МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2007

УДК 539.375

© 2007 г. А.В. АНДРЕЕВ

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Предложены конструктивные методы прямого численного решения одномерных сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений в случае, когда их решение имеет асимптотику степенного типа на концах промежутка интегрирования. Качественно разделяются подходы для решений, характеризующихся комплексной и вещественной асимптотиками. Для первых построение решения основано на его представлении в виде разложения по конечной системе ортогональных полиномов (при явном учете концевой асимптотики), аналитическом вычислении сингулярных и гиперсингулярных интегралов, заменой регулярного (обобщенного) ядра на вырожденное специального вида с последующим аналитическим вычислением содержащего его интеграла (либо прямом численном вычислении последнего). Применение метода коллокации к построенному таким образом функциональному уравнению позволяет сформировать систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения решения. Для вещественной асимптотики развит прямой подход, базирующийся на аппроксимации неизвестной функции полиномом Лангранжа (при явном учете концевой асимптотики решения), использовании квадратурных формул интерполяционного типа и формировании линейной алгебраической системы относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек с помощью метода коллокации. Представлены результаты численных расчетов, проведено их сравнение с аналитическими решениями.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим сингулярное интегродифференциальное уравнение (СИДУ) типа Прандтля в форме (перечеркнутый интеграл обозначает главное значение по Коши):

$$A\phi'(\eta) + B\phi(\eta) + C\fint_{-1}^{1}\frac{\phi'(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + D\fint_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \int_{-1}^{1}K(\xi,\eta)\phi'(\xi)d\xi +$$
$$+\int_{-1}^{1}L(\xi,\eta)\phi(\xi)d\xi = p(\eta), \quad -1<\eta<1, \quad \phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \tag{1.1}$$

где $\phi(\xi)$ – неизвестная функция, а $p(\eta)$ – заданная на отрезке $[-1, 1]$ ограниченная непрерывная функция. Ядра $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$ могут быть ограниченными и непрерывными, т.е. удовлетворять условию Гельдера по обоим переменным, либо иметь неподвижные особенности на концах промежутка интегрирования. Это означает, что они могут неограниченно возрастать, когда ξ и η одновременно стремятся к одному из концов отрезка $[-1, 1]$ ($\xi = \eta \to \pm 1$). В последнем случае будем полагать, что $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$ являются обобщенными ядрами типа Коши [1], т.е. их особенности имеют форму ρ^{-1} ($\rho \to 0$). Постоянные A, B, C и D, которые при определенных ограничениях могут быть и функциями η (см., например, [2]), а также функции $K(\xi, \eta)$, $L(\xi, \eta)$ и $p(\eta)$ принимают вещественные либо комплексные значения.

Далее будем полагать, что решение СИДУ (1.1) имеет асимптотику степенного типа на концах промежутка, определяемую как "подвижными" особенностями интегралов типа Коши (первый и второй интегралы (1.1)), так и неподвижными особенностями ядер $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$, если таковые имеются. Такого рода асимптотика может быть учтена на основе введения специальной весовой (фундаментальной) функции [2]:

$$w(\xi) = (1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}, \quad -1 \le \xi \le 1, \quad \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta \ge 0 \tag{1.2}$$

которая мультипликативным образом входит в состав неизвестной функции, т.е.

$$\phi(\xi) = u(\xi)w(\xi) \tag{1.3}$$

где $u(\xi)$ – новая неизвестная функция, ограниченная и непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ и не обращающаяся в нуль на его концах.

Выделим две основные методики определения показателей асимптотики весовой функции (1.2). Первый метод основан на асимптотическом анализе главной (характеристической) части СИДУ (1.1), описывающего некоторую краевую задачу [1–3]. Альтернативой ему служит встречающийся в приложениях подход, который базируется на асимптотическом анализе этой краевой задачи [4–6] до построения СИДУ, ее описывающего.

Отметим, что наличие неподвижных особенностей в ядрах $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$ оказывает существенное влияние на асимптотику решения вблизи концов промежутка интегрирования, которая в такой ситуации, как правило, оказывается отличной от классической корневой, и имеет вид r^{λ}, $1/2 \ne \mathrm{Re}\lambda \ge 0$; $r \to 0$ [1, 2, 7, 8].

Явный учет асимптотики решения особенно важен в случае, когда необходимо достаточно точно определить главные члены асимптотического разложения решения вблизи концов промежутка интегрирования. Это, в частности, относится к задачам теории упругости для тел с трещинами, поскольку главный член асимптотического разложения решения вблизи вершины трещины с точностью до постоянного множителя совпадает с коэффициентом интенсивности напряжений, играющим ключевую роль в механике хрупкого разрушения. Отметим также, что, как показал анализ, проведенный в [9], для корректного определения главного члена асимптотического разложения на одном из концов промежутка интегрирования в весовой функции (1.2) необходимо задавать адекватный показатель асимптотики решения не только вблизи этого, но и вблизи другого конца промежутка.

Интегрируя по частям первый и третий интегралы (1.1), с учетом (1.3) получим гиперсингулярное интегродифференциальное уравнение (ГСИДУ):

$$A\frac{d}{d\eta}[u(\eta)w(\eta)] + Bu(\eta)w(\eta) + C\int_{-1}^{1}\frac{u(\xi)w(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} + D\int_{-1}^{1}\frac{u(\xi)w(\xi)d\xi}{\xi-\eta} +$$

$$+\int_{-1}^{1}k(\xi,\eta)u(\xi)w(\xi)d\xi + G^{+}(\eta)u(+1) + G^{-}(\eta)u(-1) = p(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{1.4}$$

$$G^{\pm}(\eta) \equiv w(\pm 1)[C/(1\mp\eta) \pm K(\pm 1, \eta)]$$

$$k(\xi,\eta) \equiv -\partial K(\xi,\eta)/\partial\xi + L(\xi,\eta)$$

которое эквивалентно СИДУ (1.1) при отыскании решения последнего в классе функций, имеющих производную гельдеровского класса ($\phi'(\xi) \in H$) [10].

Первый интеграл (1.4) (дважды перечеркнутый) следует понимать в смысле конечного значения по Адамару [11]:

$$\int\!\!\!\!=_{-1}^{1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-1}^{\eta-\varepsilon} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} + \int_{\eta+\varepsilon}^{1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} - \frac{2f(\eta)}{\varepsilon}\right], \quad -1<\eta<1$$

Отметим, что такое определение конечно-частного интеграла эквивалентно (при $f'(\xi) \in H$) формальному интегрированию по частям интеграла типа Коши [10, 12]:

$$\int\!\!\!\!=_{-1}^{1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} \equiv \int\!\!\!\!-_{-1}^{1} \frac{f'(\xi)d\xi}{\xi-\eta} - \frac{f(+1)}{1-\eta} - \frac{f(-1)}{1+\eta}, \quad -1<\eta<1$$

которое, собственно, и сопровождает переход от (1.1) к (1.4), и определению, основанному на дифференцировании последнего по параметру [10, 13]:

$$\int\!\!\!\!=_{-1}^{1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} \equiv \frac{d}{d\eta}\int\!\!\!\!-_{-1}^{1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-\eta}, \quad -1<\eta<1 \qquad (1.5)$$

ГСИДУ вида (1.4) возникает при формулировке многих важных прикладных задач физики и механики, в частности, в двумерных задачах механики контактных взаимодействий и теории концентрации напряжений, в задачах механики разрушения, гидродинамике и теории упругости. Как справедливо отмечалось в [10], основным достоинством гиперсингулярных уравнений двумерной теории упругости по отношению к их сингулярным (и фредгольмовским) эквивалентам [10, 14] является то, что первые формулируются относительно тех величин, которые характеризуют контактное взаимодействие деформируемых твердых тел – смещений (или их разрывов) и усилий. Это дает возможность избегать дополнительного интегрирования производной от (разрыва) смещений, относительно которой формулируются сингулярные уравнения, что может позволить существенно упростить решение смешанных и контактных задач теории упругости, в частности, задач о трещинах с контактирующими поверхностями [15–17].

Отметим, что комплексные граничные интегральные уравнения на криволинейных контурах, которые возникают в двумерных задачах, сводятся к ГСИДУ (1.4) с помощью вещественной параметризации этих контуров и аддитивного расщепления ядер уравнений для выделения интегралов типа Адамара и Коши.

Далее будем полагать, что решение ГСИДУ (1.4) и эквивалентного ему при $\phi'(\xi) \in H$ СИДУ (1.1) существует и единственно без наложения дополнительных условий на его решение или правую часть. Условия адекватности такого предположения, а также дополнительные условию при его нарушении, обеспечивающие существование и единственность решения в соответствующем классе функций, в каждом конкретном случае могут быть получены на основе сопоставления ГСИДУ (1.4) с эквивалентными сингулярными уравнениями [2, 10] (в том числе с обобщенными ядрами [2, 7]) или СИДУ [10, 18].

Отметим, что теория комплексных гиперсингулярных интегральных уравнений, в частности тех, которые возникают при решении двумерных задач теории упругости, получила существенное развитие в [10] и других более ранних работах того же автора. В [10] также описан комплексный метод граничных элементов, разработанный для численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ) теории упругости. Основным достоинством этого метода является аналитическое интегрирование вдоль криволинейного контура, которое удается выполнить для нулевого и корневого показателей асимптотики весовой функции (1.2). В то же время данный метод требует дальнейшего развития для применимости в случае более сложной, вещественной (s^λ, $1/2 \neq \lambda > 0$, $s \to 0$) либо комплексной асимптотики решения на концах промежутка интегрирования.

Из других исследований в направлении разработки прямых численных методов решения одномерных ГСИУ отметим метод дискретных вихрей, ключевые положения которого приведены, например, в [12, 19], а примеры применения – в [13]. Этот метод выделяется чрезвычайной простотой реализации, однако, разработанный для решения задач аэродинамики, имеет определенные ограничения по применимости для решения задач механики разрушения, поскольку не предусматривает явного учета асимптотики решения вблизи концов промежутка интегрирования. Данный вопрос подробнее будет обсуждаться ниже.

Далее будем качественно разделять подходы к численному решению ГСИДУ (1.4) в случаях, когда весовая функция (1.2) является комплекснозначной, либо вещественной. Причины подобного разделения подходов изложены ниже (см. также [20]).

2. Комплексная асимптотика. Метод численного решения. Для построения решения ГСИДУ (1.4), имеющего комплексную асимптотику на концах промежутка интегрирования ($\mathrm{Im}\alpha \neq 0$, $\mathrm{Im}\beta \neq 0$), представим неизвестную функцию $u(\xi)$ в виде разложения по конечной системе полиномов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом (1.2) [1, 20]:

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi) \tag{2.1}$$

Здесь c_k – комплексные постоянные, подлежащие определению, а $P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ – полином Якоби вещественного аргумента ξ с комплексными параметрами α и β.

Для вычисления сингулярного и гиперсингулярного интегралов в (1.4) используем интегральное представление функции Якоби второго рода $Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta)$ в виде [21]:

$$Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \frac{1}{w(\eta)} \int_{-1}^{1} \frac{w(\xi) P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{\xi - \eta} d\xi, \quad -1 < \eta < 1 \tag{2.2}$$

Дифференцируя последнее выражение по η, что находит свое обоснование в соответствии с (1.5), получим представление для гиперсингулярного интеграла через функцию второго рода и ее производную $Q_k'^{(\alpha,\beta)}(\eta)$:

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{1} \frac{w(\xi) P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{(\xi - \eta)^2} d\xi = w(\eta)[Q_k'^{(\alpha,\beta)}(\eta) + Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta)\chi(\eta)], \quad -1 < \eta < 1 \\ \chi(\eta) \equiv \beta/(1+\eta) - \alpha/(1-\eta) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в (1.4), с использованием (2.2) и (2.3) получим функциональное уравнение

$$\begin{gathered} w(\eta) \sum_{k=0}^{n} c_k \{ A P_k'^{(\alpha,\beta)}(\eta) + [A\chi(\eta) + B] P_k^{(\alpha,\beta)}(\eta) + C Q_k'^{(\alpha,\beta)}(\eta) + [C\chi(\eta) + D] Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta) + \\ + h_k(\eta) + [G^+(\eta) P_k^+ + G^-(\eta) P_k^-]/w(\eta) \} = p(\eta), \quad -1 < \eta < 1 \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$h_k(\eta) \equiv \frac{1}{w(\eta)} \int_{-1}^{1} k(\xi, \eta) P_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) w(\xi) d\xi \tag{2.5}$$

$$P_k^+ \equiv P_k^{(\alpha, \beta)}(+1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}, \quad P_k^- \equiv P_k^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta+1)}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Отметим, что для численного решения ГСИУ при $\alpha = \beta = 1/2$ часто используется аналогичное (2.1) разложение по полиномам Чебышева второго рода $U_k(\xi)$, которые ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\sqrt{1-\xi^2}$. Гиперсингулярный интеграл от полинома Чебышева сводится к такому же полиному Чебышева (см., например, [13]):

$$\fint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}\, U_k(\xi)}{(\xi-\eta)^2} d\xi = -\pi(k+1) U_k(\eta)$$

Для определения коэффициентов c_k применяется следующий подход. Обе части построенного с помощью разложения функционального уравнения умножаются на полиномы $U_j(\eta)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и повторно интегрируются с весом $\sqrt{1-\eta^2}$, что позволяет построить систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Поскольку в данном случае такого рода подход представляется крайне ресурсоемким, будем использовать альтернативную методику определения коэффициентов c_k, предложенную в [20] для решения СИУ.

Для получения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов c_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ запишем функциональное уравнение (2.4) в соответствующем количестве точек коллокации η_r:

$$\begin{gathered} w(\eta_r) \sum_{k=0}^{n} c_k \{ A P_k'^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + [A\chi(\eta_r) + B] P_k^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + C Q_k'^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + [C\chi(\eta_r) + D] Q_k^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + \\ + h_k(\eta_r) + [G^+(\eta_r) P_k^+ + G^-(\eta_r) P_k^-]/w(\eta_r) \} = p(\eta_r), \quad -1 < \eta_r < 1 \ (r = 0, 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Отметим, что необходимым условием реализации предлагаемых в данной работе методов решения ГСИДУ является точное и эффективное вычисление специальных функций (и их корней, см. *п.* 3), необходимое для формирования СЛАУ, к которым эти ГСИДУ сводятся. Унифицированный подход к вычислению наборов полиномов Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}(\eta)$, соответствующих им функций второго рода $Q_k^{(\alpha, \beta)}(\eta)$ и их производных $P_k'^{(\alpha, \beta)}(\eta)$ и $Q_k'^{(\alpha, \beta)}(\eta)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, которые необходимы для формирования СЛАУ (2.6), описан в [9]. В [20] изложены два альтернативных метода вычисления интегралов (2.5): прямой численный подход, базирующийся на использовании квадратурных формул Гаусса–Якоби (см. ниже (3.1)), и аналитическая методика, основанная на разложении ядра $k(\xi, \eta)$ в конечный ряд по степеням ξ. Отметим, что последняя методика вычисления интегралов (2.5) может оказаться особенно удобной в случае, если ядро $k(\xi, \eta)$ не удается выразить явно, и используется его представление в виде некоторого интеграла по вспомогательной переменной $k(\xi, \eta) = \int f(\xi, \eta, \lambda) d\lambda$. Очевидно, что если значения и этого интеграла потребуется определить численно, вычисление $(n+1)^2$ (см. (2.6)) интегралов (2.5) по квадратурной формуле (3.1) окажется крайне ресурсоемким. В такой ситуации разложение подынтегральной функции $f(\xi, \eta, \lambda)$ в ряд по ξ может позволить выполнить почленное аналитическое интегрирование по λ этого ряда и получить разложения ядра $k(\xi, \eta)$ в явном виде с тем, чтобы использовать его далее при вычислении (2.5) [20].

Таким образом, построение решения ГСИДУ (1.4) в виде разложения (2.1) полуаналитическими методами сводится к решению СЛАУ (2.6), которая позволяет определить коэффициенты аппроксимации неизвестной функции.

3. Вещественная асимптотика. Альтернативный метод численного решения. Предложенный выше метод решения ГСИДУ (1.4) применим, безусловно, и для численного построения решения, имеющего вещественную асимптотику на концах промежутка интегрирования ($\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}\beta = 0$). В то же время при такой асимптотике может оказаться более удобным и эффективным изложенный ниже прямой численный подход, основанный на полиномиальной аппроксимации неизвестной функции $u(\xi)$, квадратурных формулах интерполяционного типа и использовании метода коллокации для формирования линейной алгебраической системы уравнений относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек.

Для аппроксимации последнего интеграла (1.4) в виде суммы используем квадратную формулу Гаусса – Якоби (см., например, [1]):

$$\int_{-1}^{1} k(\xi, \eta)u(\xi)w(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k k(\xi_k, \eta)u(\xi_k), \quad W_k = \frac{q_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_k)}{P_k'^{(\alpha, \beta)}(\xi_k)}, \ \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1 \quad (3.1)$$

которая точна, если $k(\xi, \eta)u(\xi) \in P_{2n-1}$, т.е. плотность интеграла $k(\xi, \eta)u(\xi)$ представляет собой полином по ξ степени, не превышающей $2n - 1$. Здесь и далее

$$q_n^{(\alpha, \beta)}(\eta) \equiv w(\eta)Q_n^{(\alpha, \beta)}(\eta) \quad (3.2)$$

а узлы квадратурных формул ξ_k представляют собой множество корней полинома Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (3.3)$$

которые при $\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1$ и $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}\beta = 0$ являются простыми и лежат в промежутке $(-1, 1)$ [21].

Для сингулярного интеграла с ядром Коши справедлива модифицированная квадратурная формула Гаусса–Якоби [22]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi - \eta}d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k \frac{u(\xi_k)}{\xi_k - \eta} + u(\eta)\frac{q_n^{(\alpha, \beta)}(\eta)}{P_k^{(\alpha, \beta)}(\eta)}, \quad -1 < \eta \neq \xi_k < 1, \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1 \quad (3.4)$$

которая является точной, если $u(\xi) \in P_{2n}$.

Посредством построения набора полиномов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(\xi)/(\xi - \eta)^2$ [23], для конечно-частного интеграла можно построить квадратурную формулу типа Гаусса, точную для плотности $u(\xi) \in P_{2n-1}$. Однако положение узлов такой квадратурной формулы оказывается зависящим от величины η. Кроме того, для некоторых величин η эти узлы оказываются комплексными, т.е. лежат вне промежутка интегрирования [23]. Как следствие, такого рода формула непригодна для использования при решении ГСИДУ (1.4) методом коллокации.

Таким образом, для аппроксимации гиперсингулярного интеграла в (1.4) необходимо использовать квадратурную формулу иного, например, интерполяционного типа. При построении такого рода квадратурной формулы воспользуемся полиномом Лагранжа, который, поскольку интерполяция осуществляется по значениям неизвестной функции в нулях полинома Якоби, можно записать в форме [19]:

$$u(\eta) = P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)\sum_{k=1}^{n}\frac{u(\xi_k)}{(\eta-\xi_k)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)} \tag{3.5}$$

Данное интерполяционное представление является точным, если $u(\xi) \in P_{n-1}$ (см., например, [24]).

Подстановка (3.5) в (3.4) позволяет получить для сингулярного интеграла квадратурную формулу

$$\fint_{-1}^{1}\frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi = \sum_{k=1}^{n}W_k^{\sin}(\eta)u(\xi_k), \quad -1<\eta<1, \quad \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1 \tag{3.6}$$

$$W_k^{\sin}(\eta) = \begin{cases}\dfrac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)-q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)(\xi_k-\eta)}, & \eta \ne \xi_k\\[2ex] \dfrac{q_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}, & \eta = \xi_k\end{cases} \tag{3.7}$$

которая точна, если $u(\xi) \in P_{n-1}$.

Отметим, что второе выражение для веса (3.7) (при $\eta = \xi_k$) получается из первого предельным переходом при $\eta \to \xi_k$. Как видно, квадратурная формула (3.6) для сингулярного интеграла, в отличие от аналогичной формулы (3.4), справедлива и в собственных узлах.

Дифференцируя (3.6) по η (см. определение (1.5)) и первое выражение (3.7) (и переходя к пределу $\eta \to \xi_k$ после дифференцирования), получим квадратурную формулу для гиперсингулярного интеграла

$$\fint_{-1}^{1}\frac{u(\xi)w(\xi)}{(\xi-\eta)^2}d\xi = \sum_{k=1}^{n}W_k^{hyp}(\eta)u(\xi_k), \quad -1<\eta<1, \quad \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1 \tag{3.8}$$

$$W_k^{hyp}(\eta) = \frac{d}{d\eta}W_k^{\sin}(\eta) = \begin{cases}\dfrac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)-q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)-q_n'^{(\alpha,\beta)}(\eta)(\xi_k-\eta)}{(\xi_k-\eta)^2P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}, & \eta \ne \xi_k\\[2ex] \dfrac{q_n''^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}{2P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}, & \eta = \xi_k\end{cases} \tag{3.9}$$

которая, таким образом, точна при $u(\xi) \in P_{n-1}$, и подобно (3.7) справедлива в том числе и в собственных узлах. Отметим, что в [25] проведен теоретический анализ сходимости квадратурных формул (3.6) и (3.8), на основе которого можно оценить сверху их погрешность, исходя из предположений о гладкости плотностей соответствующих интегралов.

Отметим также, что имеются альтернативные методики построения квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов, базирующихся, например, на аппроксимации их плотностей сплайнами (см., например, [26, 27]).

Приведенные выше квадратурные и интерполяционные формулы совместно с методом коллокации открывают несколько путей к формированию СЛАУ относительно значений неизвестной функции ГСИДУ (1.4) в наборе точек ξ_k. Так, применение квадратурных формул (3.1), (3.4), (3.8) к интегралам ГСИДУ (1.4) и использование интерполяционного полинома (3.5) для аппроксимации внеинтегральных членов позволяет получить функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left\{-\frac{w(\eta)P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{(\xi_k-\eta)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\left[A\left(\chi(\eta)+\frac{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}+\frac{1}{\xi_k-\eta}\right)+B\right]+CW_k^{hyp}(\eta)+\right.$$
$$\left.+W_k\left[\frac{D}{\xi_k-\eta}+k(\xi_k,\eta)\right]+\frac{R_k^+(\eta)+R_k^-(\eta)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\right\}+Du(\eta)\frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)} = p(\eta),\quad -1<\eta\neq\xi_k<1 \tag{3.10}$$

$$R_k^{\pm}(\eta)\equiv\pm P_n^{\pm}G^{\pm}(\eta)/(1\mp\xi_k)$$

Последующий выбор точек коллокации как нулей функции второго рода (см. (3.2)):

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_m) = 0\ (m = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{3.11}$$

позволяет сформировать СЛАУ вида

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left\{-\frac{w(\eta_m)P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_m)}{(\xi_k-\eta_m)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\left[A\left(\chi(\eta_m)+\frac{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\eta_m)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_m)}+\frac{1}{\xi_k-\eta_m}\right)+B\right]+CW_k^{hyp}(\eta_m)+\right.$$
$$\left.+W_k\left[\frac{D}{\xi_k-\eta_m}+k(\xi_k,\eta_m)\right]+\frac{R_k^+(\eta_m)+R_k^-(\eta_m)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\right\} = p(\eta_m) \tag{3.12}$$

Отметим здесь, что, как показано в [9], количество нулей функции второго рода (3.11) на отрезке $(-1, 1)$ при $\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1/2$ и $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}\beta = 0$ на единицу больше числа нулей соответствующего полинома (3.3). Там же в [9] изложена удобная и эффективная методика поиска корней полинома Якоби и функции второго рода. Следовательно, в рамках указанных выше предположений об асимптотике неизвестной функции (см. (1.2)), выбор точек коллокации в виде (3.11) всегда позволяет сформировать полную СЛАУ (3.12), причем одну из этих точек можно не использовать.

Основным достоинством такого выбора точек коллокации является использование квадратурной формулы (3.4) высшей алгебраической точности (т.е. точной при $u(\xi) \in P_{2n}$) для аппроксимации сингулярного интеграла. Кроме того, в данном случае при построении ГСИДУ вида (1.4) нет необходимости отделять сингулярную часть интегрального ядра от регулярной, поскольку их квадратурные веса совпадают.

С другой стороны, поскольку для аппроксимации гиперсингулярного интеграла в (3.10) используется формула меньшей точности (3.8) (она точна при $u(\xi) \in P_{n-1}$; интерполяционный полином (3.5) той же точности используется и для аппроксимации внеинтегральных членов (1.4)), более последовательным и удобным может оказаться подход, когда и для аппроксимации сингулярного интеграла используется формула той же точности (3.6). В таком случае из ГСИДУ (1.4) получим функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left\{-\frac{w(\eta)P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{(\xi_k-\eta)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\left[A\left(\chi(\eta)+\frac{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}+\frac{1}{\xi_k-\eta}\right)+B\right]+CW_k^{hyp}(\eta)+\right.$$
$$\left.+DW_k^{sin}(\eta)+W_k k(\xi_k,\eta)+\frac{R_k^+(\eta)+R_k^-(\eta)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\right\} = p(\eta),\quad -1<\eta\neq\xi_k<1 \tag{3.13}$$

точки коллокации для которого могут быть произвольными в рамках указанного ограничения. Записав выражение (3.13) в наборе точек коллокации $\eta_m \neq \xi_k$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, нетрудно построить полную СЛАУ относительно значений $u(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Более того, точки коллокации в (3.13) можно выбирать совпадающими с узлами квадратурных формул. Используя вычисляемое по правилу Лопиталя значение предела

$$H(\xi_k,\xi_m)\equiv-\lim_{\eta\to\xi_m}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{\xi_k-\eta}\left\{A\left[\chi(\eta)+\frac{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}+\frac{1}{\xi_k-\eta}\right]+B\right\}=$$
$$=\begin{cases}-AP_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_m)/(\xi_k-\xi_m), & m\neq k\\ P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)[A\chi(\xi_k)+B]+AP_n''^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)/2, & m=k\end{cases}$$

и принимая во внимание существование предельных (при $\eta \to \xi_m$) выражений для весов сингулярного (3.7) и гиперсингулярного (3.9) интегралов, получим

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left\{\frac{w(\xi_m)H(\xi_k,\xi_m)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}+CW_k^{hyp}(\xi_m)+DW_k^{sin}(\xi_m)+W_k k(\xi_k,\xi_m)+\right.$$
$$\left.+\frac{R_k^+(\xi_m)+R_k^-(\xi_m)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)}\right\} = p(\xi_m)\ (k, m = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.14}$$

Существенное преимущество последнего подхода состоит в том, что специальные функции (полиномы Якоби и функции второго рода), необходимые для формирования СЛАУ (3.14), вычисляются только в одном наборе точек – в узлах квадратурных формул.

Безусловно, полную СЛАУ относительно значений $u(\xi_k)$ можно сформировать, используя совместно точки коллокации из разных указанных множеств. Как будет показано ниже, в некоторых случаях такой подход позволяет существенно увеличить точность численного решения ГСИДУ (1.4).

Как видно, вычисление коэффициентов перед неизвестными в формируемых описанными выше методами СЛАУ вновь сведено к вычислению полиномов Якоби и соответствующих им функций второго рода, а также их производных (при использовании узлов квадратурных формул в качестве точек коллокации необходимо также вычислять их вторые производные).

Отметим, что основным достоинством данного метода численного решения ГСИДУ (1.4) по сравнению с методом п. 2 является существенное сокращение вычислительных затрат, связанное с отсутствием необходимости ресурсоемкого вычисления $(n + 1)^2$ интегралов (2.5). С другой стороны, данный метод непригоден для использования при наличии комплексной асимптотики у решения, поскольку при $\mathrm{Im}\alpha \neq 0$ или $\mathrm{Im}\beta \neq 0$ узлы (3.3) квадратурных формул оказываются комплексными, и, как следствие, применение этого метода приведет к тому, что неизвестная функция (1.4) будет отыскиваться вне области своего определения $\xi \in [-1, 1]$.

4. Численные примеры и сравнение с аналитическими решениями. Для иллюстрации применения предложенных в *п.* 3 квадратурно-коллокационных методик, рассмотрим ГСИУ, возникающее в двумерной задаче о прямолинейной трещине конечной длины в однородном изотропном упругом теле, и описывающее разрыв смещений $\Delta\nu$ ее поверхностей (см., например, [10]):

$$\int_{-1}^{1}\frac{\Delta\nu(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} = \pi p(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{4.1}$$

Здесь $p(\eta)$ – нормированная (по отношению к упругим постоянным материала и длине трещины) самоуравновешенная нагрузка на поверхностях трещины. Это уравнение имеет единственное решение, которое для любой правой части можно записать в квадратурах (см., например, [12]):

$$\Delta\nu(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}p(t)dt}{t-x}$$

При $p(\eta) = q = \mathrm{const}$ решение (4.1) можно записать в явной замкнутой форме

$$\Delta\nu(\xi) = -q\sqrt{1-\xi^2} \tag{4.2}$$

Поскольку в данном случае $u(\xi) \in P_0$ $(w(\xi) = \sqrt{1-\xi^2})$, изложенные в *п.* 3 квадратурно-коллокационные методики при $n = 1$ дают точное в рамках численных расчетов с обычной (8 значащих цифр) точностью решение ГСИУ (4.1). Отметим, что численные решения ГСИУ (4.1), полученные в [10] с помощью изложенных там же методик, имеют существенно меньшую точность.

Численное решение столь же высокой точности можно построить с помощью методик *п.* 3 при $n = 2$ и для полного ГСИУ

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} + \int_{-1}^{1}M(\eta-\xi)\phi(\xi)d\xi = -\pi, \quad M = \mathrm{const} \tag{4.3}$$

поскольку его аналитическое решение имеет вид [13]

$$\phi(\xi) = 8\sqrt{1-\xi^2}(4+M\xi)/(32+M^2) \tag{4.4}$$

и, как следствие, в данном случае $u(\xi) \in P_1$ $(w(\xi) = \sqrt{1-\xi^2})$.

Метод, изложенный в [13], позволяет свести решение ГСИУ (4.3) к решению СЛАУ относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек:

$$\sum_{k=1}^{n}\phi(\xi_k)\left[\frac{1}{\eta_m-\xi_k} - \frac{1}{\eta_m-\xi_{k-1}} + hM(\eta_m-\xi_k)\right] = -\pi \tag{4.5}$$
$$h = 2/n, \quad \xi_k = -1+hk \ (k = 0, 1, \ldots, n), \quad \eta_m = -1+(m-1/2)h \ (m = 1, 2, \ldots, n)$$

Численное решение (4.3) было построено в соответствии с квадратурно-коллокационной методикой (4.5) при $M = 3$, вычисления здесь и далее проводились с двойной (16 значащих цифр) точностью. Характерной особенностью получаемого на основе (4.5) решения является монотонное увеличение его относительной погрешности при приближении к концам промежутка интегрирования. Последнее, по всей вероятности, связано с неучетом корневой асимптотики решения вблизи концов промежутка интегрирования. Максимальная погрешность решения, построенного по дискретной схеме (4.5), при $n = 100$ превосходит 30% (в наибольшей точке аппроксимации $t = 0.98$). Существенно, что с ростом n максимальная погрешность численного решения не уменьшается, составляя, например 32.41% при $n = 500$ ($t = 0.996$) и 32.67% при $n = 1000$ ($t = 0.998$). Эти обстоятельства существенно ограничивают возможности применения метода [13] в задачах механики разрушения, в которых необходимо определять главные члены асимптотического разложения решения вблизи концов промежутка интегрирования.

Для иллюстрации метода, предложенного в *п.* 2, рассмотрим СИДУ, описывающее разрыв смещений в двумерной задаче о трещине единичной полудлины на прямолинейной границе раздела двух упругих сред [1]:

$$-\gamma\phi'(\eta) + \frac{1}{i\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi'(\xi)d\xi}{\xi-\eta} = p(\eta), \quad -1 < \eta < 1$$
$$\gamma = \frac{\mu_2 + \kappa_2\mu_1 - \mu_1 - \kappa_1\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2\mu_1 + \mu_1 + \kappa_1\mu_2}, \quad \phi'(x) = \frac{d}{dx}[u_1 - u_2 + i(s_1 - s_2)], \quad i^2 = -1 \tag{4.6}$$

Здесь $\kappa_j = 3{-}4\nu_j$ при плоской деформации и $\kappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ при плоском напряженном состоянии, ν_j – коэффициент Пуассона, μ_j – модуль сдвига ($j = 1, 2$), u_j и s_j – нормальная и касательная компоненты вектора смещений верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) поверхностей трещины, $p(\eta)$ – нагрузка на этих поверхностях.

Уравнение (4.6) следует дополнить условием [1]:

$$\int_{-1}^{1}\phi'(\xi)d\xi = 0 \tag{4.7}$$

которое обеспечивает единственность решения и выражает равенство нулю разрывов смещений в вершинах трещины:

$$\phi(-1) = \phi(+1) = 0 \tag{4.8}$$

При постоянной правой части

$$p(\eta) \equiv -i\frac{1+\kappa_2}{\mu_2}\lambda\sigma, \quad \sigma = \text{const}, \quad \lambda = \frac{(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)(\mu_1 + \kappa_1\mu_2)}{(1+\kappa_2)\mu_1(\mu_2 + \kappa_2\mu_1 + \mu_1 + \kappa_1\mu_2)}$$

решение (4.6) в терминах производной от разрыва смещений можно представить в явной замкнутой форме [1]:

$$\phi'(\xi) = \frac{2\lambda\sigma(1+\kappa_2)}{\mu_2\sqrt{1-\gamma^2}}(1-\xi)^{\rho}(1+\xi)^{\delta}P_1^{(\rho,\delta)}(\xi)$$
$$\rho = -\frac{1}{2} - i\omega, \quad \delta = -\frac{1}{2} + i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \tag{4.9}$$

Интегрируя по частям в (4.6) с учетом равенств (4.8), получим ГСИДУ

$$-\gamma\phi'(\eta) + \frac{1}{i\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} = p(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{4.10}$$

которое по форме совпадает с (1.4) при $A = -\gamma$, $C = -i/\pi$, $B = D = k(\xi, \eta) = 0$. Интегрируя (4.9) с учетом (4.8), получим аналитическое решение ГСИДУ (4.10):

$$\phi(\xi) = -\frac{\lambda\sigma(1+\kappa_2)}{\mu_2\sqrt{1-\gamma^2}}(1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta, \quad \alpha = \frac{1}{2}-i\omega, \quad \beta = \frac{1}{2}+i\omega \tag{4.11}$$

Численное решение ГСИДУ (4.10) было построено на основе изложенного в *п.* 2 метода для значений параметров $\sigma = -1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_1/\mu_2 = 10$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$ (плоская деформация) при $n = 0$ и $\eta_0 = 0$ (см. (2.1) и (2.6)). Сравнение с точным решением (4.11) показало, что во всем промежутке $\xi \in (-1, 1)$ в численном решении верны по крайней мере пятнадцать значащих цифр. Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях параметров. Таким образом, поскольку двойная точность оперирует с шестнадцатью значащими цифрами, предлагаемый численный метод позволяет достичь точности решения ГСИДУ (4.10), близкой к максимально возможной в рамках численных расчетов.

Для выявления особенностей численного решения СИДУ (1.1) с обобщенными ядрами типа Коши рассмотрим СИДУ Бюкнера [8]:

$$\oint_{-1}^{1}\frac{\Delta\nu'(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \int_{-1}^{1}\frac{\Delta\nu'(\xi)d\xi}{\xi+\eta+2} = \pi f(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{4.12}$$

которое возникает при решении антиплоской задачи теории упругости о прямолинейной трещине конечной длины, выходящей под прямым углом на границу полупространства [14]. Здесь $\Delta\nu$ – разрыв смещений поверхностей трещины, $f(\eta)$ – нормированная сдвиговая нагрузка. Как видно, ядро $K(\xi, \eta) = 1/(\xi + \eta + 2)$ имеет неподвижную особенность на левом конце промежутка интегрирования (краевая вершина трещины), поскольку ведет себя как ρ^{-1} ($\rho \to 0$) при $\xi = \eta \to -1$.

Уравнение (4.12) имеет единственное решение [8], которое при постоянной правой части ($f(\eta) = q = \text{const}$) можно записать в терминах производной от разрыва смещений [9] в форме

$$\Delta\nu'(\xi) = q\frac{1+\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{3+\xi}} \tag{4.13}$$

Интегрируя по частям в (4.12) с учетом $\Delta\nu(+1) = 0$ (разрыв смещений равен нулю во внутренней вершине трещины), получим ГСИУ

$$\oint_{-1}^{1}\frac{\Delta\nu(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)^2} + \int_{-1}^{1}\frac{\Delta\nu(\xi)d\xi}{(\xi+\eta+2)^2} = \pi f(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{4.14}$$

которое по форме совпадает с (1.4) при $C = 1$, $k(\xi, \eta) = 1/(\xi + \eta + 2)^2$, $A = B = D = 0$. Отметим, что возникающие в данном случае внеинтегральные члены, связанные с интегрированием по частям ($\Delta\nu(-1) = \text{const} \neq 0$ – разрыв смещений в краевой вершине трещины отличен от нуля), взаимоуничтожаются.

Таблица 1

ξ_k, $k = \overline{1,10}$	$\eta_m = \xi_m$, $m = \overline{1,10}$	Численное решение	Аналитическое решение	(b), %
0.9576	0.9576	−0.3902973	−0.4095244	4.6950
0.8341	0.8341	−0.7585005	−0.7975734	4.8990
0.6399	0.6399	−1.0846327	−1.1449168	5.2654
0.3914	0.3914	−1.3529603	−1.4366326	5.8242
0.1099	0.1099	−1.5532147	−1.6637997	6.6465
−0.1810	−0.1810	−1.6820156	−1.8246202	7.8156
−0.4565	−0.4565	−1.7415167	−1.9247239	9.5186
−0.6932	−0.6932	−1.7393634	−1.9763230	11.9899
−0.8711	−0.8711	−1.6744231	−1.9958390	16.1043
−0.9751	−0.9751	−1.5229933	−1.9998448	23.8444

Интегрируя (4.13) с учетом $\Delta\nu(+1) = 0$, получим аналитическое решение ГСИУ (4.14) при $f(\eta) = q = \text{const}$:

$$\Delta\nu(\xi) = -q\sqrt{1-\xi}\sqrt{3+\xi} \qquad (4.15)$$

Следовательно, в данном случае $w(\xi) = \sqrt{1-\xi}$, а $u(\xi)$ не является полиномом.

Результаты сравнения численного решения (4.14), построенного при $n = 10$ в соответствии с квадратурно-коллокационной методикой (3.14), с аналитическим решением (4.15) (при $q = 1$) представлены в табл. 1.

Как видно, относительная погрешность численного решения (столбец "b" табл. 1) достаточно велика, особенно у левого конца промежутка интегрирования, причем погрешность эту не удается сократить с помощью увеличения числа n. Причина столь значительной и не уменьшающейся с ростом n погрешности состоит в следующем. Несмотря на то, что для аппроксимации второго интеграла (4.14) используется квадратурная формула высшей алгебраической точности (3.1), эта аппроксимация оказывается недостаточно точной по причине сильного возрастания подынтегральной функции при значениях η, близких к левому концу промежутка интегрирования $\xi \in (-1, 1)$: дифференцирование ядра (4.12) $K(\xi, \eta) = 1/(\xi + \eta + 2)$ усилило исходную неподвижную особенность, и $k(\xi, \eta) = 1/(\xi + \eta + 2)^2$ ведет себя уже как ρ^{-2} ($\rho \to 0$) при $\xi = \eta \to -1$. Увеличение порядка аппроксимации (числа n) влечет за собой приближение минимальных точек коллокации, которые в данной методике совпадают с узлами квадратурных формул, к левому концу промежутка интегрирования. Последнее, в свою очередь, вновь ухудшает аппроксимацию интеграла в этих точках коллокации.

Поскольку узлы квадратурных формул (точки аппроксимации подынтегральных функций) однозначно определяются асимптотикой решения, увеличения точности можно добиться только варьированием положения точек коллокации, в частности, удалением минимальной точки коллокации от левого конца промежутка интегрирования. Коллокационные методики п. 3, альтернативные (3.14), предоставляют такую возможность. Действительно, как видно из табл. 2, такой подход позволяет на порядок сократить максимальную погрешность вблизи левого конца промежутка интегрирования и на два порядка сократить погрешность вблизи его правого конца (столбец "b" табл. 2).

Результаты численного решения ГСИУ (4.14), представленные в табл. 2, получены на основе замены точки коллокации, примыкающей к левому концу промежутка интегрирования, на одну из точек множества (3.11). Эта точка – минимальный по модулю

Таблица 2

ξ_k, $k = \overline{1,10}$	η_m, $m = \overline{1,10}$	Численное решение	Аналитическое решение	(b), %
0.9576	0.9576	−0.4092547	−0.4095244	0.0659
0.8341	0.8341	−0.7970250	−0.7975734	0.0687
0.6399	0.6399	−1.1440710	−1.1449168	0.0739
0.3914	0.3914	−1.4354581	−1.4366326	0.0818
0.1099	0.1099	−1.6622478	−1.6637997	0.0933
−0.1810	<u>−0.0360</u>	−1.8226161	−1.8246202	0.1098
−0.4565	−0.1810	−1.9221494	−1.9247239	0.1338
−0.6932	−0.4565	−1.9729628	−1.9763230	0.1700
−0.8711	−0.6932	−1.9912072	−1.9958390	0.2321
−0.9751	−0.8711	−1.9936412	−1.9998448	0.3102

нуль функции второго рода – подчеркнута в табл. 2. Соответственно, одно из уравнений линейной алгебраической системы, которая была построена в данном случае, было сформировано на основе (3.12).

Отметим, что очень близкие результаты дает и замена минимальной точки коллокации на точку $\eta = (\xi_5 + \xi_6)/2 = -0.0355$. В этом случае нет необходимости вычислять нуль функции второго рода, а соответствующее линейное алгебраическое уравнение формируется на основе (3.13).

Еще более значительного сокращения погрешности на всем отрезке $\xi \in (-1, 1)$ можно добиться, используя аналогичным образом две минимальные по модулю точки из множества (3.11). Об этом свидетельствуют данные табл. 3, в которой эти точки также подчеркнуты. Как видно, в данном случае во всех расчетных точках относительная погрешность составляет тысячные доли процента, что можно полагать вполне удовлетворительным результатом.

Дальнейшее удаление точек коллокации от левого конца промежутка интегрирования может позволить еще более увеличить точность численного решения (так, например, при использовании шести точек из множества (3.11) максимальная погрешность составляет $5 \cdot 10^{-5}$%). В то же время такое удаление приводит к сильному сближению точек коллокации (особенно при больших n), что может привести к ухудшению обусловленности формируемой СЛАУ. Как показывают численные эксперименты, оптимальным вплоть до $n = 150$ является использование двух, а при больших значениях n – одной точки из множества (3.11).

Таким образом, необходимым атрибутом решения СИДУ вида (1.1) с обобщенными ядрами типа Коши следует признать развитый смешанный коллокационный подход.

Развитые методы и подходы позволяют строить прямое численное решение широкого класса сложных интегродифференциальных уравнений, возникающих во многих прикладных задачах механики. Существенным элементом этого класса являются гиперсингулярные интегродифференциальные уравнения, которые применительно к смешанным задачам теории упругости и контактным задачам механики деформируемого твердого тела формулируются в терминах естественных для этих задач величин – напряжениях и перемещениях. Важной составляющей проведенного вычислительного анализа является рассмотрение интегральных ядер, имеющих неподвижные особенности на концах промежутка интегрирования. Такого рода особенности имеют место, в частности, в краевых задачах механики деформирования кусочно-неоднородных тел, а также в случае негладких контуров реализации граничных условий и в точках смены

Таблица 3

ξ_k, $k=\overline{1,10}$	η_m, $m=\overline{1,10}$	Численное решение	Аналитическое решение	(b), %
0.9576	0.9576	–0.4095198	–0.4095244	0.0011
0.8341	0.8341	–0.7975640	–0.7975734	0.0012
0.6399	0.6399	–1.1449023	–1.1449168	0.0013
0.3914	0.3914	–1.4366125	–1.4366326	0.0014
0.1099	0.2533	–1.6637731	–1.6637997	0.0016
–0.1810	0.1099	–1.8245859	–1.8246202	0.0019
–0.4565	–0.0360	–1.9246797	–1.9247239	0.0023
–0.6932	–0.1810	–1.9762648	–1.9763230	0.0029
–0.8711	–0.4565	–1.9957599	–1.9958390	0.0040
–0.9751	–0.6932	–1.9997439	–1.9998448	0.0050

последних. Наличие особых точек на концах промежутка интегрирования приводит к изменению асимптотики решения интегродифференциального уравнения, которая оказывается отличной от классической корневой. Явный учет асимптотики решения при численном его построении на основе развитых методов и подходов дает возможность корректно определять главные члены асимптотического разложения решения, что особенно важно в задачах механики разрушения и теории концентрации напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (гранты МК-878.2003.01 и НШ-1849.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. P. 368–425.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* The V-notched elastic half-plane problems // Acta Mech. 1979. V. 32. № 1–3. P. 125–140.
4. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
5. *Каландия А.И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
6. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Асимптотический анализ решения в окрестности точки излома трещины на границе раздела двух сред // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 865–870.
7. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР. 1979. Т. 60. 135 с.
8. *Bueckner H.F.* On a class of singular integral equation // J. Math. Analys. and Appl. 1966. V. 14. № 3. P. 392–426.
9. *Андреев А.В.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 126–146.
10. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб: Наука, 1999. 384 с.
11. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 353 с.
12. *Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M.* Hypersingular integral equations and their applications. Boca Raton: Chapman and Hall; London CRC Press, 2004. 396 p.

13. *Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A.* On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mech. 2003. V. 162. № 1–4. P. 99–110.
14. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
15. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Равновесие криволинейных разрезов с учетом образования областей налегания, скольжения и сцепления берегов трещины // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 137–148.
16. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Расчет предельного равновесия внутренних и краевых трещин со взаимодействующими поверхностями в упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 96–112.
17. *Андреев А.В.* Расчет предельного равновесия краевых криволинейных трещин в упругой полуплоскости с учетом асимптотики напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 82–96.
18. *Исаханов Р.С.* Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 2. С. 264–267.
19. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995. 519 с.
20. *Андреев А.В.* Метод численного решения полных сингулярных интегральных уравнений с комплексными особенностями степенного типа // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 99–114.
21. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
22. *Chawla M.M., Ramacrishnan T.R.* Modified Gauss – Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
23. *Tsamasphyros G., Dimou G.* Gauss quadrature rules for finite part integrals // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 1990. V. 30. № 1. P. 13–26.
24. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
25. *Monegato G.* On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives // Numer. Math. 1987. V. 50. № 3. P. 273–281.
26. *Orsi A.P.* A note on spline approximation for Hadamard finite-part integrals // J. Comput. and Appl. Math. 1997. V. 79. № 1. P. 67–73.
27. *Diethelm K.* Error bounds for spline-based quadrature methods for strongly singular integrals // J. Comput. and Appl. Math. 1998. V. 89. № 2. P. 257–261.

Москва

Поступила в редакцию
1.11.2004