

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ТЕОРИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

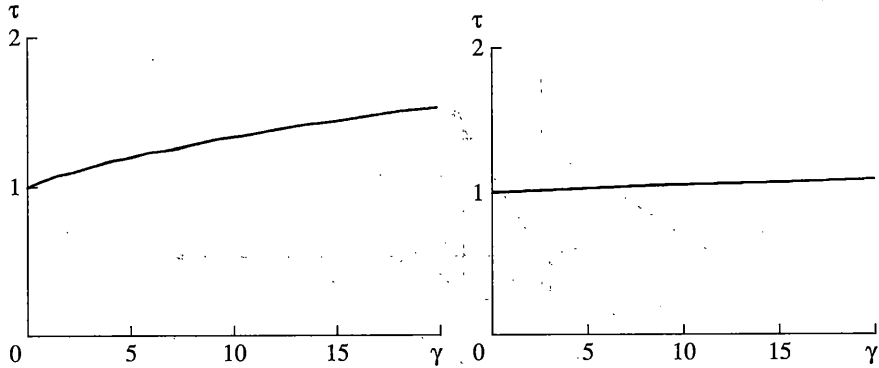
На основе представлений теории скольжения Батдорфа–Будянского строится модель упруговязкопластической среды. Условия скольжения на единичной площадке учитывают зависимость касательных напряжений от скорости проскальзывания, но при малой вязкости близки к условиям сухого трения. При определенных предположениях удастся проинтегрировать скорости пластических сдвигов по всевозможным площадкам скольжения в случае произвольного трехмерного напряженного состояния и получить выражение для тензора скоростей пластической деформации.

1. Введение. В работе рассматривается один из вариантов теории скольжения Батдорфа – Будянского, применяемый при построении упругопластических или упруговязкопластических моделей деформируемого твердого тела.

Как известно, основная идея теории скольжения заключается в следующем. Если выбраны условия контактного взаимодействия на единичной площадке скольжения в фиксированной точке деформируемого тела, то путем интегрирования относительных сдвигов по всем площадкам, где условия сцепления нарушены, можно получить в общем виде выражение для тензора пластической деформации. Первая теория такого типа была предложена в [1].

Подробный обзор работ этого направления в математической теории пластичности в свое время был дан в работе [2]. В [3] показано, что теорию скольжения можно рассматривать как вариант упругопластических теорий с ассоциированным законом течения для случая бесконечного числа функций текучести. Более поздние теории развивались в [4, 5]. Кинематическая взаимосвязь пластических сдвигов на различных плоскостях скольжения учитывалась в [6]. В этих работах интегральные представления для тензора пластической деформации исследовались для конкретных процессов нагружения, либо для случаев одноосного или плоского напряженного состояний, либо численно. Произвести интегрирование по всевозможным площадкам скольжения в случае произвольного трехмерного напряженного состояния, по-видимому, пока не удавалось. Это связано как со сложной нелинейной зависимостью области интегрирования от структуры напряженного состояния (при учете вклада всевозможных площадок, где нарушено условие сцепления), так и со сложным нелинейным характером условий скольжения (пластического сдвига).

В данной работе, на основе представлений, описанных в [7–8], развивается вариант теории скольжения, учитывающий зависимость контактных условий на площадке скольжения от скорости проскальзывания. При определенных предположениях удастся пройти весь путь интегрирования пластических сдвигов по всевозможным площадкам скольжения и получить замкнутый вариант модели сплошной среды, которая, с учетом зависимости от скоростей проскальзывания, получается близкой к упруговязкопластической модели сплошной среды классического типа [9]. Аналитически получают оценки для показателей нелинейности, входящих в нелинейные функции релаксации, описывающие зависимость от скорости деформации [10].



Фиг. 1

2. Условие скольжения. Примем гипотезу о том, что в каждой точке рассматриваемой среды скольжение (пластический сдвиг) может происходить вдоль любой плоскости с нормалью $\mathbf{n}$, проходящей через эту точку. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 напряженное состояние в этой точке задается тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Вектор скольжения $\boldsymbol{\gamma}$ равен относительной скорости проскальзывания $[\mathbf{V}]$ вдоль выбранной плоскости.

Вектор касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ на этой плоскости равен $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$. Направление скольжения совпадает с вектором $\boldsymbol{\tau}$ и начинается при выполнении критического условия $|\boldsymbol{\tau}| \geq \tau_0$, или при нормировании напряжений на τ_0 условия $|\boldsymbol{\tau}| \geq 1$.

Рассмотрим условие скольжения на единичной площадке следующего вида:

$$\boldsymbol{\gamma} = H(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1)\boldsymbol{\tau}/\eta_0 \quad (2.1)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, η_0 – коэффициент “микроскопической” вязкости на единичной площадке скольжения. В дальнейшем будем использовать обозначение $\langle F \rangle = H(F) \cdot F$.

Зависимость $|\boldsymbol{\tau}|$ от $|\boldsymbol{\gamma}|$ при различных значениях коэффициента вязкости $\eta_0 = 0.1$, $\eta_0 = 0.01$ показана на фиг. 1, откуда видно, что при малых коэффициентах вязкости рассматриваемое условие близко к условию типа сухого трения с добавленной малой зависимостью от скорости проскальзывания.

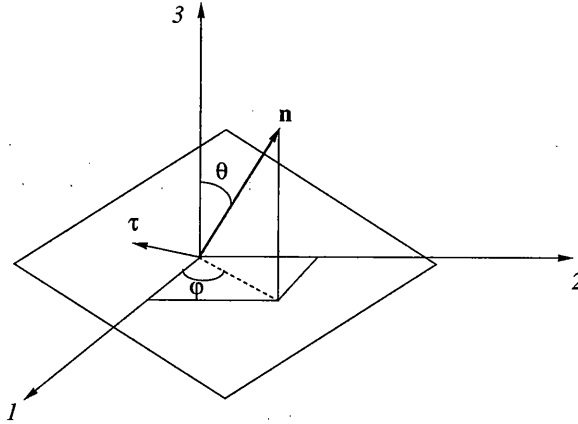
Вклад скольжений по плоскостям, у которых нормаль лежит внутри телесного угла $d\Omega$, определяется вектором $d\boldsymbol{\gamma}$: $d\boldsymbol{\gamma} = H(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1)\boldsymbol{\tau}d\Omega/\eta$, где η – коэффициент эффективной “макроскопической” вязкости. Связь коэффициентов η_0 и η оценивается с помощью параметров дискретной микроструктуры рассматриваемой среды $\eta \sim \eta_0 l \Omega / N$, где l – характерный размер структурного элемента (зерна), N – среднее количество плоскостей скольжения в телесном угле $\Omega = 2\pi$.

В соответствии с представлениями теории скольжения вклад скольжений $d\boldsymbol{\gamma}$ вдоль площадок с нормалью $\mathbf{n}$ внутри телесного угла $d\Omega$ в тензор скоростей пластической деформации $d\mathbf{e}$ равен

$$d\mathbf{e} = (\mathbf{n} \otimes d\boldsymbol{\gamma} + d\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n})/2 \quad (2.2)$$

Для того, чтобы вычислить полный тензор скоростей пластической деформации, необходимо проинтегрировать вклады по всем возможным площадкам скольжения.

3. Тензор скоростей пластической деформации. Перейдем в систему координат, связанную с главными осями тензора напряжений такую, что главные значения тензора на-



Фиг. 2

пряжений $\sigma_{1,2,3}$ удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 > \sigma_{2,3}$, а ее базисные векторы образуют правую тройку. Также введем связанную с ней сферическую систему координат R, ϑ, φ (фиг. 2) так, что компоненты единичной нормали будут равны $n_1 = \sin\vartheta\cos\varphi$, $n_2 = \sin\vartheta\sin\varphi$, $n_3 = \cos\vartheta$. Компоненты тензора скоростей пластической деформации (2.2) будут иметь вид

$$de_{ij} = \langle \tau^2 - 1 \rangle [(\sigma_i + \sigma_j)/2 - \sigma_k n_k^2] n_i n_j \sin\vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \quad (3.1)$$

Полные (интегральные) компоненты этого тензора получаются интегрированием по всем площадкам скольжения:

$$e_{ij} = \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_i + \sigma_j)/2 - \sigma_k n_k^2 n_i n_j \sin\vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \quad (3.2)$$

Например, для e_{11}, e_{22}, e_{33} имеем

$$\begin{aligned} e_{11} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_1 + \sigma_j)/2 - \sigma_k n_k^2 n_i n_j \sin\vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \\ e_{22} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \sin\vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \\ e_{33} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \end{aligned} \quad (3.3)$$

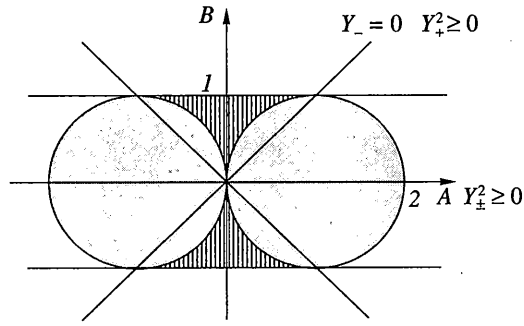
$$\sigma_0 = \sigma_1 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \sigma_3 \cos^2\vartheta$$

Условие для определения пределов интегрирования по ϑ и φ имеет вид

$$\begin{aligned} \tau^2 - 1 &= S_{12}^2 \sin^2\vartheta \sin^2 2\varphi + \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta (S_3 + S_{12} \cos 2\varphi)^2 - 1 \geq 0 \\ S_{12} &= (\sigma_1 - \sigma_2)/2 > 0, \quad S_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 > 0, \quad S_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Имеет место связь $S_3 = 2S_{13} - S_{12}$, из которой следует ограничение $S_3 > -S_{12}$. Введем обозначения

$$A = S_3 + S_{12} \cos 2\varphi, \quad B = S_{12} \sin 2\varphi \quad (3.5)$$



Фиг. 3

Тогда условие (3.4) примет форму неравенства для биквадратного трехчлена относительно $\cos^2 \vartheta$:

$$A^2 \cos^4 \vartheta - (A^2 - B^2) \cos^2 \vartheta + (1 - B^2) \leq 0 \quad (3.6)$$

Корни соответствующего биквадратного уравнения равны:

$$Y_{\pm}^2 = \cos^2 \vartheta_{\pm} = \frac{A^2 - B^2 \pm \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2} \quad (3.7)$$

Решением неравенства (3.6) будет диапазон

$$\max[0, Y_-^2] \leq \cos^2 \vartheta \leq \min[Y_+^2, 1] \quad (3.8)$$

При этом должно выполняться условие $\text{Discr} = (A^2 + B^2)^2 - 4A^2 \geq 0$. Это условие записывается в виде $(|A| - 1)^2 + B^2 \geq 1$.

В плоскости переменных A, B это есть внешность двух окружностей единичного радиуса с центрами в точках $|A| = 1, B = 0$. Условие $Y_-^2 \leq 1$ выполняется при любых A, B , тогда как условие $Y_-^2 \geq 0$ – при $B^2 \leq 1, B^2 \leq A^2$. Условие $Y_+^2 \leq 1$ выполняется при любых A, B , тогда как условие $Y_+^2 \geq 0$ – при $B^2 \leq A^2$ и при $B^2 \geq 1, A^2 \leq B^2$.

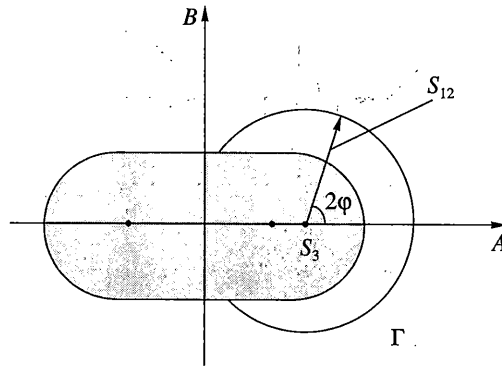
Таким образом, область допустимых значений для ϑ в плоскости A, B имеет вид, показанный на фиг. 3 и представляет собой внешность заштрихованной фигуры, причем при $B^2 > 1$ предел интегрирования Y_-^2 отрицателен и должен быть заменен на 0.

Окончательно неравенство (3.8) примет вид

$$\max[0, Y_-^2] \leq \cos^2 \vartheta \leq Y_+^2$$

где $Y_{\pm}^2$ вычисляются по (3.7) в незаштрихованной области параметров A и B (фиг. 3).

Контур Γ интегрирования по φ с учетом (3.5) представляет собой часть окружности $(A - S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2$, расположенную в разрешенной (незаштрихованной) области в плоскости A и B (фиг. 4).



Фиг. 4

Интегралы (3.3) для компонент тензора скоростей пластической деформации не сложно проинтегрировать по ϑ и они принимают вид

$$e_{kk} = 2 \int_{\Gamma} E_{kk}(A, B, \cos \vartheta) \Big|_{Y_-}^{Y_+} d\varphi / \eta \quad (3.9)$$

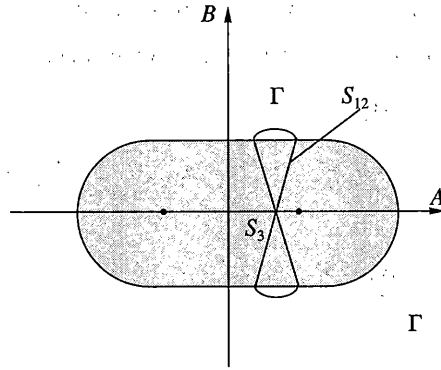
Подынтегральное выражение довольно громоздко, и выписывать его не будем. Пределы интегрирования $Y_{\pm}$ неотрицательны, а коэффициент 2 появляется для учета отрицательных значений (после извлечения корней из $Y_{\pm}^2$). Проинтегрировать по Γ интеграл (3.9) аналитически с учетом сложной нелинейной зависимости A и B и $Y_{\pm}$ от φ не представляется возможным. Однако, при малых значениях коэффициента вязкости η можно предположить по аналогии со стандартной теорией упруговязкопластической среды, что напряжения будут находиться в окрестности “поверхности текучести”, релаксируя на нее с малым характерным временем порядка η . В данном случае это означает, что контур интегрирования Γ при малой вязкости будет мало “выступать” за пределы заштрихованной области на фиг. 4. С учетом возникающего малого параметра можно проинтегрировать (3.9) по Γ .

4. Интегрирование при малой вязкости. Проведем анализ возможных вариантов расположения контура Γ и вычисление интеграла (3.9) с учетом возникающего малого параметра для трех характерных случаев.

1) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на фиг. 5. Соотношение между главными значениями тензора напряжений таково, что при этом $-1 < S_3 < 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. Ограничение $S_3 > -1$ носит общий характер и следует из ранее указанного ограничения $S_3 > -S_{12}$.

Контур Γ представляет собой две “шапочки”, выступающие за линии $B = \pm 1$ в плоскости переменных A, B . Из неравенства $S_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2 < 1$ с учетом $S_{12} > 1$ следует $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$. Максимальное значение имеет главное касательное напряжение $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Введем малый параметр $\delta = S_{12} - 1$. Подынтегральное выражение в (3.9) можно упростить по переменным A, B , учитывая, что в рассматриваемом случае $\beta = B - 1 < \delta \ll 1$ и $A < 1$. С точностью до малых следующего порядка пределы интегрирования по ϑ равны

$$Y_+^2 = 2 \frac{B-1}{1-A^2}, \quad Y_- = 0$$



Фиг. 5

Здесь и далее будем употреблять знак равенства для соотношений, справедливых с точностью до величин следующего порядка малости. Оценки с точностью до $O(\delta)$ для компонент тензора скоростей пластической деформации (3.3) дают:

$$e_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\tau^2 - 1)(\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0$$

Вычислим многократно используемый интеграл

$$I_k = \int_{Y_-}^{Y_+} (\tau^2 - 1) \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (k = 0, 1, 2)$$

С учетом формул (3.4) и (3.5) имеем

$$I_k = \int_{\vartheta} (A^2 \cos^4 \vartheta - (A^2 - B^2) \cos^2 \vartheta + (1 - B^2)) \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

Несложные преобразования дают результат

$$I_k = \left[A^2 \frac{Y_+^{2k+5}}{2k+5} - (A^2 - B^2) \frac{Y_+^{2k+3}}{2k+3} + (1 - B^2) \frac{Y_+^{2k+1}}{2k+1} \right]_{Y_-}$$

Рассмотрим два используемых в дальнейшем варианта интегрирования:

(а) $Y_- = 0$:

$$I_k = A^2 \frac{Y_+^{2k+5}}{2k+5} - (A^2 - B^2) \frac{Y_+^{2k+3}}{2k+3} + (1 - B^2) \frac{Y_+^{2k+1}}{2k+1} \quad (4.1)$$

(б) $Y_{\pm}^2 = a \pm b\epsilon$, $\epsilon \ll 1$:

$$I_k = a^{k-1/2} b [A^2 a^2 - (A^2 - B^2) a + (1 - B^2)] \epsilon \quad (4.2)$$

Используя формулы (4.1) для интегрирования по ϑ , затем можно проинтегрировать по φ . Пределы интегрирования $\varphi_{\pm}$ при этом находятся из геометрического условия

(фиг. 5) $S_{12}\sin 2\varphi_{\pm} = 1$. Этому условию соответствуют значения $\varphi_{\pm} = \pi/4 \pm \varphi_0$, $\varphi_0 = \sqrt{2(S_{12} - 1)/S_{12}}$. Отсюда следует, что диапазон интегрирования по φ имеет порядок $\sqrt{\delta}$, что позволяет сделать замены

$$2\varphi = \pi/2 + \gamma, \quad \sin 2\varphi = \cos \gamma \sim 1 - \gamma^2/2, \quad \cos 2\varphi = -\sin \gamma \sim -\gamma$$

В результате получим

$$e_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{S_{13}(1 - S_{13})}} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta \quad (4.3)$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0$$

Рассмотренный случай соответствует скольжению (зонам пластичности) в окрестности углов $\vartheta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/4$. Отметим, что коэффициент перед нелинейной функцией в (4.3) зависит от промежуточного касательного напряжения S_{13} .

Полученные формулы не работают при $S_3 \sim 1$ или, что то же самое, при $S_{13} \sim 1$. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

1а) Рассмотрим случай, когда параметр напряженного состояния S_3 таков, что $S_3 \lesssim 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. Введем малый параметр $\delta = S_{12} - 1$ и для определенности рассмотрим значение $S_3 = 1 - \sqrt{\delta}$.

Упростим подынтегральное выражение, учитывая, что в рассматриваемом случае $\beta = B - 1 < \delta \ll 1$ и $\alpha = 1 - A < 2\sqrt{\delta} \ll 1$.

Оценка для пределов интегрирования по ϑ имеет вид

$$Y_+^2 = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} - \alpha, \quad Y_- = 0$$

Пределы интегрирования по φ такие же, как в основном случае. Результат интегрирования таков

$$e_{11} = \frac{4\sqrt{2}c_0}{15} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{7/4} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0 \quad (4.4)$$

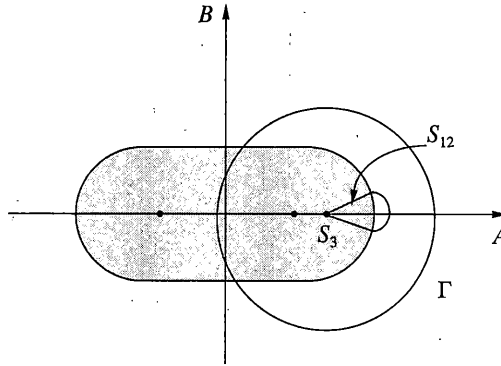
$$c_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}t} - (1 + \sqrt{2}t)[7 + 2\sqrt{2}t - 4t^2 - (1 + \sqrt{2}t)\sqrt{3 + 2\sqrt{2}t}]} dt$$

Приближенное вычисление этого интеграла дает значение $c_0 = 5.884$. Отметим, что изменился показатель степени нелинейной функции, входящей в формулу (4.4), он стал равным 7/4.

1б) Аналогично рассматривается случай точного равенства $S_3 = 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. В этом случае получаются формулы, близкие к (4.4):

$$e_{11} = \frac{128}{35} \sqrt{2} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{7/4} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0$$



Фиг. 6

2) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на фиг. 6. Соотношение между главными значениями тензора напряжений таково, что $S_3 > 1$, $0 \leq S_{13} - 1 \ll 1$. Второе неравенство следует из геометрически наглядного соотношения $S_3 + S_{12} - 2 \ll 1$ при условии $S_3 + S_{12} = 2S_{13}$. В этом случае $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Максимальное значение имеет главное касательное напряжение $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Введем малый параметр $\delta = S_{13} - 1$. Подынтегральное выражение в (3.9) можно упростить, учитывая, что $\alpha = A - 2 < 2\delta \ll 1$ и $\beta = B < 2\sqrt{\delta} \ll 1$. С точностью до величин следующего порядка малости вычисляются пределы интегрирования по ϑ : $Y_{\pm}^2 = 1/2 \pm 1/2\sqrt{\alpha + \beta^2/2}$. Оценки с точностью до $O(\delta)$ для компонент тензора скоростей пластической деформации (3.3) дают:

$$e_{11} = \int \int_{\vartheta, \varphi} (\tau^2 - 1)(\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$e_{22} = 0, \quad e_{33} = -e_{11}$$

Используя формулы (4.2), можно проинтегрировать по ϑ .

Для нахождения пределов $\varphi_{\pm}$ интегрирования по φ используем условие пересечения двух окружностей (фиг. 6): $(A - 1)^2 + B^2 = 1$ и $(A - S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2$. В результате получим

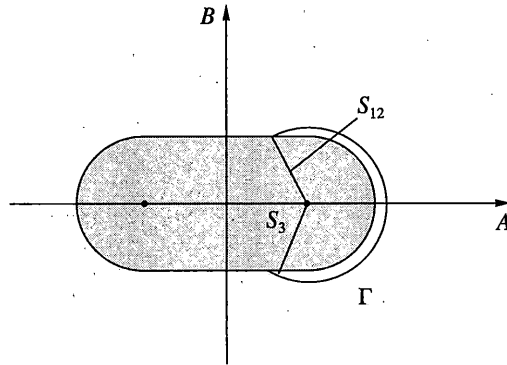
$$\varphi_{\pm} = \pm 2 \sqrt{\frac{S_{13}(S_{13} - 1)}{S_{12}(S_3 - 1)}}$$

Опуская громоздкие выкладки интегрирования, приведем результат:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{S_{12}(1 - S_{12})}} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta \quad (4.5)$$

$$e_{22} = 0, \quad e_{33} = -e_{11}$$

Рассмотренный случай соответствует скольжению (зонам пластичности) в окрестности углов $\vartheta = \pi/4$ и $\varphi = 0$. Отметим, что и в этом случае коэффициент перед нелинейной функцией в (4.5) зависит от среднего касательного напряжения S_{12} . Полученные формулы (4.5) не работают при $S_{12} - 1 \ll 1$ и $S_{12} \ll 1$. Эти случаи рассматриваются отдельно.



Фиг. 7

2а) Рассмотрим предельный случай $S_3 = 2$ и введем малый параметр $S_{12} = \delta \ll 1$. При этом справедливо неравенство $S_{13} - 1 = \delta/2 \ll 1$. Главные значения тензора напряжений подчиняются соотношению $\sigma_1 \geq \sigma_2 > \sigma_3$. В этом случае угол φ изменяется в широком диапазоне от $-\pi/4$ до $\pi/4$, а все компоненты тензора скоростей пластической деформации имеют один порядок и вычисляются по формулам (3.9).

Пределы интегрирования по ϑ равны $Y_{\pm}^2 = 1/2 \pm 1/2 \sqrt{\delta \cos 2\varphi}$. Вычисления искомых компонент дают результат:

$$e_{11} = c_{11} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{3/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

$$e_{33} = c_{33} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{3/2} \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right) / \eta$$

$$e_{22} = (c_{33} - c_{11}) \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{3/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

$$c_{11} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \psi} \sin \psi (1 + \sin \psi) d\psi, \quad c_{33} = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \psi} \sin \psi d\psi$$

Приближенное вычисление этих интегралов дает значения $c_{11} \approx 1.593$, $c_{33} \approx 1.748$.

3) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на фиг. 7. При этом $S_3 = 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \leq 1$. В этом случае $\sigma_2 = \sigma_3$. Угол φ изменяется в широком диапазоне от $-\pi/4$ до $\pi/4$, что соответствует кардинальной перестройке зон скольжения (пластических зон) от режима I к режиму 2).

Интеграл (3.9) по "шапочкам"-частям контура Γ , выступающим за линии $B = \pm 1$, вычислен в Iе). Вычислим этот интеграл по оставшейся части контура Γ , лежащей между линиями $B = \pm 1$. Малым параметром δ здесь является расстояние между двумя концентрическими окружностями (фиг. 7): $\delta = S_{12} - 1$.

Выражения для пределов интегрирования по ϑ имеют вид

$$Y_{\pm}^2 = \frac{\cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \pm \frac{\sqrt{2(1 + \cos 2\varphi)}}{(1 + \cos 2\varphi)^2} \sqrt{\delta}$$

В данном случае все компоненты e_{11} , e_{22} , e_{33} имеют один порядок и для их вычисления необходимо использовать полные формулы (3.9).

Пределы интегрирования по φ находятся из условия пересечения прямых $B^2 = 1$ и окружности $(A - 1)^2 + B^2 = S_{12}^2$, т.е. $\cos^2 2\varphi_{\pm} = 2\delta$.

После интегрирования по ϑ с использованием формул (4.2), при интегрировании по φ возникает двойственная ситуация.

Разобьем интервал интегрирования на две части: окрестность пределов интегрирования, где $\cos^2 \varphi \sim O(\delta)$, и внешность этой окрестности. Оценим искомый интеграл по каждой из этих частей.

При $\cos^2 2\varphi \sim O(\delta^{1-\chi})$, $0 < \chi \leq 1$ (т.е. вдали от пределов интегрирования $\varphi_{\pm}$) можно использовать формулы (4.2) и получить оценки

$$e_{11, 22, 33} \sim O(\delta^{3/2}) \quad (4.6)$$

Если же переменная интегрирования φ близка к пределам интегрирования $\varphi_{\pm}$, т.е. $\cos^2 \varphi \sim O(\delta)$, то можно получить оценки $Y_{\pm}^2 \sim \sqrt{\delta}$, $I_k \sim \delta^{k/2 + 5/4}$, из которых следует, что $e_{11, 22, 33} \sim I_k|_{k=0} \sqrt{\delta} \sim \delta^{7/4} = o(\delta^{3/2})$. Следовательно, главной частью интеграла будет та, которая соответствует оценкам (4.6) и его значение мало изменится, если пределы интегрирования по φ формально положить такими, что $\cos^2 2\varphi_{\pm} = 0$. В этом случае выкладки в соответствии с формулами (4.2) дают результат:

$$\begin{aligned} e_{22} &= 2\sqrt{2}C_{22}\left\langle\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1\right\rangle^{3/2}\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)/\eta \\ e_{33} &= 2\sqrt{2}C_{33}\left\langle\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1\right\rangle^{3/2}\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)/\eta \\ e_{11} &= 2\sqrt{2}(C_{22} + C_{33})\left\langle\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1\right\rangle^{3/2}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)/\eta \\ C_{22} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \sin \psi)}{(1 + \sin \psi)^3} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin \psi}}, \quad C_{33} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin \psi}}{(1 + \sin \psi)^3} d\psi \end{aligned} \quad (4.7)$$

Приближенное вычисление последних интегралов с интегрируемой особенностью при $\psi = 0$ дает значение $C_{22} \approx 0.916$, $C_{33} \approx 0.557$.

Из (4.7) видно, что и в этом случае показатель нелинейности изменился с изменением соотношений между главными напряжениями (в зависимости от этих соотношений он равнялся 2, 7/4, 2, 3/2).

5. Обсуждение результатов. Таким образом, в предположении малой вязкости удалось получить явные соотношения, связывающие компоненты тензора скоростей пластической деформации и тензора напряжений. Эти выражения сходны с соотношениями упруговязкопластической модели, однако поверхностью текучести является поверхность типа Треска, а не Мизеса (как в классической теории). Также отметим факт неоднородности по напряженному состоянию показателя нелинейности функции релаксации, который принимает различные значения: 2, 7/4, 3/2. В классической теории он считается постоянным.

Выпишем полученные уравнения в сжатом виде для компоненты e_{11} :

$$e_{11} = C_1 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \quad -1 < S_3 < 1$$

$$e_{11} = C_2 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{7/4} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \quad S_3 \leq 1$$

$$e_{11} = C_3 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{3/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \quad S_3 = 1$$

$$e_{11} = C_4 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad S_3 > 1$$

$$e_{11} = C_5 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{3/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 > \sigma_3, \quad S_3 = 2$$

Коэффициенты $C_{1,2,3,4,5}$ зависят от промежуточных главных касательных напряжений.

Для сравнения выпишем классические уравнения упруговязкопластической модели в главных напряжениях для компоненты тензора скорости пластической деформации e_{11} :

$$e_{11} = \frac{2}{3} \left\langle \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2)} - 1 \right\rangle^k \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

Как и в классическом случае, полученные выражения для тензора скоростей пластической деформации можно использовать для формулировки замкнутой системы уравнений, включающей уравнения движения сплошной среды, уравнения для тензора скоростей упругой деформации и уравнения связи между тензорами скоростей полной, упругой и пластической деформации.

6. Тензор скоростей деформации для вязкой жидкости и тензор деформации для упругого твердого тела. Представляет интерес с помощью концепции скольжения получить выражения для тензора скоростей деформации в вязкой жидкости и тензора деформации в упругом теле.

Вязкая жидкость. Условие скольжения на выделенной плоскости с нормалью $\mathbf{n}$ в принятых обозначениях имеет вид $d\gamma = \tau d\Omega / \eta$. Из (2.2) в этом случае следуют выражения для главных значений тензора скорости деформации типа (3.3):

$$e_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

$$e_{22} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

$$e_{33} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

В результате интегрирования получим:

$$e_{kk} = \frac{2\pi}{5} \frac{\sigma_k - p}{\eta} \quad (k = 1, 2, 3)$$

В тензорной форме это соотношение принимает стандартный вид $\mathbf{s} = \tilde{\eta} \cdot \mathbf{e}$, где $\mathbf{s}$ – дивизор тензора напряжений, $\mathbf{e}$ – тензор скорости деформации, $\tilde{\eta} = 5\eta/2\pi$ – “макроскопическая” вязкость.

Упругое тело. В этом случае условия скольжения включают соотношения для векторов $d\chi$ и $d\omega$, связанных с относительными касательными смещениями $[\mathbf{u}_\tau]$ и нормальными смещениями $[\mathbf{u}_n]$, а не скоростями, как в предыдущих случаях. Эти соотношения примем в виде

$$d\chi = \tau d\Omega/k_\tau, \quad d\omega = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) n d\Omega/k_n$$

где k_τ и k_n – коэффициенты жесткости сдвиговых и нормальных связей “пружинного” типа на плоскости скольжения. Вклад этих сдвиговых и нормальных смещений в тензор деформации $d\epsilon$ равен

$$d\epsilon = (\mathbf{n} \otimes (d\chi + d\omega) + (d\chi + d\omega) \otimes \mathbf{n})/2$$

Выражения для главных значений тензора деформаций примут вид

$$\epsilon_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_1 - \sigma_0)/k_\tau + \sigma_0/k_n) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\epsilon_{22} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_2 - \sigma_0)/k_\tau + \sigma_0/k_n) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\epsilon_{33} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_3 - \sigma_0)/k_\tau + \sigma_0/k_n) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

В результате интегрирования получим

$$\epsilon_{kk} = \frac{2\pi}{5} \left[\left(\frac{2}{3k_n} + \frac{1}{k_\tau} \right) \sigma_k - \left(\frac{1}{k_\tau} - \frac{1}{k_n} \right) p \right]$$

В классической теории упругости соответствующие уравнения имеют вид

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{2\mu} \sigma_k - \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p$$

где λ и μ – “макроскопические” модули упругости Ламе.

Отсюда вытекают формулы связи локальных коэффициентов жесткости с модулями упругости:

$$k_n = \frac{2\pi}{3}(3\lambda + 2\mu), \quad k_\tau = \frac{2\pi}{3} \frac{2\mu}{2\mu + 5\lambda}(3\lambda + 2\mu)$$

7. Выводы. Для конкретного нелинейного локального условия скольжения в случае произвольного трехмерного напряженного состояния получены макроскопические уравнения сплошной среды упруговязкопластического типа. Предложенный метод интегрирования можно использовать для установления связи между локальными условиями и макроскопическими уравнениями при некоторых других условиях скольжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-0245а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батдорф С.Б., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // В сб.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. № 1. С. 135–155.

2. Койтер В.Т. Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упругопластических материалов с сингулярной поверхностью текучести // В сб.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. № 2. С. 117–129.
3. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне, 1971. 147 с.
4. Швайко Н.Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 11. С. 12–24.
5. Малмейстер А.К. Основы теории локальности деформаций // Механика полимеров. 1965. № 4. С. 12–27.
6. Мохель А.Н., Салганик Р.Л., Христианович С.А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчеты по ним // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 119–141.
7. Никитин И.С. Динамика слоистых и блочных сред с проскальзыванием и трением. Препринт N366 М.: Изд-е ИПМ АН СССР, 1989. 42 с.
8. Никитин И.С. О распространении волн в слоистых и блочных средах с трением на контактных границах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 7. С. 3–11.
9. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
10. Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.12.2005