

УДК 539.3

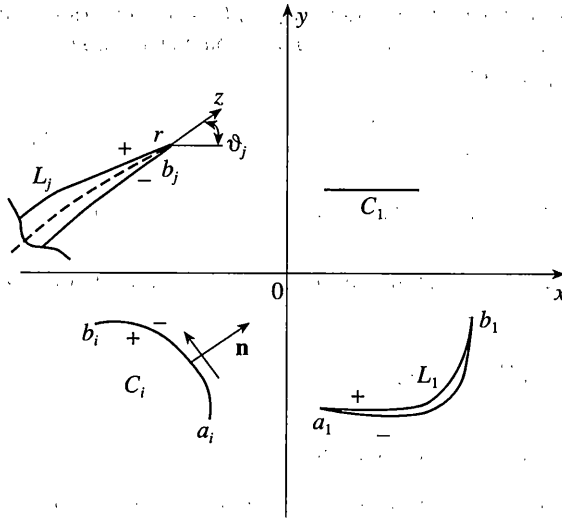
© 2007 г. **В.Н. МАКСИМЕНКО, Е.Г. ПОДРУЖИН, П.Е. РЯБЧИКОВ**

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ  
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРЕЩИНЫ И ТОНКИЕ ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ**

Решена задача изгиба бесконечной анизотропной пластины с дефектами типа гладких криволинейных непересекающихся сквозных трещин и жестких включений. Для решения использован метод комплексных потенциалов Лехницкого, задаваемых в виде интегралов типа Коши по контурам дефектов с неизвестной функцией подынтегральной плотности. Краевая задача с помощью формул Сохоцкого–Племеля приводится к системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями однозначности смещений в пластине при обходе контуров разрезов и условиями равновесия ненагруженных жестких включений. Аппроксимацией сингулярных интегралов квадратурными формулами Гаусса–Чебышева задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Исследуется локальное распределение напряжений в окрестностях вершин дефектов. Анализируется взаимовлияние дефектов на характер распределения напряжений в окрестностях их вершин, проводится сравнение известных решений для изотропных пластин с решениями, получаемыми предельным переходом в параметрах анизотропии (“слабо анизотропный материал”) с использованием предлагаемого подхода.

**1. Введение.** Работоспособность элементов конструкций определяется наличием в них концентраторов напряжений типа трещин и жестких включений. В монографии [1] с использованием теории Кирхгофа и методов теории функций комплексного переменного систематизированы основные результаты для задач изгиба изотропных пластин с криволинейными вырезами или жесткими включениями, имеющими точки возврата на контуре. Решение задачи об изгибе упругих пластин, подкрепленных тонкими упругими незамкнутыми стержнями, сводится к определению контактных усилий взаимодействия пластины и стержня. Эти задачи приводятся к интегральным уравнениям со специальной характеристической частью [2, 3]. Для пластин с упругими линейными включениями переменной жесткости некоторые результаты можно найти в [4, 5]. Определение неизвестных контактных усилий сводится здесь к решению интегро-дифференциального уравнения со специальной характеристической частью. Как следует из обзора работ в данном направлении, большинство исследований ограничено изотропным материалом пластин, простой геометрией дефектов (прямолинейные трещины, включения).

В настоящей работе впервые построены комплексные потенциалы для изгибаемой анизотропной пластины с дефектами типа гладких криволинейных непересекающихся сквозных трещин и жестких включений. Показано, что предложенные в [8] потенциальные представления и методика решения задач изгиба пластин с трещинами может быть обобщена на задачи изгиба анизотропных пластин с жесткими криволинейными включениями. Впервые получена система сингулярных интегральных уравнений и условия разрешимости для задач о взаимодействии жестких криволинейных включений, а также трещин и жестких включений. Выведены асимптотические формулы для распределе-



Фиг. 1

ния напряжений в окрестности вершин жесткого включения. Исследуется локальное распределение напряжений в окрестностях вершин дефектов. Анализируется взаимодействие дефектов на характер распределения напряжений в окрестностях их вершин.

**2. Постановка задачи.** Пусть дана бесконечная пластина (фиг. 1) из анизотропного материала, имеющая одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности пластины. Пластина ослаблена  $k$  криволинейными гладкими разрезами  $L_j$  и  $m$  абсолютно жесткими включениями  $C_i$ . Контуры трещин и жестких включений не имеют точек самопересечения. По предположению берега разрезов не контактируют между собой и свободны от действия распределенных нагрузок:

$$M_n^\pm = 0, \quad Q_n^\pm = 0 \quad (2.1)$$

Криволинейные жесткие включения при изгибе могут перемещаться как жесткие объекты и краевые условия для них представимы в виде [6]:

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right)^\pm = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right)^\pm = 0 \quad (2.2)$$

Знаки плюс и минус соответствуют левому и правому берегам разреза или включения, через  $w$  обозначены прогибы срединной поверхности пластины,  $\rho$  – текущий радиус кривизны жесткого включения в срединной плоскости пластины. Дифференцирование в (2.2) осуществляется по дуге контура  $s$  и по нормали  $\mathbf{n}$  к ней.

Пластина изгибается произвольной нагрузкой. Это могут быть изгибающие и крутящие моменты на бесконечности ( $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ ), сосредоточенные и распределенные поперечные нагрузки ( $P_z, q(x, y)$ ). Требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины.

Для определения НДС пластины используем метод комплексных потенциалов Лехницкого [7], в котором для решения задачи необходимо построить две аналитические в

области, занимаемой пластиной, функции  $F_\nu(z_\nu)$  ( $\nu = 1, 2$ ) от обобщенных комплексных координат  $z_\nu = x + \mu_\nu y$ , удовлетворив при этом краевым условиям. Здесь  $\mu_\nu$  – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

где  $D_{ij}$  – жесткости анизотропной пластинки;  $z = x + iy$  – комплексные координаты внутренних точек пластины.

Функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$  ( $\Phi_\nu(z_\nu) = F_\nu''(z_\nu)$ ), дающие решение поставленной задачи, представим в виде

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \Phi_\nu^*(z_\nu) + \Phi_\nu^{(1)}(z_\nu) + \Phi_\nu^{(2)}(z_\nu) \quad (2.3)$$

где  $\Phi_\nu^*(z_\nu)$  определяют напряженное состояние в бесконечной пластине без трещин и включений от действия внешней нагрузки (считаем их известными),  $\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu)$  определяют возмущение НДС, возникающее из-за наличия криволинейных разрезов  $L = \bigcup_{j=1}^k L_j$ ,

$\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu)$  определяют возмущения НДС, вносимые криволинейными жесткими включениями  $C = \bigcup_{i=1}^m C_i$ . Представим потенциалы  $\Phi_\nu^{(l)}(z_\nu)$  ( $l = 1, 2$ ) в виде интегралов типа Коши с неизвестной плотностью  $\omega_\nu^{(l)}(\tau)$  ( $l = 1, 2$ ) по соответствующим контурам

$$\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_\nu^{(1)}(\tau)}{\tau_\nu - z_\nu} d\tau_\nu, \quad \Phi_\nu^{(2)}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega_\nu^{(2)}(\tau)}{\tau_\nu - z_\nu} d\tau_\nu$$

**3. Система интегральных уравнений задачи.** Выполнение краевых условий (2.1), (2.2) на каждом из дефектов приводит к соотношениям на контурах  $L$  и  $C$ :

$$a^{(1)}(t)\Phi_1^\pm(t_1) + b^{(1)}(t)\overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = F^\pm(t), \quad t \in L \quad (3.1)$$

$$a^{(2)}(t)\Phi_1^\pm(t_1) + b^{(2)}(t)\overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = 0, \quad t \in C$$

$$\alpha = \frac{q_1 \overline{p_2}}{\mu_2} - \frac{\overline{q_2} p_1}{\mu_1}, \quad \beta = \frac{\overline{q_1} p_2}{\mu_2} - \frac{\overline{q_2} p_1}{\mu_1}, \quad \gamma = \frac{q_2 \overline{p_2}}{\mu_2} - \frac{\overline{q_2} p_2}{\mu_2}, \quad a^{(1)}(t) = \frac{\alpha M_1(t)}{\gamma M_2(t)}$$

$$b^{(1)}(t) = \frac{\beta \overline{M_1(t)}}{\gamma M_2(t)}, \quad a^{(2)}(t) = \frac{M_1(t)(\mu_1 - \overline{\mu_2})}{M_2(t)(\mu_2 - \overline{\mu_2})}, \quad b^{(2)}(t) = \frac{\overline{M_1(t)}(\overline{\mu_1} - \mu_2)}{M_2(t)(\mu_2 - \overline{\mu_2})}$$

$$p_\nu = D_{11} + D_{12}\mu_\nu^2 + 2D_{16}\mu_\nu, \quad q_\nu = D_{12} + D_{22}\mu_\nu^2 + 2D_{26}\mu_\nu$$

$$r_\nu = D_{16} + D_{26}\mu_\nu^2 + 2D_{66}\mu_\nu, \quad \nu = 1, 2$$

$$F^{\pm}(t) = \frac{C(t)}{\gamma M_2(t)} \left[ \frac{p_2}{\mu_2} \cos \Psi - \bar{q}_2 \sin \Psi \right], \quad M_v(t) = \mu_v \cos \Psi - \sin \Psi$$

где  $C(t) = C^{(j)}(t)$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, k$ ) неизвестные действительные постоянные на контурах  $L = \bigcup_{j=1}^k L_j$ , подлежащие определению;  $\Psi$  – угол, составляемый положительной нормалью (направлена вправо при движении от начала дефекта  $a_j$  к его концу  $b_j$ ) к контуру  $L$  (С) с осью  $x$ . Знаки  $\pm$  в формулах (3.1) соответствуют предельным значениям потенциалов на контурах  $L$  и  $C$ . Используя формулы Сохоцкого – Племеля и подставляя предельные значения комплексных потенциалов (2.3) в краевые условия (3.1), получим систему сингулярных интегральных уравнений, дающих решение задачи

$$\int_L \left\{ K_{11}^1(t, \tau) \omega^{(1)}(\tau) + K_{11}^2(t, \tau) \overline{\omega^{(1)}(\tau)} \right\} ds + \int_C \left\{ K_{12}^1(t, \tau) \omega^{(2)}(\tau) + K_{12}^2(t, \tau) \overline{\omega^{(2)}(\tau)} \right\} ds = F_1^*(t),$$

$t \in L$  (3.2)

$$\int_L \left\{ K_{21}^1(t, \tau) \omega^{(1)}(\tau) + K_{21}^2(t, \tau) \overline{\omega^{(1)}(\tau)} \right\} ds + \int_C \left\{ K_{22}^1(t, \tau) \omega^{(2)}(\tau) + K_{22}^2(t, \tau) \overline{\omega^{(2)}(\tau)} \right\} ds = F_2^*(t),$$

$t \in C, \quad \omega^{(l)}(\tau) = \omega_1^{(l)}(\tau), \quad l = 1, 2$

К уравнениям (3.2) следует добавить соотношения, связывающие  $\omega_1^{(l)}(\tau)$  и  $\omega_2^{(l)}(\tau)$  [8]:

$$\omega_2^{(l)}(\tau) = -a^{(l)}(\tau) \omega^{(l)}(\tau) - b^{(l)}(\tau) \overline{\omega^{(l)}(\tau)}, \quad l = 1, 2, \quad \tau \in L, C$$

В уравнениях (3.2) ядра  $K_{11}^1(t, \tau), K_{12}^1(t, \tau)$  содержат особенность Коши, ядра  $K_{11}^2(t, \tau), K_{22}^2(t, \tau), K_{12}^2(t, \tau), K_{21}^2(t, \tau)$  – непрерывные по  $t, \tau$  функции;  $F_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) непрерывны на контурах  $L$  и  $C$  функции.

Уравнения (3.2) следует дополнить условиями однозначности прогибов и тангенциальных смещений при обходе контуров разрезов  $L_j$ :

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{L_j} \omega^{(1)}(\tau) \left[ \tau_1 - \frac{\alpha}{\gamma} \tau_2 - \frac{\beta}{\gamma} \overline{\tau_2} \right] d\tau_1 \right\} = 0, \quad \int_{L_j} \omega^{(1)}(\tau) d\tau_1 = 0$$

(3.3)

Для жестких включений дополнительными условиями будут условия равенства нулю главного момента сил, действующих на каждое жесткое включение со стороны пластины (условия равенства нулю главного вектора обеспечиваются автоматически):

$$\int_{C_i} \omega^{(2)}(\tau) d\tau_1 = 0$$

(3.4)

**4. Численное решение.** Введем параметрические представления для криволинейных незамкнутых контуров  $L, C: \tau^{(i)}(\xi) (i = 1, 2, 3, \dots, k + m), \xi \in [-1; +1]$  и учтем, что функции подынтегральных плотностей для контуров  $L, C$  представимы в виде [3]

$$\omega^{(i)}(\tau(\xi)) = \chi_{li}(\xi) = \chi_{li}^0(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2} \quad (l = 1, 2)$$

Используя квадратурные формулы Гаусса–Чебышева для вычисления сингулярных интегралов, а также квадратурные формулы Гаусса при вычислении обычных интегралов, сведем систему интегральных уравнений (3.2) с дополнительными условиями (3.3), (3.4) к системе линейных алгебраических уравнений для определения значений неизвестных функций подынтегральных плотностей в точках коллокации на контурах  $L, C$ . После этого с заданной точностью могут быть определены значения потенциалов, а значит, напряжения в любой точке пластины, и вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1, K_2$  в вершинах трещин и жестких включений (во втором квадранте на фиг. 1 изображена окрестность вершины разреза):

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2\text{Re} \left[ \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu, q_\nu, r_\nu) \Phi_\nu(z_\nu) \right]$$

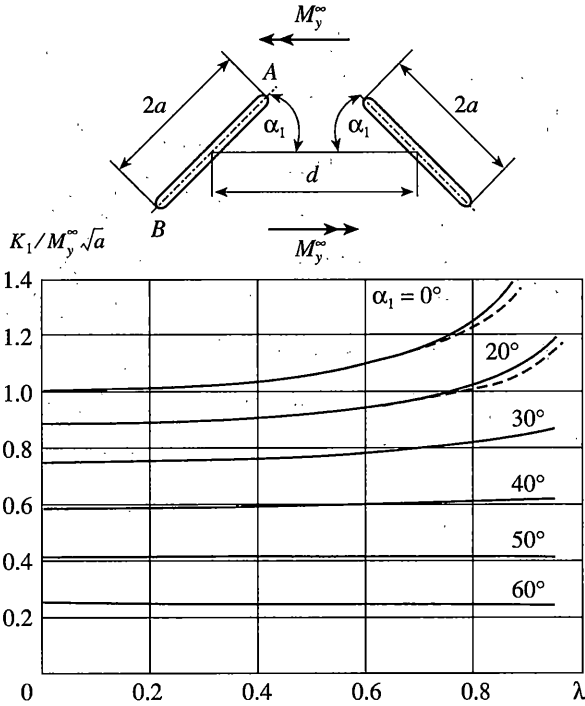
$$M_\vartheta = K_1(2r)^{-1/2}, \quad H_{n\vartheta} = K_2(2r)^{-1/2}$$

$$K_1 = -\text{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu \sin^2 \vartheta_j + q_\nu \cos^2 \vartheta_j - 2r_\nu \sin \vartheta_j \cos \vartheta_j) (\pm \chi_{\nu j}^0(\mp 1)) \sqrt{\frac{t_\nu^{ij}(\mp 1)}{\pm (\cos \vartheta_j + \mu_\nu \sin \vartheta_j)}} \right\}$$

$$K_2 = -\text{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 [(p_\nu - q_\nu) \cos \vartheta_j \sin \vartheta_j + r_\nu (\cos^2 \vartheta_j - \sin^2 \vartheta_j)] (\pm \chi_{\nu j}^0(\mp 1)) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{t_\nu^{ij}(\mp 1)}{\pm (\cos \vartheta_j + \mu_\nu \sin \vartheta_j)}} \right\}, \quad t_\nu^{ij}(\xi) = \frac{dt^j(\xi)}{d\xi}$$

Здесь  $j$  – индекс дефекта.

Результаты расчетов по предложенной методике сравнивались с известными решениями для изотропных пластин с дефектами. Результаты для изотропных пластин получены предельным переходом в параметрах анизотропии в численном решении. На фиг. 2 приведены зависимости коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_1(\lambda, \alpha_1)$  для изотропной пластины (материал 1 в табл. 1), содержащей две прямолинейные трещины и нагруженной на бесконечном удалении равномерно распределенными изгибающими моментами  $M_y^\infty$ . Здесь параметр  $\lambda = 2a/d$  определяет расстояние между трещинами,  $\alpha_1$  – угол ориентации трещин ( $\alpha_1$  менялся от  $0^\circ$  до  $60^\circ$ ). Коэффициент интенсивности  $K_1(\lambda, \alpha_1)$  для вершины А трещины вычислялся на площадках, совпадающих с направлением касательной в вершине ( $\vartheta_j = \alpha_1$ ). Пунктирные линии на фигуре соответствуют результатам, приведенным в [9], где для решения данной задачи использовалось разложение комплексных потенциалов в ряд Лорана.



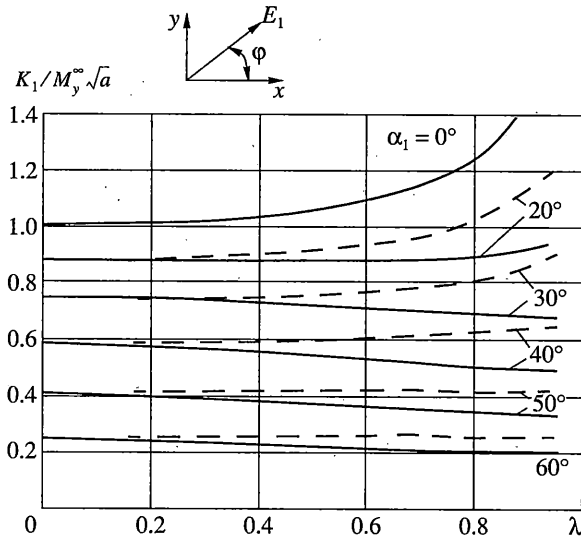
Фиг. 2

На фиг. 3 представлены зависимости  $K_1(\lambda, \alpha_1)$  для ортотропной пластинки (фиг. 2) из графитоэпоксидного композита (материал 3 в табл. 1) при различных углах анизотропии ( $\varphi$  – угол между направлением  $E_1$  и осью  $x$ ). Сплошные линии соответствуют  $\varphi = 0$ , штриховые –  $\varphi = \pi/2$ . О сходимости результатов вычислений можно судить по данным табл. 2, в которой приведены безразмерные значения  $K_1(\lambda, \alpha_1)$  (при  $\lambda = 0.95$ ) для различного числа узлов коллокации ( $N = 2, 4, 12, 20, 40$ ) на контурах разрезов. Из данных табл. 2 следует, что относительная погрешность в вычислениях КИН порядка 0.001 гарантируется уже при задании 20 узловых точек на контурах разрезов, что свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого метода.

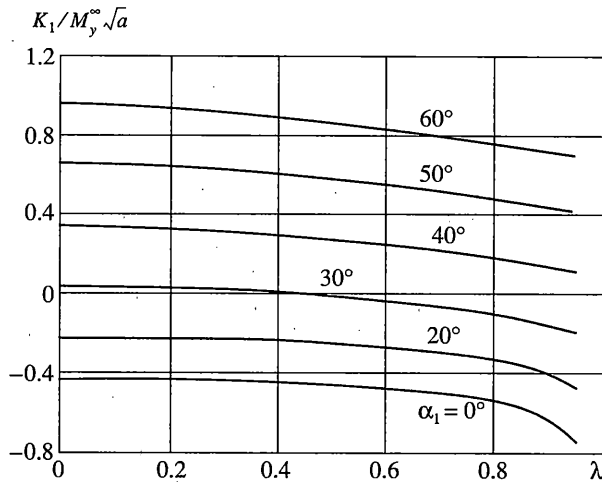
На фиг. 4 представлены результаты расчета КИН  $K_1(\lambda, \alpha_1)$  для изотропной пластины, содержащей два прямолинейных жестких включения (см. фиг. 2). Следует отметить, что при некоторых углах наклона жестких включений на растягиваемой поверхности изгибаемой пластины в окрестности вершины жесткого включения появляются сжимающие напряжения.

Таблица 1

№	$E_2 \cdot 10^{-4}$ МПа	$E_1/E_2$	$\nu_{12}$	$G \cdot 10^{-4}$ МПа
1	27.610	1	0.25	11.044
2	1.795	3	0.25	0.863
3	1.104	25	0.25	0.552

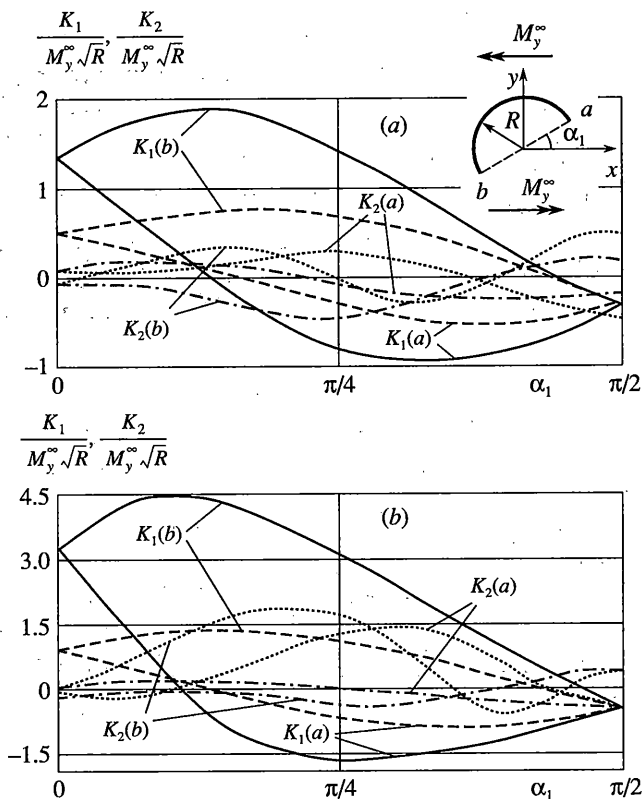


Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 5 представлены зависимости  $K_1(\alpha_1)$ ,  $K_2(\alpha_1)$  для неограниченной пластины, содержащей жесткое включение в форме дуги полуокружности и изгибаемой равномерно распределенными на бесконечности моментами. Для стеклоэпоксидного композита (материал 2 в табл.1) расчет проведен для двух случаев:  $\varphi = 0$  – сплошные и пунктирные кривые;  $\varphi = \pi/2$  – штриховые и штрих-пунктирные кривые (фиг. 5, a). На фиг. 5, b представлены результаты для пластины из графитоэпоксидного композита ( $\varphi = 0$ ) и изотропного материала (сплошные, пунктирные и штриховые, штрих-пунктирные кривые соответственно). Из графиков следует, что КИН во всем диапазоне изменения  $\alpha_1$  существенно зависит от степени анизотропии материала пластины.



Фиг. 5

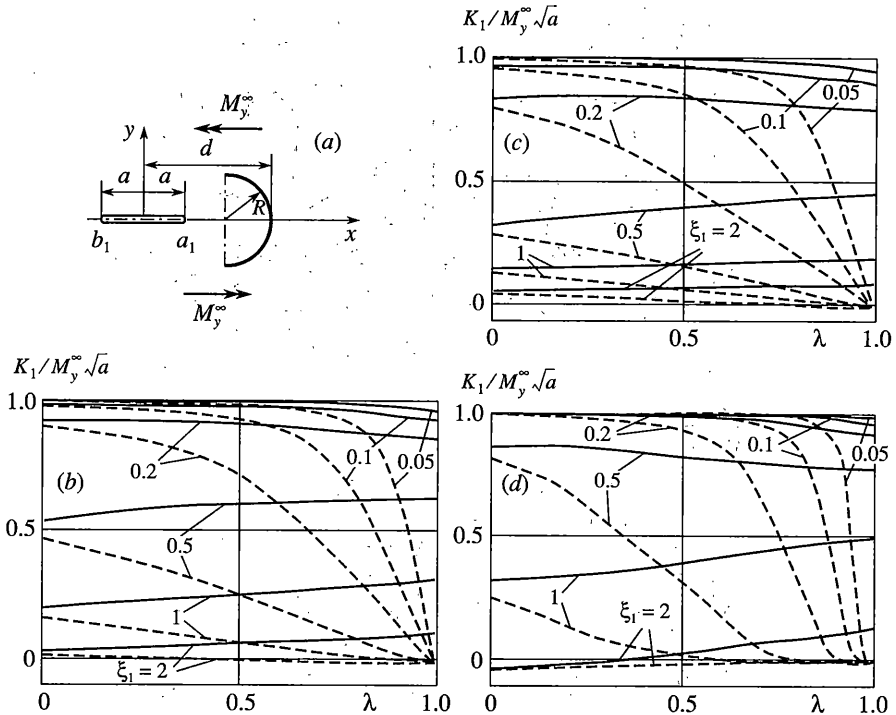
Фиг. 6, *b* показывает распределение КИН в вершинах  $a_1$  (штриховые кривые) и  $b_1$  (сплошные кривые) прямолинейного разреза в пластине с жестким полукруговым включением (фиг. 6, *a*) в зависимости от  $\xi_1 = R/d$  и  $\lambda = a/d$  (для изотропного материала). На фиг 6 *c, d* приведены аналогичные графические зависимости для пластины из графитоэпоксидного композита (угол анизотропии  $\varphi$  соответственно равен 0 и  $\pi/2$ ).

В заключение отметим, что на НДС в окрестности вершины трещины (жесткого включения) значительное влияние оказывают параметры анизотропии материала пла-

Таблица 2

$\alpha$	$\varphi$	Количество узлов					
		60	40	20	12	4	2
0	0	1.7689	1.7689	1.7688	1.7640	1.5010	1.1457
	$\pi/2$	1.7689	1.7689	1.7688	1.7640	1.5010	1.1457
$\pi/6$	0	0.6812	0.6812	0.6812	0.6812	0.6583	0.6824
	$\pi/2$	0.9183	0.9183	0.9183	0.9183	0.8999	0.8145
$\pi/3$	0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1948	0.1841
	$\pi/2$	0.2503	0.2503	0.2503	0.2503	0.2502	0.2499





Фиг. 6

стины, геометрия дефектов, соотношение размеров включения и трещины, а также расстояние между ними. Предлагаемая методика реализована в виде программы с удобным интерфейсом, позволяет эффективно решать задачи изгиба анизотропных пластин, содержащих концентраторы напряжений типа трещин и жестких включений, и может быть рекомендована к практическому применению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
2. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
3. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293–302.
4. Shavlakadze N. On some contact problems for bodies with elastic inclusions // Georg. Math. Journal/1998. V. 5. № 3. P. 285–300.
5. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 1999. V. 120. P. 135–147.
6. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев: Наук. думка, 1964. 384 с.
7. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
8. Максименко В. Н., Подружин Е.Г. Изгиб анизотропных пластин при наличии трещин сложной формы // Учен. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20. № 3. С. 81–90.
9. Isida M. Bending of plate containing arbitrary array of cracks // Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs. 1977. V. 43. № 367. P. 825–837.