

**ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ:  
СВОЙСТВА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ ПАМЯТИ**

Исследуется предложенное ранее нелинейное определяющее соотношение между напряжением и деформацией для описания одномерных изотермических реологических процессов в случае монотонного изменения деформации (в частности, вязкоупругости, ползучести, релаксации, пластичности и сверхпластичности). Оно содержит интегральные операторы по времени от деформации и скорости деформации, представляющие собой нормы пространства Лебега и Соболева, снабженные специальными весовыми множителями, одну материальную функцию и девять материальных параметров, определяемых по результатам испытаний материала на релаксацию, ползучесть, длительную прочность и деформирование с постоянной скоростью.

Аналитически построено обращение определяющего соотношения, изучены свойства обратного оператора. Выведено уравнение кривых ползучести, соответствующих произвольному закону нагружения на стадии перехода от нулевого напряжения к заданному постоянному уровню. Исследована их зависимость от материальных параметров и характеристик стадии нагружения, найдены ограничения на материальные параметры, обеспечивающие независимость асимптотического поведения кривых ползучести при больших временах от длительности стадии нагружения и конкретного закона изменения напряжения на ней, т.е. условия затухания памяти модели при ползучести. Тем самым показано, что предложенное определяющее соотношение позволяет адекватно моделировать ползучесть и эффект затухания памяти материалов.

**1. Введение.** Данная работа – продолжение исследования предложенного в работах [1, 2] нелинейного определяющего соотношения (ОС) между напряжением и деформацией для описания одномерных изотермических реологических процессов в случае монотонного изменения деформации. Она не предполагается малой и потому используется логарифмическая деформация  $\varepsilon(t) := \ln l(t)/l(0)$ . В дальнейшем будем считать  $\varepsilon(t)$  убывающей кусочно-непрерывно дифференцируемой положительной функцией безразмерного параметра времени  $t > 0$ . Соответствующее (безразмерное) напряжение  $\sigma(t)$  строится в виде композиции двух независимых нелинейных операторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{F}$ , действующих по схеме  $\varepsilon(t) \mapsto \gamma(t) \mapsto \sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = F(\gamma(t)), \quad \gamma(t) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad \mathbf{R}\varepsilon := \varepsilon(t)^{\alpha} t^{\beta} \mathbf{S}_{q, \chi, \omega_1} [\varepsilon, \dot{\varepsilon}]^{\xi} \mathbf{L}_{p, \omega_0} [\varepsilon]^{-\eta}, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$\alpha, p, q > 0, \quad \xi, \eta \geq 0, \quad \beta, \chi, \omega_0, \omega_1 \geq 0 \quad (1.2)$$

материальные параметры (МП), способ определения которых по экспериментальным данным предложен в [1, 2];  $F(x), x \geq 0$  – материальная функция (МФ), требования к кото-

рой и способ идентификации будут указаны в п. 4. Реологический оператор  $\mathbf{R}$  отображает историю деформации  $\varepsilon(t)$  в неотрицательную функцию  $\gamma(t)$ , которую будем называть квазинпряжением, поскольку текущее значение  $\gamma(t)$  связано с  $\sigma(t)$  функцией  $F$ . В определении  $\mathbf{R}$  входят интегральные операторы  $L_{p, \omega_0}$  и  $S_{q, \chi, \omega_1}$ , отображающие историю деформации  $\varepsilon(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , в следующие функции переменной  $t > 0$ :

$$L_{p, \omega_0}[\varepsilon] := \left( \int_0^t |\varepsilon(\tau) \tau^{\omega_0}|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad S_{q, \chi, \omega_1}[\varepsilon, \dot{\varepsilon}] := \left( \int_0^t \tau^{(\omega_1-1)q} (\chi |\varepsilon(\tau)|^q + |\tau \dot{\varepsilon}(\tau)|^q) d\tau \right)^{1/q} \quad (1.3)$$

Они задают семейства снабженных специальными весовыми множителями норм (квазинорм при  $p, q \in (0; 1)$ ) пространств Лебега  $L_p[0; t]$  и Соболева  $W_q^1[0; t]$ , зависящих от параметра  $t > 0$ . Параметр  $\chi \geq 0$  позволяет регулировать относительную величину вкладов  $\varepsilon(\tau)$  и  $\dot{\varepsilon}(\tau)$  в значение оператора  $S_{q, \chi, \omega_1}[\varepsilon, \dot{\varepsilon}]$ , причины введения множителей  $\tau, \tau^{\omega_1}$  и  $\tau^{\omega_0}$  и вытекающие из этого возможности, указаны в работах [1–3] и пп. 2, 7–10 этой статьи. В них показано, что от  $\omega_0$  и  $\beta$  существенно зависят все основные математические и физические свойства модели. В частности, они позволяют регулировать показатели асимптотики функций  $\gamma(t)$  при  $t \rightarrow +0$  и  $t \rightarrow \infty$  и моделировать эффект затухания памяти материала, т.е. обеспечить независимость асимптотического поведения теоретических кривых релаксации и ползучести при  $t \rightarrow \infty$  от конкретного закона изменения деформации (или напряжения) в стадии перехода от нулевого до заданного постоянного значения на любом конечном интервале времени. Такое определение затухания памяти (модели или материала) – более слабое требование, чем принятые в монографиях [4, 5], но зато его выполнение может быть проверено в испытаниях материала.

ОС (1.1) является обобщением предложенного в работе [6] соотношения

$$\sigma(t) = F(\gamma(t)), \quad \gamma(t) = A \varepsilon^\alpha \left( t^{-\beta} \int_0^t |\varepsilon(\tau)|^p d\tau \right)^{-\eta/p}, \quad \eta > 0, \quad \alpha, p \geq 1, \quad \beta \in [0; 1] \quad (1.4)$$

которое было получено из модели Фицджералда [7] путем введения МФ  $F$  и множителя  $t^{-\beta}$ . В статьях [6, 7] приведены сравнения результатов расчетов по этим моделям-прототипам с данными экспериментов, показавшие их применимость к описанию некоторых аспектов поведения таких материалов, как твердое топливо и асфальтобетон. Это мотивирует систематическое изучение их обобщения (1.1).

Цель введения в ОС (1.1) оператора  $S_{q, \chi, \omega_1}$ , явно учитывающего скорость деформации (СД), – распространение ОС на материалы, обладающие повышенной чувствительностью к скорости деформирования, в частности, углеродные и керамические материалы при высоких температурах. ОС (1.1) представляется перспективным для описания поведения металлов и сплавов в состоянии сверхпластичности. Сверхпластичность – способность материалов к очень большой пластической деформации в условиях сильной зависимости напряжения течения от СД, которая, как правило, наблюдается у металлов и сплавов с мелкозернистой структурой при достаточно высоких температурах [8]. Некоторые авторы рассматривают сверхпластичность как особый случай ползучести [9]. Самое популярное уравнение состояния сверхпластичных материалов имеет вид  $\sigma(t) = K \dot{\varepsilon}(t)^m \varepsilon(t)^n$ , где  $K, m > 0, n \geq 0$  – материальные постоянные, причем  $m/n \gg 1 \gg n$  (чаще всего полагают  $n = 0$ ). ОС (1.1) дает близкую зависимость в случае  $\chi \ll 1, \xi/(\alpha - \eta) \gg 1, q > 1$  и  $F(x) = Hx^M, H, M > 0$ . Кроме того, оно позволяет учесть зависимость напряжения

от истории деформирования и зависимость параметра скоростной чувствительности  $m$  от СД  $\dot{\epsilon}$ , регистрируемую в испытаниях сверхпластичных материалов.

Наличие девяти материальных параметров и МФ  $F(x)$  в ОС (1.1) предоставляет, как показано в [1–3], более широкие возможности по управлению свойствами модели и по ее настройке за счет выбора значений МП с целью адекватного и всестороннего описания поведения реономных материалов. ОС (1.1) позволяет (в случае монотонных процессов деформирования  $\epsilon(t)$ ) описывать не только отдельные реологические эффекты, но и целый их комплекс: ползучесть, зависимость скорости ползучести от уровня напряжения, длительную прочность, затухание памяти материала, релаксацию, зависимость напряжения от деформации при постоянной СД, зависимость “модуля упругости” при малых деформациях от СД. Оказалось, что, несмотря на сложность структуры ОС (1.1), можно довольно далеко продвинуться в его исследовании аналитическими средствами, не прибегая к замене строгих доказательств результатами численных экспериментов. В статьях [1–3] при любых допустимых значениях МП (см. (1.2)) выведены уравнения теоретических кривых релаксации, кривых ползучести (КП) для мгновенного нагружения и кривых длительной прочности, аналитически исследована зависимость их свойств от МП и МФ  $F$ . Из общих качественных механических свойств материалов, наблюдаемых в опытах (возрастание напряжения с ростом деформации и СД, возрастание деформации при ползучести с течением времени и с повышением напряжения, убывание кривой длительной прочности, убывание напряжения при релаксации, затухание памяти материала и т.п.) выведены необходимые и достаточные (для обеспечения этих свойств у теоретических кривых) дополнительные ограничения на МП:

$$d > 0, \quad m_0 \leq 0, \quad d + m_0 \geq 0, \quad n_1 < 0 \quad (1.5)$$

где  $d, m_0, n_1$  – ключевые параметры модели; входящие в уравнения теоретических кривых деформирования, релаксации, ползучести и длительной прочности:

$$d := \alpha + \xi - \eta, \quad m_0 := \beta + \xi(\omega_1 - 1) - \eta\omega_0 + \xi q^{-1} - \eta p^{-1}, \quad n_1 := 1 - \omega_1 - q^{-1} \quad (1.6)$$

Примечательно, что каждое из ограничений (1.5) возникает при рассмотрении нескольких различных аспектов поведения материала, что свидетельствует о высокой степени внутренней согласованности модели. Например, ограничения  $n_1 < 0$  и  $m_0 \leq 0$  обеспечивают убывание напряжения с течением времени при постоянной деформации и затухание памяти при релаксации, т.е. независимость предельного напряжения  $\sigma_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$  от длительности и закона начальной стадии деформирования [1]. В п. 4–6 будет показано, что первые три ограничения (1.5) совместно с требованием возрастания МФ  $F(x)$  необходимы и достаточны, чтобы скорость ползучести возрастала с увеличением напряжения, а функция  $\sigma = \sigma(a, \epsilon)$ , задающая теоретические диаграммы деформирования с постоянной скоростью  $a$ , возрастала по обоим переменным. В п. 7 будет доказано, что условие  $d > 0$  является критерием обратимости оператора  $\mathbf{R}$  из (1.1) в случае  $\xi = 0$ .

Цель данной статьи – аналитическое обращение ОС (1.1), изучение свойств обратного оператора, вывод и анализ уравнений кривых ползучести, соответствующих произвольному закону нагружения на стадии перехода от нулевого значения напряжения к заданному постоянному уровню, исследование зависимости свойств КП от МП и доказательство независимости асимптотик КП при  $t \rightarrow \infty$  от длительности стадии нагружения и конкретного закона изменения напряжения на ней (вывод условий затухания памяти при ползучести). Это еще один шаг в исследовании математических следствий ОС (1.1), необходимом для того, чтобы указать те реологические эффекты, которые оно может (или не может) адекватно описывать; обнаружить возможную зависимость между этими эффектами (см. пп. 4–6); четко сформулировать характерные свойства материалов,

для моделирования поведения которых ОС (1.1) пригодно; указать контрольные эксперименты для проверки этих свойств и способы идентификации материальных параметров и функции по данным испытаний; наметить возможные усовершенствования и обобщения ОС (см. например, [14]).

В статье используются следующие сокращения: ОС – определяющее соотношение (1.1); МФ – материальная функция ОС; МП – материальные параметры (постоянные) ОС; КП – кривая ползучести (ТКП – теоретическая, ЭКП – экспериментальная); ДД – диаграмма деформирования  $\sigma - \epsilon$  при растяжении с постоянной скоростью (ТДД, ЭДД); СД – скорость деформации; УЛИ – условие линейной инвариантности (2.7); ДСА-функции – функции с дифференцируемой степенной асимптотикой при  $t \rightarrow +0$  (см. п. 2).

Термин “возрастает” в дальнейшем означает нестрогое возрастание, т.е. неубывание.

**2. Действие реологического оператора  $R$  на степенные функции и функции с дифференцируемой степенной асимптотикой при  $t \rightarrow +0$ .** При всех допустимых значениях параметров (1.2) оператор  $R$  из ОС (1.1) определен на множестве функций  $D_R := D_R(\omega_0, \omega_1)$ , для которых существуют интегралы Лебега (1.3), входящие в ОС (1.1). Так как механический смысл  $\epsilon(t)$  – зависимость деформации от времени, то наиболее интересны свойства оператора  $R$  на множестве  $D_0$  кусочно-непрерывно дифференцируемых при  $t \geq 0$  функций  $\epsilon(t)$ , таких, что  $\epsilon(0) = 0$ , а их образы  $\gamma(t) = R\epsilon$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +0$  (иначе  $\sigma(0) \neq 0$ ). С ростом  $\omega_1$  множества  $D_0$  и  $D_R$  расширяются, увеличение  $\omega_0$  вызывает сужение множества  $D_0$ , а увеличение  $\beta$  – расширение  $D_0$  ( $D_R$  не зависит от  $\beta$ ).

Очевидно, что  $R$  – положительно однородный оператор степени  $d: \alpha + \xi - \eta$  на  $D_R$ , т.е. для любого  $\lambda > 0$  и любой функции  $\epsilon(t) \in D_R$  справедливо тождество  $R(\lambda\epsilon) = \lambda^d R\epsilon$  при всех  $t > 0$ . Так как при пропорциональном увеличении деформации в каждый момент времени напряжение возрастает, то множитель  $\lambda^d$  должен строго возрастать по  $\lambda$ . Отсюда вытекает необходимое ограничение на МП:  $d > 0$ .

Степенные функции

$$\epsilon(t) = at^n, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{R} \quad (2.1)$$

принадлежат области определения  $D_R$  оператора  $R$  только при  $n > n_*$ , где  $n_* = \max\{n_0, n_1\}$  в случае  $\xi \neq 0$  и  $n_* = n_0$  при  $\xi = 0$ ;  $n_0 := -\omega_0 - p^{-1}$ ,  $n_1 := 1 - \omega_1 - q^{-1}$ . В дальнейшем будет неоднократно использовано следующее свойство ОС (1.1):

*Лемма 1.* Оператор  $R$  переводит степенные функции (2.1) с  $n > n_*$  в степенные функции

$$\gamma(t) = Q_n a^d t^m, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$m = dn + m_0, \quad m_0 := \beta + \xi(\omega_1 - 1) - \eta\omega_0 + \xi q^{-1} - \eta p^{-1} = \beta - \xi n_1 + \eta n_0 \quad (2.3)$$

$$Q_n := (\chi + |n|^q)^{\xi/q} (p(n - n_0))^{n/p} (q(n - n_1))^{-\xi/q} \geq 0 \quad (2.4)$$

При  $d > 0$  функция  $m(n) = dn + m_0$  возрастает. Если  $\xi = 0$  или  $\chi > 0$ , то  $Q_n > 0$  и из леммы 1 следует, что оператор  $R$  биективно отображает множество степенных процессов  $\epsilon(t) = at^n$ ,  $n > n_*$ , на множество степенных процессов  $\gamma(t)$  вида (2.2) с  $m > m_*$ , где  $m_* = dn_* + m_0$ . В этом случае легко построить обратное отображение к ограничению оператора  $R$  на множестве таких степенных процессов: если задана функция  $\gamma(t) = bt^m$ ,  $m > m_*$ ,  $b > 0$ , то из (2.3) можно выразить  $n = (m - m_0)d^{-1}$  (если  $m > m_*$ , то будет  $n > n_*$ ), вычислить  $Q_n$  по (2.4) ( $n > n_* > 0$  влечет  $Q_n > 0$ ) и найти  $a$  из условия  $Q_n a^d = b$ .

Итак, оператор  $R$  переводит множество степенных функций вида (2.1) в себя. Это свойство сохраняется и для гораздо более широкого класса функций – функций с диф-

ференцируемой степенной асимптотикой (ДСА-функций). Будем так называть функции, не только обладающие асимптотикой

$$\varepsilon(t) \sim at^n \text{ при } t \rightarrow +0, \quad n > n_*, \quad a > 0 \quad (2.5)$$

но и имеющие производную в правой окрестности точки  $t = 0$  с асимптотикой  $\dot{\varepsilon}(t) \sim an^{n-1}$ . Это условие надо оговаривать, так как, вообще говоря, асимптотические равенства нельзя дифференцировать.

**Лемма 2.** Оператор  $\mathbf{R}$  из (1.1) переводит функции с дифференцируемой степенной асимптотикой (2.5) в функции с дифференцируемой степенной асимптотикой

$$\gamma(t) \sim Q_n a^d t^m \text{ при } t \rightarrow +0 \quad (2.6)$$

где  $m$  и  $Q_n > 0$  по-прежнему вычисляются по формулам (2.3) и (2.4).

В силу этого свойства и своей широты класс ДСА-функций технически удобен для работы с ОС (1.1), в частности, для контроля непрерывности и гладкости квазинапряжения  $\gamma(t)$  и напряжения  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$  в точке  $t = 0$  и для обеспечения конечности модуля упругости модели при малых деформациях (см. п. 4). В частности, из леммы 2 при  $m > 0$  следует, что оператор  $\mathbf{R}$  переводит ДСА-функции в функции  $\gamma(t)$ , обладающие свойством  $\gamma(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +0$ , только если выполнено условие  $dn + m_0 \geq 0$ , т.е.  $n \geq n_c$ , где  $n_c := -m_0/d$  (в п. 5 будет показано, что  $n_c$  – показатель кривой ползучести модели (5.1)).

Наличие при  $t \rightarrow +0$  линейной асимптотики  $\varepsilon(t) \sim at$ ,  $a \neq 0$ , равносильно тому, что  $\varepsilon(+0) = 0$  и существует ненулевая правая производная  $\dot{\varepsilon}(+0) = a$ . Дифференцируемость линейной асимптотики (ДЛА) равносильна тому, что  $\varepsilon(+0) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(+0) \neq 0$  и  $\dot{\varepsilon}(t)$  непрерывна справа при  $t = 0$ . Поэтому из леммы 2 (при  $n = 1$  и  $m \geq 1$ ) вытекает

**Лемма 3.** Оператор  $\mathbf{R}$  переводит любую ДЛА-функцию  $\varepsilon(t)$  в дифференцируемую справа при  $t = 0$  функцию  $\gamma(t)$  с начальным значением  $\gamma(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $d + m_0 \geq 1$ ; при этом дополнительно  $\dot{\gamma}(+0) \neq 0$  (т.е.  $m(1) = 1$ ) лишь в случае

$$d + m_0 = 1 \quad (2.7)$$

Из лемм 1 и 2 следует, что ограничение (2.7) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор  $\mathbf{R}$  переводил линейные функции  $\varepsilon(t) = at$  в линейные функции  $\gamma(t)$  ((2.2) с  $m = 1$ ), а ДЛА-функции – в ДЛА-функции. В первом случае отношение квазинапряжения  $\gamma(t)$  к деформации  $\varepsilon(t)$  не зависит от  $t$ :  $\gamma(t) = \bar{E}(a)\varepsilon(t)$ , где

$$\bar{E}(a) := Q_1 a^{d-1} = a^{d-1} (\chi + 1)^{\xi/q} (p(1 - n_0))^{n/p} (q(1 - n_1))^{-\xi/q} \quad (2.8)$$

Для ДЛА-функций  $\gamma(t) \sim \bar{E}\varepsilon(t)$  при  $t \rightarrow +0$ .

Ограничение (2.7) будем называть условием линейной инвариантности (УЛИ). Оно не является безусловно необходимым, но его целесообразно наложить на параметры модели по нескольким причинам. Во-первых, УЛИ служит регулятором асимптотики  $\gamma(t)$  и  $\sigma(t)$  при  $t \rightarrow +0$ , во-вторых, оно упрощает уравнение теоретической диаграммы деформирования (ГДД) и процедуру идентификации  $F(x)$  (см. пп. 3; 4), а в-третьих, УЛИ облегчает исследование теоретической кривой ползучести, так как значительно упрощает зависимость ее коэффициентов от материальных параметров модели (см. п. 5). Наконец, в п. 8 будет установлено, что (2.7) играет еще и роль своеобразного условия баланса свойств оператора  $\mathbf{R}$  и ему обратного по отношению к асимптотическому поведению деформации  $\varepsilon(t)$  и соответствующего квазинапряжения  $\gamma(t)$  при  $t \rightarrow +0$ .

Отметим, что в силу леммы 1 оператор  $\mathbf{R}$  сохраняет не только линейность ( $n = 1$ ), но и любую степень  $n > n_*$  тогда и только тогда, когда, помимо (2.7), выполняется еще и

условие  $m_0 = 0$  (т.е.  $d = 1$ ). Анализ показывает, что последнее ограничение слишком жесткое: модели с  $m_0 = 0$  обладают весьма специфическими (по сравнению с общим случаем  $m_0 < 0$ ) свойствами, чтобы можно было ограничиться только ими.

**3. Теоретическая диаграмма деформирования с постоянной скоростью и УЛИ.** Чтобы вывести уравнение ТДД  $\varepsilon - \sigma$  нужно подставить деформацию  $\varepsilon(t) = at$ ,  $a > 0$ , в определяющее соотношение (1.1), вычислить отклик  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$  и исключить из него время  $t = \varepsilon/a$ . Тогда по (2.2)  $\gamma(t) = Q_1 a^d t^{d+m_0}$ , и получаем

$$\sigma(\varepsilon) = F(Q_1 a^{-m_0} \varepsilon^{d+m_0}), \quad \varepsilon \geq 0, \quad a > 0 \quad (3.1)$$

Только при  $m_0 = 0$  ТДД (3.1) не зависит от скорости деформирования  $a$ .

Для упрощения ТДД и процедуры идентификации МФ  $F(x)$  можно использовать УЛИ (2.7). В этом случае  $\gamma(t) = \bar{E}(a)\varepsilon(t)$  (см. (2.8)), и ТДД задается уравнением

$$\sigma(\varepsilon) = F(\bar{E}(a)\varepsilon) \quad (3.2)$$

УЛИ распрямляет (делает линейной) зависимость  $\gamma(\varepsilon)$  и придает ТДД форму графика материальной функции  $F(x)$ , подвергнутого сжатию вдоль оси  $x$  с коэффициентом  $\bar{E}(a)$ , т.е. УЛИ наделяет  $F$  наглядным смыслом функции формы ТДД. Это позволяет четко сформулировать требования к МФ  $F$ , исходя из общих качественных геометрических свойств ЭДД разных материалов (см. п. 4). УЛИ также упрощает процедуру определения МФ  $F(x)$  по ЭДД путем подгонки к ней теоретической зависимости  $\sigma(\varepsilon) = F(\bar{E}\varepsilon)$ , поскольку УЛИ позволяет сначала найти экспериментальную зависимость  $\bar{E}(a)$ , т.е. расцепить задачу идентификации материальных параметров и функции (см. п. 4).

**4. Требования к материальной функции  $F$ , способы ее задания и определения по данным испытаний материалов.** МФ  $F(x)$  определяет форму теоретических диаграмм растяжения  $\sigma - \varepsilon$  (3.2). Опыты показывают, что при растяжении любого структурно-устойчивого материала с постоянной скоростью  $\dot{\varepsilon} = a$  зависимость истинного напряжения от деформации  $\sigma = \sigma_a(\varepsilon)$  является неубывающей функцией вплоть до разрушения образца или, по крайней мере, при  $\varepsilon \in [0; \hat{\varepsilon}]$ , где  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(a)$  – точка максимума ЭДД (насчет достоверности регистрации и причин появления падающего участка ЭДД и степени универсальности постулата Драккера в литературе существуют разные мнения, их обсуждать не будем). Для многих материалов ЭДД  $\sigma = \sigma_a(\varepsilon)$  нестрого выпукла вверх вплоть до разрушения или хотя бы при  $\varepsilon \in [0; \tilde{\varepsilon}]$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(a)$  – точка перегиба ЭДД (она появляется, например, в том случае, когда на ЭДД имеется площадка текучести, а вслед за ней – зона упрочнения).

В этой статье ограничимся моделированием класса материалов с возрастающими и выпуклыми ЭДД (практически любой материал может быть включен в него, если ограничить диапазон деформаций и их скоростей). Поэтому на МФ  $F$  следует наложить следующие качественные ограничения:  $F(x)$  – неубывающая функция (с кусочно-непрерывной производной) при  $x \in [0; \hat{x}]$ , выпуклая вверх (т.е.  $F'(x)$  убывает) при  $x \in [0; \tilde{x}]$  и удовлетворяющая условию  $F(0) = 0$  (обеспечивающему отсутствие напряжения в начальный момент  $t = 0$  и в случае  $\varepsilon(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$ ). Этими свойствами обладают, например, функции  $F(x) = Hx^M$  и  $F(x) = H \ln(Bx + 1)^M$ ,  $x > 0$ ,  $M \in (0; 1]$ ,  $B, H > 0$ .

При желании моделировать падающие ДД следует выбирать  $F(x)$  убывающей при  $x > \hat{x}$ . Тогда точка максимума ТДД (3.2)  $\hat{\varepsilon} = \hat{x}/\bar{E}(a)$  зависит от скорости растяжения  $a$ , причем  $\hat{\varepsilon}(a)$  убывает, так как  $\bar{E}(a)$  возрастает. Для моделирования ДД с площадкой те-

кучести и зоной упрочнения вслед за ней следует выбрать  $F(x)$  постоянной при  $x \in [x_T; \tilde{x}]$ , выпуклой вниз при  $x \in [\tilde{x}, \check{x}]$  и выпуклой вверх при  $x > \check{x}$  и  $x \in [0; x_T]$ . В этих случаях необходимо следить за тем, как влияет немонотонность  $F(x)$  и наличие точек перегиба на свойства кривых ползучести, релаксации и длительной прочности, установленные в предложении возрастания  $F(x)$  при всех  $x > 0$  (см. пп. 5–7 и [1–3]).

С ростом скорости  $a$  ЭДД любого материала  $\sigma = \sigma_a(\epsilon)$  смещается вверх (функция  $\sigma = \sigma(a, \epsilon)$  возрастает по  $a$ ). Для некоторых материалов (например, конструкционных сталей) этот процесс ограничен, т.е. существует предельная кривая при  $a \rightarrow \infty$ , которую можно считать диаграммой мгновенного деформирования [10]. ТДД (3.2) (или (3.1)) обладает этим свойством только тогда, когда МФ  $F$  ограничена, например,  $F(x) = H(\arctg Bx)^M$  или  $F(x) = H(1 - (Bx + 1)^{-1})^M$ ,  $M \in (0; 1]$ ,  $B, H > 0$ . В п. 6 будет доказано, что наличие горизонтальной асимптоты  $\sigma = \sigma^*$  у МФ  $\sigma = F(x)$  влечет наличие вертикальной асимптоты  $\sigma = \sigma^*$  у функции  $v(\sigma)$ , определяющей теоретическую зависимость скорости ползучести от напряжения (подобная  $v(\sigma)$  использована в [12]). Функция  $v(\sigma)$  с вертикальной асимптотой  $\sigma = \sigma^*$  позволяет моделировать сколь угодно быстрое нарастание скорости ползучести в окрестности критического значения  $\sigma = \sigma^*$ . Вопрос о том, наблюдается ли в испытаниях материалов указанная связь между существованием предельной ДД и очень быстрым ростом скорости ползучести  $v(\sigma)$  в окрестности предела прочности, заслуживает тщательного исследования, не только с целью выявления класса материалов, поведение которых адекватно описывает ОС (1.1) с одной МФ  $F$ , но и для понимания физических механизмов деформирования.

По ТДД (3.2) можно определить “модуль упругости” при малых деформациях  $E: = \sigma'(\epsilon)|_{\epsilon=0} = F'(0)\gamma'(\epsilon)|_{\epsilon=0}$  для линейных процессов  $\epsilon(t) = at$  (и, вообще, для всех процессов с дифференцируемой линейной асимптотикой  $\epsilon(t): at, a \neq 0$ , при  $t \rightarrow +0$ ):

$$E = F'(0)\bar{E} = F'(0)Q_1 a^{d-1} \quad (4.1)$$

Модуль упругости (4.1) зависит от скорости деформации  $a$  и МП модели (см.  $Q_1$  в (2.8) и (2.4)). Чтобы функция  $E(a)$  была неубывающей (именно такая ситуация наблюдается в опытах), на параметры модели необходимо и достаточно наложить ограничение

$$d - 1 \geq 0, \text{ т.е. } m_0 \leq 0 \quad (4.2)$$

В этом случае вся ТДД (3.2) целиком смещается вверх с увеличением  $a$ , поскольку функция  $F$  предполагается возрастающей.

Так как  $Q_1$  не зависит от  $a$ , то из формулы (4.1) следует, что для любой МФ  $F$ :

$$E(a_2)/E(a_1) = (a_2/a_1)^{d-1} \quad (4.3)$$

Поэтому можно найти параметр  $d$  по результатам двух опытов на деформирование с постоянными скоростями  $a_1 \neq a_2$ , подставив в (4.3) экспериментальные значения  $a_2/a_1$  и  $E(a_2)/E(a_1)$ :  $d = \ln(E(a_2)/E(a_1))/\ln(a_2/a_1) + 1$ . Кроме того, из этих опытов можно найти по (4.1) значение произведения  $Q_1 F'(0)$ :  $Q_1 F'(0) = a_1^{1-d} E(a_1)$ . Тем самым полностью идентифицируется теоретическая зависимость модуля упругости (4.1) от скорости. Если задать условие нормировки  $F'(0) = 1$ , то станут известными значения параметра  $Q_1$  и множителя  $\bar{E}(a)$  из (2.8), входящего в ТДД (3.2) и играющего роль коэффициента сжатия графика  $F$ , после которого он должен совпасть с ЭДД.

Итак, УЛИ (2.7) позволяет расщепить задачу идентификации материальных параметров и функции: сначала найти значения ключевых МП  $d$  и  $m_0 = 1 - d$  и полностью

идентифицировать зависимости (4.1) и (2.8) независимо от выбора МФ  $F$ , а затем найти  $F$  из условия совпадения ТДД (3.2) с ЭДД при некотором конкретном значении  $a = a_1$  (т.е. при известном  $\bar{E} = \bar{E}(a_1)$ ).

Обсудим теперь возможные способы конкретизации класса функций, в котором выбирается  $F$ . Если нужно описать излом на экспериментальной ДД  $\sigma - \epsilon$ , связанный, например, с появлением пластических деформаций при  $\sigma = \sigma_T$ , то разумно склеить  $F(x)$  из двух степенных функций с показателями  $M_1$  и  $M_2$ , определенных на промежутках  $[0; x_T]$  и  $[x_T; +\infty]$ , где  $F(x_T) = \sigma_T$ . При  $M_2 = 0$  моделируется площадка текучести на ДД. Если ЭДД имеют хорошо выраженный линейный участок при  $\sigma < \sigma_b$ , то  $F$  нужно взять линейной на  $[0; x_l]$  (т.е.  $M_1 = 1$ ). В случае  $F(x) = Hx$ ,  $x \leq x_l$ , получается модель квазилинейного при  $\sigma \leq \sigma_l = F(x_l)$  материала с модулем упругости, зависящим (при  $d \neq 1$ ) от скорости деформирования  $\sigma = E(a)\epsilon$ ,  $E(a) = HQ_1 a^{d-1}$ . Даже если линейный участок на ЭДД не заменен, все же удобно взять  $F$  линейной на интервале  $[0; x_l]$ , где  $\sigma_l = F(x_l)$  достаточно мало. Ведь из (4.1) следует, что в случае выполнения УЛИ для существования модуля упругости необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная и ненулевая производная  $F'(0)$ . Поэтому следует выбирать МФ  $F$  в классе функций, имеющих линейную асимптотику  $F(x) \sim Hx$  при  $x \rightarrow +0$ .

Таким образом, кусочно-степенные МФ  $F$  описывают классические модели поведения материалов. Можно доказать, что они образуют класс функций, который вполне достаточен для интерполяции и аппроксимации с любой точностью произвольных возрастающих функций  $F$ , т.е. функций формы ТДД. Критерий выпуклости вверх кусочно-степенной функции  $F$  – выполнение неравенств  $M_{i+1} < M_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

В п. 5 будет показано, что МФ  $F$  не только отвечает за форму теоретических диаграмм  $\sigma - \epsilon$  при деформировании с постоянными скоростями, но и определяет зависимость кривой ползучести (в частности, скорости ползучести) от уровня напряжения, т.е. определяет уравнение изохронных КП. Это свойство соответствует известному экспериментальному факту [10]: диаграмма мгновенного деформирования  $\sigma = f(\epsilon)$ , которая в эксперименте получена быть не может, но может быть восстановлена по семейству изохронных КП, “достаточно близка” к диаграмме быстрого деформирования (за 1–2 секунды) с постоянной скоростью. Тем самым, одна и та же функция  $f(\epsilon)$  отвечает как за диаграмму деформирования, так и за зависимость кривых ползучести от напряжения. В модели (1.1) это получается автоматически. Данный факт позволяет, в частности, восстановить все семейство теоретических кривых ползучести (и длительной прочности) по одной экспериментальной КП и результатам двух опытов на деформирование с постоянной скоростью, по которым определяется  $F$ .

**5. “Идеальные” кривые ползучести модели.** Чтобы найти уравнение “идеальной” КП (при мгновенном нагружении до заданного уровня), нужно решить нелинейное интегральное уравнение (1.1) относительно  $\epsilon(t)$ , считая, что  $\sigma(t) \equiv \text{const}$ , т.е.  $\gamma(t) \equiv \text{const}$  при  $t > 0$ . Благодаря лемме 1.1 это решение можно найти в классе степенных процессов

$$\epsilon = at^n, \quad n \geq 0, \quad a > 0 \tag{5.1}$$

потребовав в (2.2)  $m = 0$  и  $Q_n a^d = \gamma$ . Отсюда

$$n = n_c := -m_0 d^{-1}, \quad a = a_c := \gamma^h Q^{-h} = f(\sigma)^h Q^{-h} \tag{5.2}$$



$$h := d^{-1} > 0, \quad Q := Q_{n_c} = (\chi + n_c^q)^{\xi/q} (p(n_c - n_0))^{n_1/p} (q(n_c - n_1))^{-\xi/q} > 0 \quad (5.3)$$

где  $f := F^{-1}$  – обратная функция к материальной функции  $F(x)$ ,  $x \geq 0$ . Коэффициенты  $Q$  и  $n$  зависят лишь от МП, но не зависят от напряжения  $\sigma = F(\gamma)$  и МФ  $F(x)$ . При разных  $\sigma$  КП подобны с коэффициентом  $a_1/a_2 = (\gamma_1/\gamma_2)^n = (f(\sigma_1)/f(\sigma_2))^n$ .

Если  $\xi > 0$  в (1.1), формула (5.2) выражает показатель степенной КП (5.1) только в том случае, когда  $n > n_*$ , так как формула (2.2) справедлива лишь при условии  $n > n_*$ . Легко проверить, что неравенство  $n > n_*$  автоматически следует из  $n_1 < 0$  и  $m_0 \leq 0$  (см. (1.5)). Кроме того, поскольку деформация реальных материалов при постоянном напряжении и температуре не убывает с течением времени, следует наложить на параметры модели ограничение  $n \geq 0$ , т.е.  $m_0 d^{-1} \leq 0$ . В силу ограничения  $d > 0$  (см. п. 2) оно равносильно условию  $m_0 \leq 0$  (см. (4.2) и (1.4)).

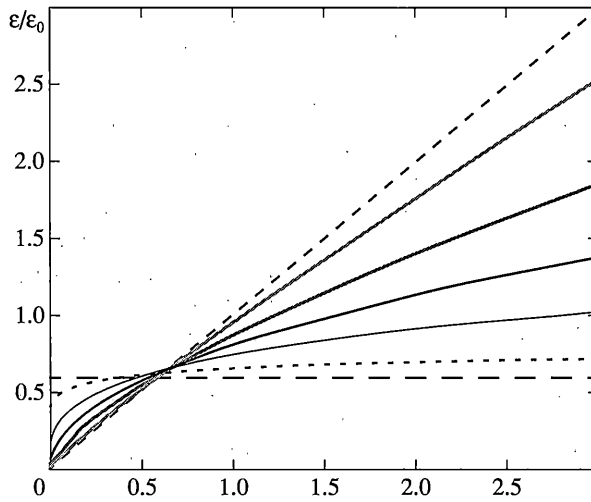
Если  $m_0 = 0$ , то  $n = 0$  и  $\varepsilon = a = \text{const}$ , т.е. модель описывает материал без ползучести. При  $n = 1$  имеем ползучесть с постоянной скоростью  $\varepsilon = at$ . Если  $n > 1$ , то скорость ползучести возрастает при всех  $t > 0$ , т.е. КП имеет только “третий участок” (такие экспериментальные КП встречаются у некоторых материалов при высоких уровнях напряжения). Если  $n < 1$ , то скорость ползучести убывает при всех  $t > 0$ , т.е. КП имеет только “первый участок”.

Так как в начальной стадии ползучести скорость ползучести большинства материалов не возрастает, а убывает или остается постоянной, то на материальные параметры модели следует наложить ограничение  $n \leq 1$ , т.е.  $-m_0 \leq d$ .

Если налагается условие линейной инвариантности (2.7), то ограничение  $n \leq 1$  выполняется автоматически, неравенство  $m_0 < 0$  равносильно  $d > 1$ , а показатель КП (5.2) выражается формулой  $n = 1 - d^{-1}$  и не зависит от параметров  $p, q, \beta, \omega_i$ , входящих в формулу (2.3) для  $m_0$ . Итак, в этом случае для существования степенной КП (5.1) с  $n \in (0; 1)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия  $d > 1$  и  $n_1 < 0$ .

КП (5.1) при  $n = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$  (для модели с  $p = q = 2, \eta = \xi = \chi = \omega_0 = \omega_1 = 1$  и разных значениях  $\alpha$ ) и одном и том же напряжении  $\sigma = F(\gamma), \gamma = 1$ , показаны на фиг. 1. Все КП с  $n \in (0; 1)$  лежат между предельными прямыми (пунктир), получающимися при  $n = 0$  и  $n \rightarrow 1$ . Чем ближе  $n$  к 1, тем меньше КП отличается от прямой  $\varepsilon = t$  (можно доказать, что  $a \rightarrow 1$  при  $d \rightarrow +\infty$  и сходимость семейства (5.1) при  $d \rightarrow +\infty$  к функции  $\varepsilon = t$  равномерна на любом отрезке  $t \in [0; T]$ ).

Как известно, экспериментальные КП, как правило, состоят из трех характерных участков: первый – выпуклый вверх (скорость ползучести убывает), второй визуально мало отличается от прямой линии и называется участком установившейся ползучести (скорость ползучести постоянна), третий – выпуклый вниз (скорость ползучести возрастает). В зависимости от материала и уровня напряжения один или два из этих участков могут отсутствовать. Например, ЭКП полимеров, подвергавшихся испытаниям на долговременную ползучесть (в течение 12 лет) в экспериментах Робинсона, хорошо описываются степенными зависимостями от времени на протяжении всего периода испытаний [11]. ТКП (5.1) как раз имеет степенной характер. Она хорошо качественно описывает первую стадию ползучести, так как  $\ddot{\varepsilon}(t) = an(n-1)t^{n-2} < 0$  при всех  $t > 0$ . Однако графики степенных функций на некоторых интервалах визуально мало (ничуть не больше, чем ЭКП) отличаются от прямых линий, особенно, когда показатель  $n$  близок к единице или нулю (см. фиг. 1). При любом  $n \in (0; 1)$  характеристика их кривизны  $|\ddot{\varepsilon}(t)|$  убывает и близка к нулю при больших значениях  $t$ . Это наводит на мысль, что ТКП (5.1) могут вполне удовлетворительно описывать не только первый, но и второй участок кривой ползучести. Это предположение подтверждается строгими формулировками и количественными оценками: для любой кривой ползучести вида (5.1) с  $n \in (0; 1)$  можно определить участок установившейся ползучести  $t \in [T_1; T_2]$ , где деформацию можно с



Фиг. 1

любой заданной относительной погрешностью  $\delta$  аппроксимировать линейной функцией времени  $\varepsilon(t) = vt + \varepsilon_0$ . Границы этого участка и отношение его длины к длине первого участка  $T_1$  выражаются через  $a$ ,  $n$  и  $\delta$ .

Чтобы расширить область применения модели, в работе [14] предложено обобщение ОС (1.1), содержащее дополнительную (вторую) материальную функцию  $\Phi(x)$  и позволяющее моделировать КП с тремя типичными участками произвольной длины, и, вообще, КП произвольной формы (в том числе КП материалов, механические свойства которых существенно зависят от времени).

**6. Зависимость скорости ползучести от напряжения.** Продифференцировав (5.1), найдем скорости ползучести

$$\dot{\varepsilon}(t) = ant^{n-1} \quad (6.1)$$

где по (5.2)  $n = n_c := -m_0 d^{-1}$ . Зависимость от  $\sigma$  мгновенной скорости ползучести (6.1) (а также и любой средней по времени) полностью (с точностью до множителя, зависящего только от момента времени  $t$  или способа усреднения) определяется функцией  $a(\sigma)$ :

$$a = Q^{-h} \gamma^h = Q^{-h} f(\sigma)^h \quad (6.2)$$

где  $h := d^{-1} > 0$ ,  $f := F^{-1}$ ,  $\gamma = f(\sigma)$  – не зависящая от времени величина, соответствующая заданному уровню напряжения  $\sigma$ . Для любой возрастающей материальной функции  $F(x)$  функция (6.2) (а значит, и скорость ползучести (6.1)) возрастает и обращается в нуль при  $\sigma = 0$  (так как из возрастания  $F$  следует возрастание  $f(\sigma)$ , а из условия  $F(0) = 0$  следует  $f(0) = 0$ ). Именно такое поведение скорости ползучести и наблюдается в опытах.

В теориях ползучести принято задавать уравнение состояния в виде зависимости скорости ползучести от напряжения, деформации и структурных параметров. Наиболее популярные аппроксимация экспериментальных зависимостей скорости (установившейся) ползучести от  $\sigma$  приведены в работах [10–12]. Построим МФ  $F(\gamma)$ , обеспечивающую произвольно (разумно) выбранный вид зависимости скорости ползучести  $v$  от  $\sigma$ . Предположим, что экспериментальные данные описываются зависимостью  $v = g(\sigma)$ ,  $\sigma \in [\sigma_*, \sigma^*]$ , где  $g(\sigma)$  – возрастающая функция ( $\sigma^*$  может совпадать с пределом прочно-

сти, а  $\sigma_*$  – с пределом ползучести материала или с нулем). Приравняв  $g(\sigma)$  и (6.2), получим  $f(\sigma) = Qg(\sigma)^d$ . Выразим  $\sigma$  через  $\gamma = f(\sigma)$ :  $\sigma = g^{-1}(\gamma^h Q^{-h})$ ,  $h := d^{-1}$ , т.е.

$$F(\gamma) = g^{-1}(\gamma^h Q^{-h}) \tag{6.3}$$

Функция (6.3) определена на  $[\gamma_*; \gamma^*]$ , где  $\gamma_* = Qg(\sigma_*)^d$ ,  $\gamma^* = Qg(\sigma^*)^d$ , и удовлетворяет всем требованиям к МФ  $F$  сформулированным в п. 4. Действительно, функция (6.3) возрастает (как композиция возрастающих функций) и дифференцируема на  $(\gamma_*; \gamma^*)$ , если дифференцируема  $g(\sigma)$  и  $g'(\sigma) > 0$ :  $F'(\gamma) = Q^{-h} h \gamma^{h-1} (g'(\gamma^h Q^{-h}))^{-1}$ . Если  $\sigma_* = 0$  и  $g(0) = 0$ , то и  $F(0) = 0$ . Из выпуклости вниз и возрастания  $g(\sigma)$  следует возрастание и выпуклость вверх обратной функции  $g^{-1}$  и МФ (6.3) при  $h \leq 1$ , т.е.  $d \geq 1$ . Кроме того, наличие вертикальной асимптоты  $\sigma = \sigma^*$  у графика  $g(\sigma)$  влечет наличие горизонтальной асимптоты  $\sigma = \sigma^*$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$  у графиков обратной функции  $g^{-1}$  и МФ (6.3).

По формуле (6.3) легко найти МФ  $F$ , соответствующие наиболее популярным моделям ползучести, основанным на той или иной аппроксимации зависимости скорости ползучести от напряжения. Степенной функции [10]  $g(\sigma) = B\sigma^m \sigma_*^{-m}$ ,  $m > 1$ , соответствует степенная МФ  $F(\gamma) = \sigma_* (B^{-1} Q^{-h} \gamma^h)^{1/m}$  (с показателем  $k := h/m < 1$  при  $d \geq 1$ ), экспоненте [10]  $g(\sigma) = \text{Vexpr}(\sigma/\sigma_*) - \text{МФ } F(\gamma) = \sigma_* \ln(B^{-1} Q^{-h} \gamma^h)$ . Функции  $g(\sigma) = (B\sigma/(\sigma^* - \sigma))^m$ ,  $m \geq 1$ ,  $\sigma \in [0; \sigma^*)$ , предложенной в [12], соответствует МФ  $F(\gamma) = \sigma^* (1 - B(\gamma^k Q^{-k} + B)^{-1})$ ,  $\gamma \in [0; +\infty)$ , где  $k := hm^{-1} = (dm)^{-1} > 0$ . Она имеет горизонтальную асимптоту  $\sigma = \sigma^*$ , а при  $\gamma \rightarrow +0$  – степенную асимптотику  $F(\gamma) \sim \sigma^* B^{-1} Q^{-k} \gamma^k$  с показателем  $k \leq 1$  при  $d \geq 1$ .

Вместо  $g(\sigma) = (B\sigma/(\sigma^* - \sigma))^m$ , можно взять другую функцию с вертикальной асимптотой  $\sigma = \sigma^*$ , например,  $g(\sigma) = B^m \text{tg}^m(\pi\sigma/2\sigma^*)$ ,  $\sigma \in [0; \sigma^*)$ . Ей соответствует МФ  $F(\gamma) = 2\sigma^* \pi^{-1} \arctg(B^{-1} Q^{-k} \gamma^k)$ ,  $k := hm^{-1}$ , имеющая при  $\gamma \rightarrow 0$  асимптотику  $F(\gamma) \sim \sim 2\sigma^* \pi^{-1} B^{-1} Q^{-k} \gamma^k$  с таким же показателем  $k$ .

Таким образом, формулу (6.3) можно рассматривать как еще один (см. п. 4) способ идентификации МФ  $F$ : ее можно определить по экспериментальным данным о зависимости скорости ползучести от напряжения (с точностью до постоянного множителя, зависящего только от фиксированного момента времени или способа усреднения). Полезно иметь несколько способов идентификации МФ по экспериментальным данным разной структуры, так как далеко не всегда можно провести все необходимые испытания материала специально для определения МФ  $F$ .

**7. Обращение определяющего соотношения (1.1) в случае  $\xi = 0$ .** Вернемся к задаче вывода уравнения кривой ползучести, соответствующей произвольному закону начальной стадии нагружения  $\sigma(t)$ , т.е. стадии перехода от нулевого значения напряжения к заданному постоянному уровню. Для этого нужно предварительно получить аналитическое обращение ОС (1.1). Это удалось сделать только в случае  $\xi = 0$ , когда ОС (1.1) имеет вид:

$$\sigma = F(\gamma), \quad \gamma(t) = \text{Re} := \varepsilon(t)^\alpha t^\beta \left( \int_0^t (\tau^{\omega_0} \varepsilon(\tau))^p d\tau \right)^{-\eta/p} \tag{7.1}$$

В ОС (7.1) не входит явно скорость деформации  $\dot{\varepsilon}(t)$ , и в нем остаются только пять материальных параметров:  $\alpha, p, \eta > 0$ ,  $\beta, \omega_0 \geq 0$ . Выражения для ключевых МП (1.6) и ограничения  $d > 0$ ,  $m_0 \leq 0$  (см. (1.5)) упрощаются:

$$d := \alpha - \eta, \quad m_0 = \beta - \eta(\omega_0 + p^{-1}) = \beta + \eta n_0 \tag{7.2}$$

$$\alpha > \eta, \quad \beta \leq \eta(\omega_0 + p^{-1}) \quad (7.3)$$

Докажем что, если  $\alpha > \eta$  и МФ  $F(x)$  строго возрастает, то ОС (7.1) обратимо, и обратный оператор  $\mathbf{R}^{-1}$  на множестве кусочно непрерывно дифференцируемых функций  $\gamma(t)$ ,  $t \geq 0$ , действует по формуле

$$\varepsilon(t) = \Omega t^{-\beta A} \gamma(t)^A \left( \int_0^t (\tau^\omega \gamma(\tau)^A)^p d\tau \right)^{\mu/p}, \quad t > 0 \quad (7.4)$$

$$A := \alpha^{-1}, \quad \mu := \eta(\alpha - \eta)^{-1} = \eta d^{-1}, \quad \Omega := (1 - \eta A)^{\mu/p} = (dA)^{\mu/p}, \quad \omega := \omega_0 - \beta/\alpha \quad (7.5)$$

Так как  $\alpha > \eta > 0$ , то  $\mu > 0$  и  $1 - \eta A > 0$  (поэтому выражение для  $\Omega$  имеет смысл и  $0 < \Omega < 1$ ).

Формула обращения (7.4) показывает, что обратный оператор  $\mathbf{R}^{-1}$  имеет ту же структуру, что и оператор  $\mathbf{R}$ , задаваемый формулой (7.1), с тем отличием, что показатели степени, в которые возводятся интеграл и множитель  $t$  перед ним, имеют противоположный знак по сравнению с (7.1).

Показатель  $\omega$  может не быть положительным (и потому подынтегральная функция может иметь особенность в точке  $t = 0$ ), но он (как и  $\omega_0$ ), всегда удовлетворяет (при уже принятых ограничениях  $m_0 \leq 0, d > 0, \beta \geq 0$ ) более слабому неравенству

$$\omega p + 1 > 0 \quad (7.6)$$

Действительно, при  $\xi = 0$   $\eta d^{-1}(\omega + p^{-1}) = \eta d^{-1}(\omega_0 - \beta\alpha^{-1} + p^{-1}) = -m_0 d^{-1} + \beta\alpha^{-1} \geq 0$ , поскольку  $m_0 \leq 0, d > 0, \beta \geq 0$ . Отсюда следует, что  $\omega = -p^{-1}$  тогда и только тогда,  $m_0 = 0$  и  $\beta = 0$ , что равносильно  $\beta = 0$  и  $\eta = 0$  (модель (7.1) без интегрального множителя). Таким образом, при  $\eta > 0$  выполняется строгое неравенство (7.6).

Параметр  $w := \omega p + 1$  и неравенство (7.6) будут играть важную роль как при обращении оператора  $\mathbf{R}$ , так и при выводе и анализе уравнения КП с произвольным законом нагружения. В частности, условие (7.6) – критерий сходимости несобственного интеграла (7.4) для любой ограниченной в правой окрестности точки  $t = 0$  функции  $\gamma(t)$ .

Докажем формулу обращения (7.4). Из (7.1) имеем:

$$\int_0^t (\tau^\omega \varepsilon(\tau))^p d\tau = (\varepsilon(t)^\alpha t^\beta / \gamma(t))^{p/\eta}$$

$$(t^\omega \varepsilon(t))^p = p\eta^{-1} (\varepsilon^\alpha t^\beta \gamma^{-1})^{-1+p/\eta} \gamma^{-2} (\gamma(\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \dot{\varepsilon} t^\beta + \varepsilon^\alpha \beta t^{\beta-1}) - \dot{\gamma} \varepsilon^\alpha t^\beta)$$

$$\alpha t \gamma \dot{\varepsilon} + (\beta \gamma - \dot{\gamma} t) \varepsilon = p^{-1} \eta \gamma^{1+p/\eta} \varepsilon^{1+p-\alpha p/\eta} t^{1+p\omega_0-p\beta/\eta}$$

Таким образом, при  $t > 0$  искомая функция  $\varepsilon(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли:

$$\dot{\varepsilon} + g(t)\varepsilon = f(t)\varepsilon^\kappa \quad (7.7)$$

$$\kappa := 1 + p - p\alpha\eta^{-1}, \quad g(t) := \alpha^{-1}(\beta t^{-1} - \dot{\gamma}\gamma^{-1}), \quad f(t) := \eta\alpha^{-1} p^{-1} \gamma^{p/\eta} t^{p(\omega_0 - \beta/\eta)} \quad (7.8)$$

где  $\gamma(t)$  – известная функция. Заменой  $y = \varepsilon^\lambda, \lambda := 1 - \kappa = p(\alpha - \eta)\eta^{-1}$ , уравнение Бернулли сводится к линейному:  $\dot{y} + \lambda g(t)y = \lambda f(t)$ . Его решение с начальным условием  $y(0) = 0$ ,

имеет вид  $y(t) = \lambda v(t) \int_0^t f(\tau)/v(\tau) d\tau$ , где  $v(t)$  – какое-либо решение уравнения  $y' + \lambda g(t)y = 0$ , такое, что  $v(t) \neq 0$  при  $t > 0$ :

$$v(t) = \exp[-\lambda \int_0^t g(\tau) d\tau] = \exp[-\lambda \alpha^{-1} (\beta \ln t - \ln \gamma(t))] = (\gamma(t) t^{-\beta})^{\lambda/\alpha}$$

$$\int_0^t f(\tau)/v(\tau) d\tau = \eta(\alpha p)^{-1} \int_0^t \gamma^{p/\eta} \tau^{p(\omega_0 - \beta/\eta) + \beta\lambda/\alpha} \gamma^{-\lambda/\alpha} d\tau = \eta(\alpha p)^{-1} \int_0^t \gamma^{p/\alpha} \tau^{p\omega} d\tau$$

$$\omega := \omega_0 - \beta A, \quad y = \lambda \eta(\alpha p)^{-1} t^{-\lambda\beta/\alpha} \gamma^{\lambda/\alpha} \int_0^t \gamma^{p/\alpha} \tau^{p\omega} d\tau$$

Неравенство (7.6) обеспечивает сходимость этого интеграла для любой ограниченной в правой окрестности точки  $t = 0$  функции  $\gamma(t)$ . Отсюда можно найти  $\varepsilon(t) = y^{1/\lambda}$ , тогда и только тогда, когда  $\lambda > 0$  (иначе  $\lambda^{1/\lambda}$  не имеет смысла). Но первое из ограничений (7.3) как раз и гарантирует, что  $\lambda := p(\alpha - \eta)\eta^{-1} > 0$ . Итак

$$\varepsilon(t) = (1 - \eta\alpha^{-1})^{1/\lambda} t^{-\beta/\alpha} \gamma^{1/\alpha} \left[ \int_0^t \gamma^{p/\alpha} \tau^{p(\omega_0 - \beta/\alpha)} d\tau \right]^{1/\lambda}$$

Полагая  $\mu := p/\lambda$ , получим (7.4).

В частном случае, когда  $\beta = \omega_0 = 0$  и  $p > 1$ , обращение ОС (7.1) указано в [6] (без формулировки условий, при которых оно существует). В этом случае будет  $\omega = 0$  в (7.4).

**8. Некоторые свойства обратного оператора (7.4).** Операторы (7.1) и (7.4) переводят любую непрерывную при  $t > 0$  функцию в непрерывную, а дифференцируемую – в дифференцируемую. В точке  $t = 0$  это свойство может нарушаться. Выясним, при каких условиях оператор (7.4) переводит функции со степенной асимптотикой  $\gamma(t) \sim bt^m$ ,  $m \leq 0$ , при  $t \rightarrow +0$  в функции  $\varepsilon(t)$ , такие, что  $\varepsilon(0) = 0$  (этого требует физический смысл  $\varepsilon(t)$ ). Ответ на этот вопрос связан с корректностью модели, и получить его важно еще и потому, что при построении обратного оператора (7.4) строилось решение дифференциального уравнения (7.7), коэффициенты которого, вообще говоря, сингулярны при  $t = 0$ .

Полагая, что  $\gamma(t) \sim bt^m$  при  $t \rightarrow +0$ , найдем асимптотику функции-образа (7.4):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &\sim \Omega t^{-\beta A} b^A t^{mA} \left( \int_0^t (\tau^\omega b^A \tau^{mA})^p d\tau \right)^{\mu/p} = \\ &= \Omega b^{A(1+\mu)} t^{(m-\beta)A} ((p(mA + \omega) + 1)^{-1} t^{p(mA + \omega) + 1})^{\mu/p} \end{aligned}$$

т.е.  $\varepsilon(t) \sim Ct^N$ , где  $C := \Omega b^{A(1+\mu)} (p mA + p \omega + 1)^{-\mu/p} > 0$ , а  $N$  выражается формулой  $N := (m - \beta)A + \mu(mA + \omega) + \mu/p = (\alpha - \eta)^{-1}(m - \beta - \eta n_0)$ . По (7.2):

$$N = (\alpha - \eta)^{-1}(m - m_0) = (m - m_0)d^{-1} \tag{8.1}$$

$\varepsilon(t) = Ct^N \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +0$  тогда и только тогда, когда  $N > 0$ , т.е.  $m - m_0 > 0$  (так как  $d > 0$ ). Отсюда следует, что условия  $d > 0$  и  $m_0 \leq 0$  необходимы и достаточны для того, чтобы для любой функции  $\gamma(t)$  с асимптотикой  $\gamma(t) \sim bt^m$ ,  $m > 0$ , при  $t \rightarrow +0$ , функция (7.4) стремилась к нулю при  $t \rightarrow +0$ . Если выполнено строгое неравенство  $m_0 < 0$ , то это верно и

для  $m = 0$  (см. п. 5). Таким образом, ограничения  $d > 0$  и  $m_0 \leq 0$ , возникшие в п. 2–5, играют определяющую роль и в этом вопросе.

Следует отметить, что при  $m_0 < 0$  оператор (7.1), в отличие от обратного к нему оператора (7.4), переводит функции со степенной асимптотикой  $\varepsilon(t) \sim at^N$  при  $t \rightarrow +0$  в функции  $\gamma(t)$ , обращающиеся в нуль при  $t = 0$ , не при всех  $N > 0$ , а тогда и только тогда, когда  $N > n_c$ , где  $n_c := -m_0 d^{-1} > 0$  – показатель кривой ползучести (5.1) (в самом деле,  $m > 0$  в (2.3) только при  $n > \max\{n_*, n_c\}$ , а в случае  $\xi = 0$  имеем  $n_* = n_0 < 0$ ).

При  $m_0 = 0$  оператор (7.1) переводит положительные постоянные функции  $\varepsilon(t) = a$ ,  $t > 0$ , в положительные постоянные функции  $\gamma(t) = b$ ,  $b := Q_0 a^d$ , функции с нулевым показателем  $N$  степенной асимптотики  $\varepsilon(t) \sim a > 0$  при  $t \rightarrow +0$  – в функции этого же класса, а функции с положительным показателем асимптотики  $N$  – в функции с положительным показателем  $m$ . Естественно, что и обратный оператор (7.4) переводит указанные классы функций в себя.

Формулу (8.1) можно также вывести из леммы 2 (п. 2), утверждающей, что оператор  $\mathbf{R}$  из (1.1) переводит в себя класс функций с дифференцируемой степенной асимптотикой. Если  $\xi = 0$ , то дифференцируемость асимптотики не требуется: оператор (7.1) переводит в себя множество всех функций со степенной асимптотикой (2.5) (при  $\xi = 0$  имеем  $n_* = n_0 < 0$ ). Поэтому этим же свойством обладает и обратный оператор (7.4), в частности, он переводит функцию  $\gamma(t)$  с асимптотикой  $\gamma(t) \sim bt^m$ ,  $b > 0$ , при  $t \rightarrow +0$  в функцию  $\varepsilon(t)$  с асимптотикой  $\varepsilon(t) \sim Ct^N$ , где  $N = (m - m_0)d^{-1}$  в силу (2.3).

При  $m = 1$  и  $N \geq 1$  отсюда вытекает следующее свойство оператора (7.4): чтобы оператор (7.4) переводил любую функцию  $\gamma(t)$ , удовлетворяющую условию  $\gamma(0) = 0$  и имеющую ненулевую правую производную при  $t = 0$ , в дифференцируемую справа при  $t = 0$  функцию  $\varepsilon(t)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $d + m_0 \leq 1$ .

В п. 2 было установлено, что оператор  $\mathbf{R}$  из (1.1) (в частности, оператор (7.1)) обладает аналогичным свойством при условии  $d + m_0 \geq 1$ . Поэтому взаимно обратные операторы (7.1) и (7.4) одновременно сохраняют выполнение начального условия  $f(0) = 0$  и существование ненулевой правой производной в точке  $t = 0$  (т.е. сохраняют наличие при  $t \rightarrow +0$  линейной асимптотики  $f(t) \sim at$ ,  $a \neq 0$ ), тогда и только тогда, когда выполняется ограничение  $d + m_0 = 1$ , т.е. (2.7). Таким образом, условие линейной инвариантности (2.7) играет еще и роль своеобразного условия баланса свойств оператора  $\mathbf{R}$  и ему обратного по отношению к асимптотическому поведению деформации  $\varepsilon(t)$  и соответствующего квазинапряжения  $\gamma(t)$  при  $t \rightarrow +0$ .

Для вывода и анализа уравнений кривых ползучести (ш. 9, 10) полезно знать, как оператор (7.4) преобразует разрывы первого рода квазинапряжения  $\gamma(t)$  и его производной в произвольной точке  $t = T > 0$ . Поделив пределы функции (7.4) при  $t \rightarrow T \pm 0$  друг на друга, получим связь между относительными скачками  $\varepsilon(t)$  и  $\gamma(t)$ :  $\varepsilon_+/\varepsilon_- = (\gamma_+/\gamma_-)^A$ , т.е.  $\Delta \ln \varepsilon(t) = A \Delta \ln \gamma(t)$ . Если же  $\gamma(t)$  непрерывна, а  $\dot{\gamma}(t)$  имеет скачок  $\dot{\gamma}_+ - \dot{\gamma}_-$  в точке  $t = T$ , то  $\varepsilon(t)$  непрерывна, а скачок  $\dot{\varepsilon}(t)$  проще всего найти из уравнения (7.7) (учитывая, что  $f(t)$  непрерывна при  $t = T$ ):

$$\dot{\varepsilon}_+ - \dot{\varepsilon}_- = (\dot{\gamma}_+ - \dot{\gamma}_-) A \varepsilon(T) / \gamma(T), \quad \text{т.е.} \quad \Delta(\ln \varepsilon(t))' = A \Delta(\ln \gamma(t))'$$

Еще одно важное свойство обратного оператора (7.4) (оно окажется полезным, в частности, в следующем параграфе) – сохранение при его действии равномерной сходимости внутри интервала  $t \in (0; +\infty)$  параметрических семейств (в частности, последовательностей) функций. Можно доказать, что оператор (7.4) переводит равномерно сходящиеся при  $v \rightarrow v_0$  внутри интервала  $t \in (0; +\infty)$  семейства функций  $\gamma_v(t)$  в равномерно сходящиеся внутри интервала  $t \in (0; +\infty)$  семейства функций  $\varepsilon_v(t) = \mathbf{R}^{-1} \gamma_v(t)$  (если  $\gamma_v(t) \rightarrow \gamma(t)$  при  $v \rightarrow v_0$ , то  $\mathbf{R}^{-1} \gamma_v(t) \rightarrow \mathbf{R}^{-1} \gamma$ ).

**9. Кривые ползучести модели (7.1) с учетом начальной стадии нагружения.** При подстановке в формулу обращения (7.4) постоянной функции  $\gamma(t) = \gamma_c$ ,  $t > 0$ , получается КП (5.1), соответствующая мгновенному нагружению до напряжения  $\sigma_c = F(\gamma_c)$ . Подставим теперь в (7.4) функцию  $\gamma(t) = F^{-1}(\sigma(t))$  вида

$$\gamma(t) = \gamma_c \varphi(t/T) \text{ при } t \in [0, T] \text{ и } \gamma(t) = \gamma_c = \text{const при } t > T \quad (9.1)$$

где задающая стадию нагружения функция  $\varphi(x)$  – произвольная неубывающая на  $[0; 1]$  кусочно-непрерывная функция, такая, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  (из этих условий следует, что  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma(T) = \gamma_c$  и  $\sigma(0) = F(0) = 0$ ,  $\sigma(T) = F(\gamma_c)$ ). Тогда

$$\varepsilon(t) = \Omega t^{-\beta A} \gamma_c^A \varphi(t/T)^A \left( \int_0^t (\tau^\omega \gamma_c^A \varphi(\tau/T)^A)^p d\tau \right)^{\mu/p}, \quad t \in [0; T] \quad (9.2)$$

$$A := \alpha^{-1}, \quad \mu := \eta(\alpha - \eta)^{-1} = \eta d^{-1} > 0, \quad \Omega := (dA)^{\mu/p} = (\mu + 1)^{-\mu/p} > 0, \quad \omega := \omega_0 - \beta A$$

При  $t \geq T$ , учитывая неравенство (7.6) и полагая  $w := \omega p + 1$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Omega t^{-\beta A} \gamma_c^A \left( \int_0^T (\tau^\omega \gamma_c^A \varphi(\tau/T)^A)^p d\tau + \int_T^t (\tau^\omega \gamma_c^A)^p d\tau \right)^{\mu/p} = \\ &= \Omega t^{-\beta A} \gamma_c^A \left( \gamma_c^{Ap} \Phi_T + \gamma_c^{Ap} \frac{\tau^{\omega p + 1}}{\omega p + 1} \Big|_T^t \right)^{\mu/p} = \Omega \gamma_c^{A(1+\mu)} (\omega p + 1)^{-\mu/p} t^{-\beta A} (t^{\omega p + 1} - B_T)^{\mu/p} \\ \varepsilon(t) &= \Omega \gamma_c^{1/d} w^{-\mu/p} t^{-\beta A + w\mu/p} (1 - B_T t^{-w})^{\mu/p}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\Phi_T := \int_0^T (\tau^\omega \varphi(\tau/T)^A)^p d\tau = \Phi T^{\omega p + 1} = \Phi T^w, \quad \Phi := \int_0^1 x^{p\omega} \varphi(x)^{pA} dx > 0 \quad (9.4)$$

$$B_T := T^{\omega p + 1} - (\omega p + 1) \Phi_T = B_\varphi T^{\omega p + 1} = B_\varphi T^w, \quad B_\varphi := 1 - (\omega p + 1) \Phi = 1 - w \Phi \quad (9.5)$$

Так как  $w > 0$  в силу (7.6), то для любых  $T$  и  $\varphi(x)$ , задающих стадию нагружения (9.1), верны следующие оценки для коэффициентов (9.4) и (9.5):

$$0 < \Phi < \int_0^1 x^{\omega p} dx = (\omega p + 1)^{-1} = w^{-1}, \quad 0 < B_\varphi < 1, \quad 0 < B_T < T^w \quad (9.6)$$

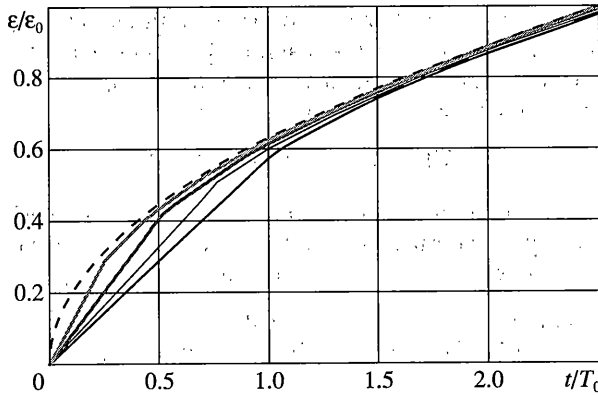
Условие (7.6) необходимо и достаточно, чтобы интеграл (9.4) (он будет несобственным в случае  $\omega < 0$ ) сходилась для любой кусочно-непрерывной на  $[0; 1]$  функции  $\varphi(x)$  (ибо  $x^{p\omega} \varphi(x)^{pA} \leq M^{pA} x^{p\omega}$ ), т.е. для того, чтобы была верна формула (9.3).

Выражение (9.3) можно переписать в виде

$$\varepsilon(t) = at^n (1 - B_T t^{-w})^{\mu/p} = at^n (1 - B_\varphi T^w t^{-w})^{\mu/p}, \quad t \geq T \quad (9.7)$$

$$n := \mu(\omega + p^{-1}) - \beta A > 0, \quad a := \Omega \gamma_c^{A(1+\mu)} w^{-\mu/p} = \Omega \gamma_c^{1/d} w^{-\eta/pd} > 0, \quad \Omega = (dA)^{\mu/p} \quad (9.8)$$

При разных уровнях напряжения  $\sigma_c = F(\gamma_c)$ , но одинаковых  $B_T$ , КП (9.7) подобны с коэффициентом  $a_1/a_2 = (\gamma_1/\gamma_2)^{1/d}$ . Параметры (9.8) не зависят от  $T$  и конкретной функции  $\varphi(x)$ , описывающей стадию нагружения (9.1), и совпадают с параметрами (5.2) КП (5.1)



Фиг. 2

для мгновенного нагружения (при  $\xi = 0$ ). Последняя получается из (9.7) при  $B_T = 0$ , т.е. при  $T = 0$ . С уменьшением  $T$  коэффициент  $B_T = B_\varphi T^w$  убывает, а значение функции (9.7) при любом  $t \geq T$  увеличивается, т.е. вся КП (9.7) смещается вверх, оставаясь все время ниже идеальной КП (5.1). Этот процесс иллюстрирует фиг. 2, где приведены КП (9.2), (9.7) при  $\varphi(x) = x$  и  $T = 1; 0.75; 0.5; 0.25$  и идеальная КП (5.1) ( $T = 0$ ) для модели (7.1) с  $\alpha = 3, \eta = p = \beta = \omega_0 = 1$  ( $n = 0.5$ ) при одном и том же напряжении  $\sigma_c = F(\gamma_c), \gamma_c = 1$ .

Как и подобает кривой ползучести, функция (9.7) возрастает при  $t \geq T$ , так как оба множителя положительны и возрастают в силу условий  $w > 0, B_T > 0, \mu/p > 0, n \geq 0, a \geq 0$  вытекающих из (7.3). Можно доказать, что для КП (9.7) с  $n \in (0; 1)$  скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}(t)$  убывает и  $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . При  $n = 1$  скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}(t)$  убывает, но  $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow a > 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (скорость ползучести практически постоянна при больших  $t$ ), а КП (9.7) имеет асимптоту  $\varepsilon = at$ .

Влияние функции  $\varphi(x)$  на уравнение КП (9.7) при  $t \geq T$  определяется только интегральной числовой характеристикой  $\Phi$  (см. (9.4)). Для разных  $\varphi(x)$  с одинаковым значением  $\Phi$  кривые ползучести полностью совпадают при  $t \geq T$ . С ростом  $\Phi$  ( $\Phi \in (0; w^{-1})$  в силу (9.6)) коэффициент  $B_\varphi$  убывает, и вся КП смещается вверх. Участки КП (9.7) и (9.2) непрерывно склеиваются в точке  $t = T$  для любой  $\varphi(x)$ , такой, что  $\varphi(1) = 1$  (тогда квазинпряжения (9.1) непрерывно при  $t = T$ ).

**10. Асимптотическое поведение кривой ползучести и условие затухания памяти при ползучести.** Так как по (7.6)  $w > 0$ , то кривая ползучести (9.7) имеет асимптотику

$$\varepsilon(t) = at^n + o(t^n) \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (10.1)$$

Отсюда следует, в частности, что КП (9.7) ограничена сверху тогда и только тогда, когда  $n = 0$ , т.е.  $m_0 = 0$  (см. (5.2)). В этом случае кривая ползучести (9.7) имеет горизонтальную асимптоту  $\varepsilon = a, a = \Omega \gamma_c^{1/d} w^{-n/pd}$ .

Из (10.1) следует, что относительное отклонение КП (9.7) от идеальной КП  $\varepsilon_0(t) = at^n$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это, конечно, еще не означает, что абсолютное отклонение  $|\varepsilon(t) - \varepsilon_0(t)|$  сколь угодно близко к нулю при достаточно больших значениях  $t/T$  (т.е. имеет порядок  $o(1)$ , а не только  $o(t^n)$ ). Выясним, при каких ограничениях на МП ОС (7.1)  $|\varepsilon(t) - \varepsilon_0(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. установим условия затухания памяти при ползучести:

$$\varepsilon_0(t) - \varepsilon(t) = at^n [1 - (1 - B_\varphi T^w t^{-w})^{\mu/p}]$$



Так как  $w > 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $x = B_\Phi T^w t^{-w} \rightarrow 0$  и

$$(1 - B_\Phi T^w t^{-w})^{\mu/p} = 1 - \mu p^{-1} x + O(x^2) = 1 - \mu p^{-1} B_\Phi T^w t^{-w} + O(t^{-2w})$$

Поэтому при  $t \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_0(t) - \varepsilon(t) = a\mu p^{-1} B_\Phi T^w t^{n-w} + O(t^{n-2w}) = a\mu p^{-1} B_\Phi T^w t^{n-w} + o(t^{n-w}), \quad (10.2)$$

Отсюда следует, что  $\varepsilon_0(t) - \varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда  $n - w < 0$ .

Условие  $w > n$  (совместно с ограничениями (7.3)), необходимо и достаточно, чтобы КП (9.7) сколь угодно мало отличалась от идеальной КП  $\varepsilon_0(t) = at^n$  при достаточно больших значениях  $t$  (фиг. 2). Независимость асимптотического поведения теоретической кривой ползучести (9.7) при  $t \rightarrow \infty$  от конкретного закона изменения напряжения в стадии перехода от нулевого до заданного постоянного значения на любом фиксированном конечном интервале времени означает, что модель (7.1) обладает затухающей памятью при ползучести. Аналогичное свойство кривой релаксации модели (1.1) при выполнении ограничений (1.5) установлено в работе [1]. Такое определение затухания памяти модели или материала – более слабое требование, чем принятые в монографиях [4, 5], но зато его выполнение может быть проверено в испытаниях материала.

Из асимптотики (10.2) следует, что, чем больше разность  $w - n$ , тем быстрее стремится к нулю отклонение  $\varepsilon_0(t) - \varepsilon(t)$ , т.е. тем быстрее затухает память материала.

Условие затухания памяти  $w > n$  не является слишком ограничительным. Например, если  $n > 1$ , то достаточно, чтобы  $\omega \geq 0$ , т.е.  $\omega_0 > \beta/\alpha$  (тогда  $w \geq 1$ ).

При  $T \rightarrow +0$  значения  $B_T$  и  $\varepsilon(T) = aT^n (w\Phi)^{\mu/p}$  стремятся к нулю монотонно, так как  $n > 0$ . Можно доказать, что при  $w > n$   $T$ -параметрическое семейство кривых ползучести (9.2), (9.7) (соответствующих одному и тому же напряжению  $\sigma_c = F(\gamma_c)$ ) сходится при  $T \rightarrow +0$  к КП для мгновенного нагружения (5.1) равномерно на любом интервале  $t \geq \tau$ , где  $\tau > 0$  (т.е. обратный оператор (7.4) сохраняет этот тип сходимости семейства функций (9.1)).

**11. Об обратной форме ОС (1.1).** ОС (1.1) выражает напряжение в текущий момент через заданную историю деформации. Построить его аналитическое обращение на множестве всех кусочно-дифференцируемых процессов  $\varepsilon(t)$  удалось только в частном случае, когда  $\xi = 0$  (п. 7). Обращение общего ОС (1.1) получено только в классе степенных и кусочно-степенных процессов (п. 2, следствие леммы 1). Поэтому ОС (1.1) с  $\xi \neq 0$  пока плохо приспособлено к аналитическому описанию реологических процессов, в которых задается произвольная программа нагружения  $\sigma(t) \neq \text{const}$  и нужно найти деформацию  $\varepsilon(t)$ . Исключением является случай, когда  $\sigma(t)$  – кусочно-степенная функция, в частности, когда имеет место ползучесть при  $\sigma(t) = \text{const}$  (см. п. 5). В других случаях получить точное решение  $\varepsilon(t)$  нелинейного интегрального уравнения (1.1) с заданным  $\sigma(t)$  непросто. Конечно, остается возможность его численного решения (например, итерационными методами), либо приближенное построение решения, основанное на аппроксимации (в частности, интерполяции) заданного  $\sigma(t)$  кусочно-степенными функциями. Эти подходы требуют и заслуживают тщательного анализа и обоснования: для доказательства сходимости следует изучить, в каких метрических пространствах функций и при каких условиях оператор  $\mathbf{R}$  биективен, равномерно непрерывен, монотонен, дифференцируем и т.д.

Но возможен и другой подход – видоизменить ОС (1.1), переписать его в иной форме с целью приспособить именно к описанию процессов, в которых задается программа нагружения  $\sigma(t)$  и нужно найти деформацию  $\varepsilon(t)$ , в частности, к описанию различных эф-

фектов при ползучести (ползучести при ступенчатом нагружении, обратной ползучести, длительной прочности и т.п.). Самый естественный способ это сделать – поменять ролями  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$  в ОС (1.1), сохранив структуру интегрального оператора  $\mathbf{R}$ , связывающего их (см. (1.3)), т.е. задать ОС в виде

$$\varepsilon(t) = \mathbf{R}'\gamma, \quad \gamma(t) = f(\sigma(t)), \quad \mathbf{R}'\gamma := \gamma(t)^\alpha t^\beta S_{g, \chi, \omega}[\gamma, \dot{\gamma}]^\xi L_{p, \omega_0}[\gamma]^{-n}, \quad t > 0 \quad (11.1)$$

где  $f(x)$  – материальная функция. Ограничения на МП (1.2) и (1.5), обеспечивающие качественно верное моделирование характерных особенностей механического поведения материалов, конечно, изменятся [15].

В пользу такого подхода свидетельствуют два существенных соображения. Во-первых, вся методология и техника исследования семейства операторов  $\mathbf{R}$  из (1.1), развитая в этой статье и работах [1–3], не зависит от физического смысла функций из области определения оператора, и потому все математические свойства  $\mathbf{R}$ , делающие его пригодным для описания реологических процессов, присущи и оператору  $\mathbf{R}'$ . Их механическая интерпретация просто приводит к другим ограничениям на материальные параметры, имеющие иной физической смысл. Во-вторых, в важном частном случае, когда  $\xi = 0$ , обратный оператор  $\mathbf{R}^{-1}$  является интегральным (см. п. 7) и имеет в точности ту же структуру, что и оператор  $\mathbf{R}$ . В этом случае точное обращение ОС (1.1) имеет вид (11.1), где  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}$ ,  $f = F^{-1}$ . В общем случае  $\xi \neq 0$  точное обращение ОС (1.1), вообще говоря, нельзя построить в виде (11.1), но при определенных условиях в семействе операторов  $\mathbf{R}'$  можно найти квазиобратный для  $\mathbf{R}$  из (1.1), т.е. так выбрать параметры в (11.1), что композиции  $\mathbf{R}' \circ \mathbf{R}$  и  $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}'$  мало отличаются от тождественного отображения на достаточно обширном для моделирования множестве функций. В частности, модели (11.1) и (1.1) должны давать одни и те же (или близкие) кривые деформирования, ползучести, релаксации, длительной прочности. При дополнительных ограничениях на МП ОС (1.1) такой квазиобратный оператор  $\mathbf{R}'$  можно подобрать даже в более узком семействе операторов (7.4).

**12. Заключение.** Дан анализ нелинейного определяющего соотношения (ОС) (1.1) между напряжением и деформацией для описания одномерных изотермических реологических процессов в случае монотонного изменения деформации (в частности, вязкоупругости, ползучести, пластичности и сверхпластичности).

При любых допустимых значениях девяти материальных параметров модели выведены уравнения кривой ползучести при мгновенном нагружении до заданного уровня напряжения, диаграммы деформирования с постоянной скоростью, зависимости скорости ползучести от напряжения и диаграммы деформирования от его скорости. Аналитически исследованы зависимости их свойств от материальной функции и материальных параметров ОС, получены необходимые дополнительные ограничения (1.5) на значения материальных параметров и свойства МФ, обеспечивающие адекватное моделирование типичных механических свойств материалов (т.е. общих качественных свойств кривых ползучести, релаксации и деформирования с постоянными скоростями, наблюдаемых в экспериментах). Каждое из этих ограничений возникает при рассмотрении нескольких различных аспектов механического поведения материала (см. пп. 2, 4–10). Это, свидетельствует о внутренней согласованности и непротиворечивости модели.

Выявлены взаимосвязи между свойствами теоретических кривых ползучести и диаграмм деформирования с постоянной скоростью, обусловленные присутствием в их уравнениях материальной функции ОС (1.1). Описаны способы ее идентификации по экспериментальным диаграммам деформирования (п. 4) и по кривым ползучести (п. 6), в частности, ее построение в классе кусочно-степенных функций, пригодном для описания нелинейной вязкоупругости, пластичности и ползучести. Сформулировано условие

линейной инвариантности (2.7) и выявлена его роль в упрощении уравнения теоретической диаграммы деформирования и процедуры идентификации МФ  $F$  (пп. 3, 4).

Получено аналитическое обращение ОС (1.1) в случае  $\xi = 0$ . Установлено, что обратный оператор  $\mathbf{R}^{-1}$  является интегральным и имеет ту же структуру, что и оператор  $\mathbf{R}$  (7.1), изучены его свойства (пп. 6, 7). Выведено уравнение (9.2), (9.7) семейства кривых ползучести, соответствующих произвольным законам нагружения на стадии перехода от нулевого напряжения к заданному постоянному уровню (п. 9). Исследована их зависимость от материальных параметров модели и характеристик стадии нагружения, найдены ограничения на материальные параметры, обеспечивающие независимость асимптотического поведения таких кривых ползучести при  $t \rightarrow \infty$  от длительности стадии нагружения  $T$  и конкретного закона изменения напряжений на ней, т.е. условия затухания памяти при ползучести. Указана комбинация параметров, отвечающая за скорость затухания памяти. Доказана равномерная сходимость при  $T \rightarrow +0$  семейства кривых ползучести (9.2), (9.7) к кривой ползучести (5.1) при мгновенном нагружении (на любом интервале  $t \geq \tau$ , где  $\tau > 0$ ). Это свойство дополняет и усиливает при малых  $T$  свойство асимптотического затухания памяти при  $t \rightarrow \infty$ , справедливое при любом  $T$ .

Затухание памяти при ползучести показывает, что уравнения кривых длительной прочности модели (соответствующие деформационному критерию разрушения и родственным ему интегральным критериям, предложенным в [3]), практически не зависят от начальной стадии нагружения, если только деформация в конце этой стадии мала по сравнению с деформацией, при которой происходит разрушение. Поэтому для прогноза длительной прочности можно пользоваться уравнением (5.1) кривой ползучести для мгновенного нагружения ( $T = 0$ ), дающим хорошее приближение уже при  $t > 2T$ .

Таким образом, анализ свойств определяющего соотношения (1.1) показал, что оно позволяет адекватно моделировать целый комплекс реологических явлений: зависимость напряжения от деформации и скорости деформирования, релаксацию, ползучесть, длительную прочность и затухание памяти материалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В.Н., Хохлов А.В., Шестериков С.А. Определяющие соотношения для реологических процессов // Электронный журнал "Исследовано в России". 2003. С. 152–160, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/016.pdf>
2. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и затухание памяти материалов // Тр. VI Междунар. симп. "Современные проблемы прочности" им. В.А. Лихачева. 2003. Т. 2. С. 267–274.
3. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование кривых длительной прочности // Электронный журнал "Исследовано в России". 2005. С. 1010–1020, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/098.pdf>
4. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
5. Клюшников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994. 190 с.
6. Басалов Ю.Г., Кузнецов В.Н., Шестериков С.А. Определяющие соотношения для реономного материала // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 69–81.
7. Fitzgerald J.E., Vakili J. Nonlinear characterization of sand-asphalt concrete by means of permanent-memory norms // Proc. of the SESA. 1960. V. 30. № 2. P. 504–510.
8. Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
9. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 96 с.

10. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
11. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
12. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ, № 1. С. 86–91.
13. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е.* Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
14. *Khokhlov A.V.* An extension of the constitutive equation for rheological processes and new properties of the theoretic creep curves // Advanced Methods in Validation and Identification of Nonlinear Constitutive Equations in Solid Mechanics (EUROMECH Colloquium 458). Moscow, 2004. P. 44–46.
15. *Хохлов А.В.* Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения // Электронный журнал “Исследовано в России”, 2005. С. 355–365. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/032.pdf>

Москва

Поступила в редакцию  
23.12.2004