$  из (6.3) добавится резонансное слагаемое  $R_{m_1 m_2}$  вида

$$R_{m_1 m_2} = r_1^{m_1/2} r_2^{m_2/2} [\alpha_{m_1 m_2} \sin \theta + \beta_{m_1 m_2} \cos \theta]$$

где  $\theta = m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 - n\nu$  (для резонансов из (6.2)  $n = 1$ ), а не зависящие от  $\nu$  коэффициенты  $\alpha_{m_1 m_2}$ ,  $\beta_{m_1 m_2}$  — функции параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ .

Положим

$$\chi_{m_1 m_2} = |M(m_1, m_2)| = m_1^{m_1/2} m_2^{m_2/2} \sqrt{\alpha_{m_1 m_2}^2 + \beta_{m_1 m_2}^2}$$

При выполнении неравенства  $\chi_{m_1 m_2} > 0$  неподвижная точка отображения (4.1) устойчива в третьем приближении, а если  $\chi_{m_1 m_2} < 0$ , то имеет место неустойчивость [11].

**6.4. Результаты нелинейного анализа.** Сначала рассмотрим резонансные случаи. На фиг. 3 приведены графики функций  $\chi_{m_1 m_2}(\kappa_1)$ , вычисленных вдоль первых трех резонансных кривых из (6.2) (фиг. 3, *a*, *b*, *c* соответственно). Вычисления проводились для  $\kappa_1 \leq 100$ . Все три функции  $\chi_{40}$ ,  $\chi_{22}$  и  $\chi_{31}$  оказались положительными. Поэтому для значений параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , лежащих на резонансных кривых  $4\lambda_1 = 1$ ,  $2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$  и  $3\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  периодическое движение стержня вдоль вертикали орбитально устойчиво в третьем приближении.

Для последнего из резонансов (6.2) ( $3\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ ) числа  $m_1$  и  $m_2$  имеют разные знаки. Поэтому, согласно сказанному выше, и при этом резонансе имеет место орбитальная устойчивость в третьем приближении (а, может быть, даже и в любом конечном приближении).

Теперь рассмотрим нерезонансный случай. При помощи компьютерных систем аналитических вычислений было получено следующее выражение для величины  $D$  из (6.4):

$$D = \frac{147456\kappa_2^5 d}{\pi^4 \kappa_1^7 \sin^2 2\pi\lambda_1 \sin^2 2\pi\lambda_2 (\cos 2\pi\lambda_1 - \cos 2\pi\lambda_2)^4} \quad (6.6)$$

$$d = 16(52\kappa_1^3 + 191\kappa_1^2 + 327\kappa_1 + 234)(4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 + 9) + (1664\kappa_1^4 + 4965\kappa_1^3 + 10908\kappa_1^2 + 10260\kappa_1 + 8424)\kappa_2$$

Так как параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  положительны, то  $d > 0$ . Поэтому из (6.6) следует, что величина  $D$  всегда отрицательна и, следовательно, неравенство (6.4) выполнено. Таким образом, для значений параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , лежащих в области (5.3) устойчивости в первом приближении вне резонансных кривых (6.2), исследуемое периодическое движение стержня орбитально устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

При нерезонансных значениях параметров имеет место также формальная орбитальная устойчивость (орбитальная устойчивость в любом конечном приближении), так как при отрицательных значениях  $D$  квадратичная форма (6.5) является знакоопределенной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00386) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (НШ – 1477.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.
2. Маркеев А.П. О колебаниях материальной точки, подвешенной на идеальной нити // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 240–249.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
4. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 592 с.
5. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
8. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 355–371.
9. Арнольд В.И., Козлов В.В., Неиштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
11. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 310 с.
12. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
13. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
14. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.

Москва

Поступила в редакцию  
29.03.2005