

УДК 624.07:534.1

© 2006 г. Н.В. ЖАРКОВА, Л.В. НИКИТИН

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Стержень – один из наиболее распространенных элементов разнообразных конструкций. Он является простейшей моделью для многих инженерных устройств. К ним относятся шток, клапан, свая, колонна, столб, шкворень, шпилька, струна, трос, штанга и др. Относительная простота математического описания механического поведения стержня привлекает внимание исследователей из разных областей науки и техники.

Настоящая статья, носящая отчасти обзорный характер, посвящена решению прикладных задач динамики стержней, имеющих разнообразные приложения в физике и технике.

Основной рассматриваемой задачей является динамика упругого стержня, один из торцов которого взаимодействует с ударяющей по нему массой, а на другом конце, в зависимости от характера приложений, задается либо перемещение (жесткая заделка), либо связь между напряжениями и перемещением (упругая заделка), либо предельное напряжение (жесткопластическая заделка). В некоторых задачах учитывается взаимодействие боковой поверхности по закону сухого трения с окружающей средой и сила тяжести.

Впервые подобного рода задачи были рассмотрены Буссинеском и Сен-Венаном, в работах которых проанализирован удар жестким телом по торцу упругого стержня, другой конец которого жестко закреплен. Результаты Буссинеска и Сен-Венана излагаются во многих монографиях, например у Лява и Тимошенко [1, 2, 3].

В настоящей статье приведено решение этой задачи для произвольного момента времени и уточнено время отскока массы от стержня. Кроме того, в этой задаче учтена сила тяжести стержня и жесткого тела и сопротивление по закону сухого трения по боковой поверхности.

Развитием исследований Буссинеска и Сен-Венана явилось рассмотрение задачи о штамповочном молоте. Штамповочный молот моделируется стержнем, по одному из торцов которого ударяют разгоняемым до некоторой скорости поршнем, а на другом конце находится штампуемая деталь.

В простейшем случае эта задача с целью расчета возникающих в штоке напряжений была сформулирована и приближенно решена в работе [4]. Точное решение этой задачи, полученное в [5], распространено на случаи упругих и жесткопластических свойств штампуемой детали. Судя по последующим, посвященным рассмотрению этой задачи, многочисленным публикациям, например [6], работа [5] оказалась незамеченной. Частным случаем задачи является задача об ударе клапана двигателя о седло (упругую заделку), поставленная и рассмотренная в [7].

**1. Постановка задачи. Основные уравнения и их решение.** Основным элементом всех рассматриваемых задач является тонкий однородный упругий стержень длины  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$ , с линейной плотностью  $\rho$ , массой  $M$  и модулем Юнга  $E$ .

Задача является одномерной, напряженное состояние одноосным с нормальным напряжением  $\sigma$ , продольным смещением  $u$ , деформацией  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  и скоростью сечений  $v = \partial u / \partial t$ . Все характеристики движения зависят от пространственной координаты  $x$ , которую выберем направленной вдоль стержня, и времени  $t$ .

На торцах стержня задаются различные граничные условия. По боковой поверхности может действовать сила сопротивления сухого трения  $\tau_{\text{fr}}$  [8]. Следуя кулоновскому закону сухого трения, модуль приведенной предельной силы трения равен  $\tau_{\text{fr}} = fpL/S$ , где  $p$  – давление между поверхностью стержня и окружающей средой,  $L$  – периметр контакта,  $f$  – коэффициент трения. При вертикальном движении будет иногда учитываться сила инерции.

Уравнение движения в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho q \tag{1.1}$$

Здесь  $q$  в общем случае равно  $g + \kappa \tau_{\text{fr}}$ ,  $g$  – сила тяжести. Напряжение  $\sigma$  связано с продольной деформацией законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), (1.2) удобно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно напряжения и скорости или в виде одного дифференциального уравнения второй степени относительно перемещения  $u$ :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho q \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q \tag{1.3}$$

где  $a = (E/\rho)^{1/2}$  – скорость распространения упругих волн в стержне. При формулировке конкретных задач уравнения системы (1.3) дополняются начальными и граничными условиями.

Уравнения (1.3) являются гиперболическими. Характеристики системы (1.3) и соотношение вдоль них имеют вид

$$dx = \pm a dt, \quad \pm d\sigma = a\rho dv + qadt \tag{1.4}$$

Решения уравнений (1.3) могут иметь слабые и сильные разрывы. Последние, если они возникают, удовлетворяют соотношениям

$$[\sigma] \pm a\rho[v] = 0, \quad x = \pm at + \text{const} \tag{1.5}$$

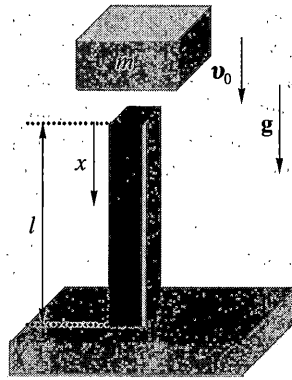
Квадратные скобки здесь и в дальнейшем означают скачки величин, заключенных в них. Слабые разрывы, отделяющие области покоя от областей движения, распространяются с дозвуковыми скоростями, а отделяющие области движения от областей покоя со сверхзвуковыми [8].

Переключатель сухого трения  $\kappa$  [8] в случае движения совпадает со знаком скорости, а в покое принимает любое значение, не превышающее по модулю единицы  $|\kappa| \leq 1$ .

В покое уравнение движения переходит в уравнение равновесия

$$\partial \sigma / \partial x = \kappa_{\text{st}} \tau_{\text{fr}} \tag{1.6}$$

которое служит для нахождения величины  $\kappa_{\text{st}}$ . В общем случае уравнение (1.6) не является частным случаем уравнения (1.1) при  $v = 0$ .



Фиг. 1

Наличие  $k$  делает задачу существенно нелинейной. Если  $k$  не изменяется в некоторой области переменных  $(x, t)$ , где стержень находится в движении, то  $k$  там равно 1 или  $-1$  и уравнения (1.3) могут быть проинтегрированы вдоль характеристик (1.4). В этом случае получается обобщенное решение Даламбера

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho q x / 2 + f(at + x) - \varphi(at - x) \\ a\rho v &= -\rho q at / 2 + f(at + x) + \varphi(at - x) \\ E u &= -\frac{1}{4} \rho q (a^2 t^2 - x^2) + \int_0^{at+x} f(\eta) d\eta + \int_0^{at-x} \varphi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $f(\eta)$  и  $\varphi(\xi)$  – произвольные функции своих аргументов. Решение конкретных задач заключается в нахождении функций  $f$  и  $\varphi$  по начальным, граничным и, возможно, дополнительным условиям.

**2. Продольный удар жестким телом по упругому стержню.** Рассматривается ставшая уже классической задача об ударе летящим со скоростью  $v_0$  жестким телом массы  $m$  по стержню длины  $l$  (фиг. 1). Постановка и решение этой задачи восходят к Буссинеску и Сен-Венану. Имея в виду технические приложения, в исходной задаче учитывается собственный вес стержня и (или) сопротивление, которое по закону сухого трения Амонтона–Кулона оказывает ему окружающая среда. В рассматриваемой задаче наряду с характерной длиной затухания ступенчатого импульса напряжения  $\sigma_0$  или скорости  $v_0$ , равной  $l_f = 2\sigma_0/\tau_{fr} = 2a\rho v_0/\tau_{fr}$ , появляется другая характерная длина  $l_i = m/(\rho S)$ , представляющая собой отношение массы ударяющего тела к погонной массе стержня.

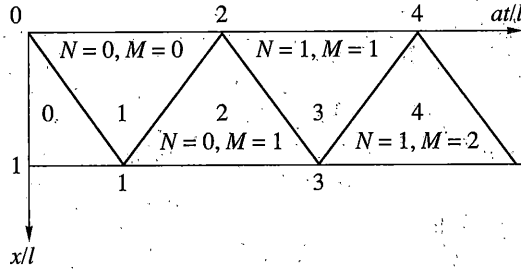
Расположим стержень вдоль оси  $x$ , поместив ее начало  $x = 0$  на верхнем конце стержня (фиг. 2). До удара стержень считаем покоящимся и ненапряженным:  $u(x, t) = 0$ ,  $\sigma(x, t) = 0$ ,  $v(x, t) = 0$ ,  $0 < x < l$ ,  $t \leq 0$ . Решение системы (1.3) должно удовлетворять начальным условиям

$$t = 0, \quad 0 < x < l: \quad v = 0, \quad \sigma = 0 \quad (2.1)$$

В момент удара скорость торцевого сечения стержня  $x = 0$  мгновенно принимает скорость ударяющей по нему массы  $v_0$  и до момента отскока тела движение его сечения описывается дифференциальным уравнением

$$m \partial v(0, t) / \partial t + mg = S \sigma(0, t), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

с начальным условием  $v(0, 0) = v_0$ .



Фиг. 2

Будем пока считать, что противоположный конец  $x = l$  жестко закреплен:

$$u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$

В момент удара возникает ударная волна сжатия. Примем, что трение не велико. Тогда  $l_f$  будет значительно больше  $l$ , и истощение разрыва на фронте ударной волны произойдет после многократных отражений от обоих концов стержня. Возникающая волновая картина будет состоять из многочисленных областей, изображенных на фиг. 2. Напряжение на ударяемом конце  $\sigma(0, t)$  сжимающее. Если оно исчезнет, то произойдет отскок. Обозначим через  $t_0$  момент отскока, так что

$$0 < t < t_0: \sigma(0, t) < 0, \quad t \geq t_0: \sigma(0, t) = 0 \tag{2.4}$$

где  $t_0$  – решение уравнения  $\sigma(0, t_0) = 0$ .

Массовая сила  $q$  в правой части уравнений (1.3) при учете сопротивления внешней среды, равная  $k\tau_{fr}$ , делает задачу нелинейной. Однако в силу того, что в области движения стержня  $k$  не меняется и равно 1, задача становится линейной. Поэтому ее решения будем искать с помощью преобразования Лапласа–Карсона [9]:

$$f(t) \rightarrow \bar{f}(t) = f(p), \quad f(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \tag{2.5}$$

здесь и далее  $p$  – параметр преобразования, черта над буквой означает трансформанту Лапласа  $f(p)$ .

После интегрального преобразования (2.5) с учетом начальных условий (2.1) уравнения (1.3) для трансформант перемещения, скорости и напряжения будут следующими

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2} \bar{u} + \frac{\tau_{fr}}{a^2 \rho} e^{-px/a} \tag{2.6}$$

$$\bar{v} = p \bar{u}, \quad \bar{\sigma} = E d \bar{u} / dx$$

Граничные условия (2.2), (2.3) запишутся в виде

$$x = 0: pm(\bar{v} - v_0) + mg = S \bar{\sigma}$$

$$x = l: \bar{v} = 0 \tag{2.7}$$

Пользуясь граничными условиями (2.7), получим решение задачи в трансформантах

$$\bar{u} = \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{-px/a} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{px/a} - \frac{\tau_{fr}}{2ap\rho} x e^{-px/a}$$

$$\bar{v} = p \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{-px/a} + p \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{px/a} - \frac{\tau_{\text{fr}}}{2a\rho} x e^{-px/a} \quad (2.8)$$

$$\bar{\sigma} = -E \frac{p\Delta_1}{a\Delta} e^{-px/a} + E \frac{p\Delta_2}{a\Delta} e^{px/a} - E \frac{\tau_{\text{fr}}}{2a\rho p} e^{-px/a} + E \frac{\tau_{\text{fr}}}{2a^2\rho} x e^{-px/a}$$

$$\Delta = \left(p + \frac{a}{l_i}\right) e^{p/l_i} - \left(p - \frac{a}{l_i}\right) e^{-p/l_i}$$

$$\Delta_1 = v_0 e^{p/l_i} - g \frac{1}{p} e^{p/l_i} + \frac{1}{2} \tau_{\text{fr}} \left( l \frac{S}{m} \frac{1}{p} e^{-p/l_i} - \frac{1}{a\rho} l e^{-p/l_i} - \frac{1}{p^2} \frac{aS}{m} e^{p/l_i} \right)$$

$$\Delta_2 = -v_0 e^{-p/l_i} + g \frac{1}{p} e^{-p/l_i} + \frac{1}{2} \tau_{\text{fr}} \left( \frac{1}{a\rho} l e^{-p/l_i} + \frac{S}{m} \frac{l}{p} e^{-p/l_i} + \frac{aS}{m} \frac{1}{p^2} e^{-p/l_i} \right)$$

Для перехода к оригиналам в выражениях (2.8) удобно освободиться от знаменателя  $\Delta$ , разложив его в ряд

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p - \alpha/l_i)^n}{(p + \alpha/l_i)^{n+1}} e^{-pl(2n+1)/a}$$

а затем воспользоваться формулами обратного преобразования с применением полиномов Лагерра [10]:

$$\frac{p(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} \rightarrow e^{-\alpha t} L_n(2\alpha t), \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (2.9)$$

где  $\alpha = \text{const}$ , а  $L_n(x)$  – полином Лагерра  $n$ -ой степени. При переходе к оригиналам верхние пределы сумм становятся конечными, равными  $N = \{(at - x)/2l\}$  и  $M = \{(at + x)/2l\}$ , где фигурные скобки означают целую часть заключенного в них числа. Их значения для первых нескольких областей указаны на фиг. 2. Приведем оригинал перемещения

$$\begin{aligned} u = & \left( \sum_{n=0}^N L_n^1(\eta_n) - \sum_{n=0}^{M-1} L_n^1(\xi_n) \right) v_0 l_i / a + \left( \sum_{n=0}^{M-1} L_n^2(\xi_n) - \sum_{n=0}^N L_n^2(\eta_n) \right) g l_i^2 / a^2 + \\ & + \tau_{\text{fr}} \left( \sum_{n=0}^{N-1} L_n^2(\eta_n - l/l_i) + \sum_{n=0}^{M-1} L_n^2(\xi_n) \right) l S l_i^2 / (2ma^2) - \tau_{\text{fr}} \left( \sum_{n=0}^N L_n^3(\eta_n) + \sum_{n=0}^{M-1} L_n^3(\xi_n) \right) S l_i^3 / (2ma^2) - \\ & - \tau_{\text{fr}} \left( \sum_{n=0}^{N-1} L_n^1(\eta_n - l/l_i) + \sum_{n=0}^{M-1} L_n^1(\xi_n) \right) l l_i / (2a^2 \rho) - \tau_{\text{fr}} (atx - x^2) / (2a^2 \rho) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$L_n^0(x) = e^{-x} L_n(2x), \quad L_n^1(x) = \int_0^x L_n^0(y) dy, \quad L_n^2(x) = \int_0^x L_n^1(y) dy, \quad L_n^3(x) = \int_0^x L_n^2(y) dy$$

$$\xi_n = (at + x - 2l(n+1))/l_i, \quad \eta_n = (at - x - 2nl)/l_i$$

Оригиналы скорости и напряжения получаются из (2.10) путем дифференцирования по  $x$  и  $t$  соответственно.

Расшифруем решение нашей задачи для нескольких первых отраженных волн (фиг. 2). В нулевой области  $0 < at < x$  имеет место покой:  $\sigma = 0, v = 0, u = 0$ . В первой области, в которой временной интервал меняется в пределах  $x < at < 2l - x, N = 0, M = 0$ , имеем

$$u = \frac{v_0 l_i}{a} (1 - e^{-(at-x)/l_i}) + \frac{g l_i^2}{a^2} \left( 1 - e^{-(at-x)/l_i} + \frac{at-x}{l_i} \right) + \frac{\tau_{fr}}{2\rho} \left( -\frac{a^2 t^2 - x^2}{2a^2} + \frac{l_i^2}{a^2} (1 - e^{-(at-x)/l_i}) + \frac{l_i^2}{a^2} \left( \frac{at-x}{l_i} \right) \right) \quad (2.11)$$

$$\sigma = -a\rho v_0 e^{-(at-x)/l_i} + g(1 - e^{-(at-x)/l_i})\rho l_i + \tau_{fr}(l_i e^{-(at-x)/l_i} - l_i + x)/2 \quad (2.12)$$

$$v = v_0 e^{-(at-x)/l_i} + g l_i (e^{-(at-x)/l_i} - 1)/a - (l_i e^{-(at-x)/l_i} - l_i + at)/(2a\rho) \quad (2.13)$$

Отметим, что это решение будет справедливым только до тех пор, пока скорость не меняет знак. Согласно (2.13) скорость обращается в нуль вдоль кривой

$$a = xt + l_i \ln \frac{g l_i l_f - a v_0 l_i + a^2 v_0 t}{g l_i l_f - a v_0 l_i + a v_0 l_f} \quad (2.14)$$

Апостериори видно, что использование преобразования Лапласа в этой нелинейной за счет сухого трения задаче оправдано, так как линии  $t = \text{const}$  пересекают кривую (2.14) только в одной точке. Здесь возникает отдельная проблема нахождения области допустимых решений задачи [11]. Не будем здесь останавливаться на этом вопросе. Ограничимся ниже рассмотрением случая отсутствия сухого трения и силы тяжести. Тогда решение (2.10) упрощается и принимает вид

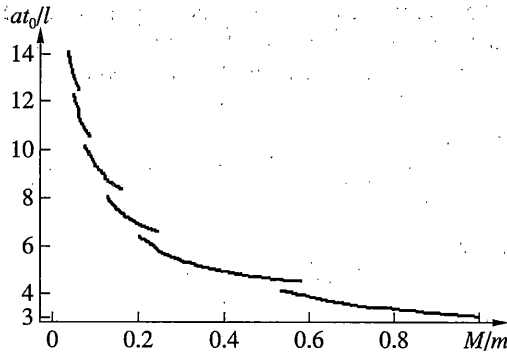
$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=0}^M L_n^0(\eta_n) - \sum_{n=0}^N L_n^0(\xi_n) \quad (2.15)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = - \sum_{n=0}^M L_n^0(\eta_n) - \sum_{n=0}^N L_n^0(\xi_n) \quad (2.16)$$

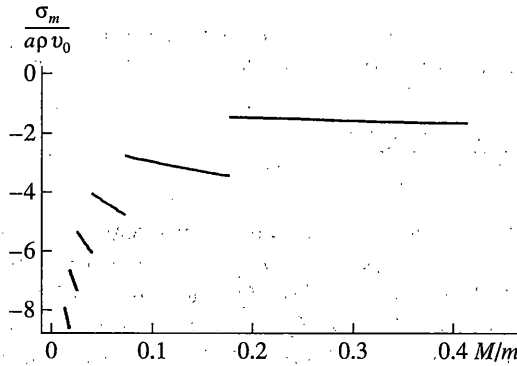
Получим и исследуем решение для бóльших времен, нежели в предыдущих исследованиях. Эта цель преследовалась в недавней работе [12], где решение было получено вплоть до 7-ой области. Применение полиномов Лаггера позволило без труда раскрыть общее решение (2.15), (2.16) вплоть до 13-ой области и, что более важно, уточнить классическое решение. Сен-Венаном определялись максимальные сжимающие напряжения  $\sigma_m$  на ударяемом конце  $x = 0$  и продолжительность удара, то есть зависимость времени отскока  $t_0$  от отношения масс стержня и ударяющего тела  $h = l/l_i = M/m$ .

Приведем расшифровку решений (2.15) и (2.16) для нескольких первых отражений волн, то есть для нескольких первых областей на фиг. 2. Нулевая область  $0 < at < x$  – область покоя:  $v = 0, \sigma = 0$ . Решения в областях 1, 2 и 3 следующие:

$$x < at < -x + 2l: \frac{v}{v_0} = e^{-h(at-x)/l}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = -e^{-h(at-x)/l} \quad (2.17)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$-x + 2l < at < x + 2l: \frac{v}{v_0} = e^{-h(at-x)/l} - e^{-h(at-x-2l)/l}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = -e^{-h(at-x)/l} - e^{-h(at-x-2l)/l}$$

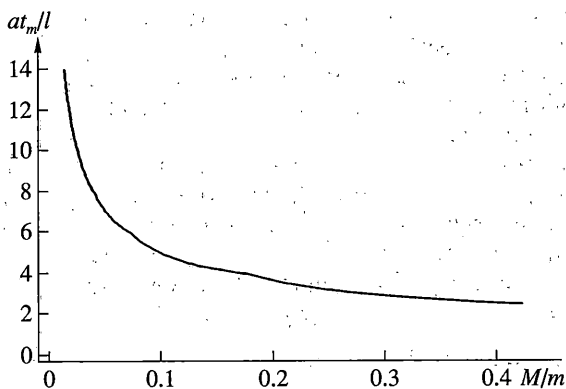
$$x + 2l < at < -x + 4l: \frac{v}{v_0} = e^{-h(at-x)/l} - e^{-h(at+x-2l)/l} + \left(1 - 2h\left(\frac{at-x-2l}{l}\right)\right) e^{-h(at-x-2l)/l}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = -e^{-h(at-x)/l} - e^{-h(at+x-2l)/l} - \left(1 - 2h\left(\frac{at-x-2l}{l}\right)\right) e^{-h(at-x-2l)/l}$$

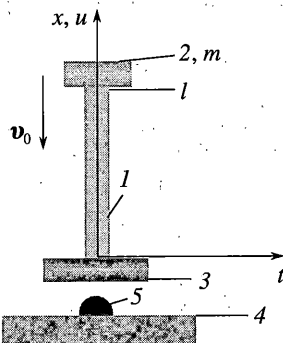
Аналогично получаются решения и для следующих областей. Они здесь не приводятся из-за их громоздкости, однако используются при графическом анализе решений на фиг. 3. Используя эти решения, найдем максимальные напряжения  $\sigma_m$  и зависимость времени отскока  $t_0$  от отношения масс стержня и ударяющего тела  $h$ .

Из (2.17) следует, что в области 1 и во всех четных областях отскока произойти не может. В области 3 отскок может произойти при  $0.579 \leq h \leq 1$  и в явном виде задается зависимостью  $\tau_0 = 2 + h^{-1} + h^{-1}e^{-2h}/2$ , где  $\tau_0 = at_0/l$  – безразмерная величина, характеризующая момент отскока.

В других областях отскок происходит при  $0.393 \leq h < 0.579$  (в 5-ой),  $0.136 \leq h < 0.393$  (в 7-ой),  $0.088 \leq h < 0.136$  (в 9-ой),  $0.061 \leq h < 0.088$  (в 11-ой) и  $0.045 \leq h < 0.061$  (в 13-ой).



Фиг. 5



Фиг. 6

Зависимости момента отскока  $\tau_0$  от отношения масс  $h$  для 3, 5, 7, 9, 11 и 13 областей представлены на фиг. 3.

Здесь видно, что продолжительность удара увеличивается с уменьшением отношения масс  $h$ . Сен-Венан вычислял  $\tau_0$  для  $h = 1, 1/2, 1/4$  и  $1/6$ . При  $h = 1$  отскок происходит в области 3 и  $\tau_0 = 3.068$ , что практически совпадает с результатом данной работы и в [2, 12]. При  $h = 1/2$  отскок происходит в области 5 и полученный результат  $\tau_0 = 5.318$  значительно отличается от 4.708 в [2]. При  $h = 1/4$  отскок происходит в области 7 и результат  $\tau_0 = 6.657$  также отличен от 5.900 в [2]. При  $h = 1/6$  отскок происходит в области 7, но найденное  $\tau_0 = 7.4079$  мало отличается от [2] и практически совпадает с [12].

Максимальное сжимающее напряжение  $\sigma_m$  достигается на ударяемом конце в моменты  $t_m$ , когда скорость там обращается в ноль:  $v(0, t_m) = 0, \sigma(0, t_m) = \sigma_m$ , причем  $t_m$  должно быть больше всех  $t_0$  в предыдущих областях. Максимальное напряжение и время, когда оно достигается, также зависят от отношения масс. Соответствующие зависимости представлены на фиг. 4 и 5. На фиг. 4 представлены зависимости максимального напряжения от отношения масс для 3, 5, 7, 9, 11 и 13 областей, на фиг. 5 – зависимости времени, при котором достигается максимальное напряжение от отношения масс для тех же областей.

**3. Задача о динамике штамповочного молота.** Штамповочный молот схематизируется упругим стержнем–штоком (1) с присоединенными к нему поршнем (2), представляю-



щим собой жесткую массу  $m$ , и бабой (3), которая также считается жесткой. Шабот (4) также считаем жестким и недеформируемым. Будут рассмотрены три случая: (а) когда сопротивлением штампуемой детали (5) пренебрегается; (б) когда сопротивление моделируется упругой пружиной (фиг. 9) и (с) когда оно моделируется жесткопластической реакцией штампуемой детали.

Упругий стержень массы  $M$  длины  $l$  с присоединенными массами движется поступательно со скоростью  $v_0$  и в момент времени, принимаемый за начальный  $t = 0$ , ударяется нормально о жесткую преграду. Ось  $x$  направим вдоль стержня, поместив ее начало  $x = 0$  на нижнем конце, где к стержню присоединена баба (фиг. 6).

Движение молота описывается уравнениями (1.3) при  $q = 0$ . Начальными условиями будут

$$t = 0, \quad x = 0: v = 0, \quad u = 0, \quad \sigma = 0$$

$$t = 0, \quad 0 < x < l: v = -v_0$$

В случае а) на нижнем конце  $x = 0$  штока  $v(0, t) = 0, t > 0$ . На верхнем конце  $x = l$  имеет место дифференциальное уравнение закона движения поршня

$$S\sigma = -m\partial v/\partial t, \quad t \geq 0, \quad x = l \quad (3.1)$$

с начальным условием  $v(l, 0) = 0$ .

Решение ищем с помощью преобразования Лапласа–Карсона и полиномов Лагерра, как в п. 2. После прямого и обратного преобразований (2.5), (2.9) решение для напряжений принимает вид

$$\sigma(x, t) = 0, \quad at < x$$

$$\sigma(x, t) = -\rho v_0 \left( \sum_{n=0}^N (L_n^0(\eta_n) + L_n^1(\eta_n)) + \sum_{n=0}^{M-1} (L_n^0(\xi_{n+1}) - L_n^1(\xi_{n+1})) \right), \quad at > x \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) легко получить решение задачи для нескольких первых областей:

$$0 < at < x: \sigma = 0 \text{ (область покоя)}$$

$$x < at < 2l - x: \sigma = -\rho v_0 \quad (3.3)$$

$$2l - x < at < 2l + x: \sigma = -2\rho v_0 e^{-h(at+x-2l)/l} \quad (3.4)$$

$$2l + x < at < 4l - x: \sigma = \rho v_0 (1 - 2(e^{-h(at+x-2l)/l} + e^{-h(at-x-2l)/l}))$$

$$4l - x < at < 4l + x: \quad (3.5)$$

$$\sigma = -2\rho v_0 (e^{-h(at+x-2l)/l} + e^{-h(at-x-2l)/l} - 2h(at+x-4l)l^{-1} e^{-h(at+x-4l)/l})$$

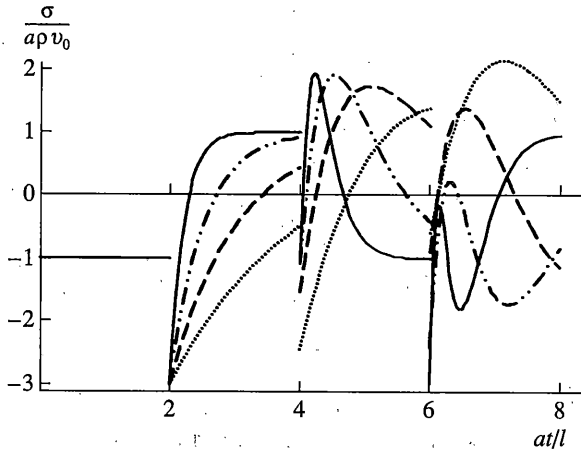
Наиболее опасным местом является сечение стержня  $x = 0$ . Напряжения там будут:

$$0 < at/l < 2: \sigma = -\rho v_0$$

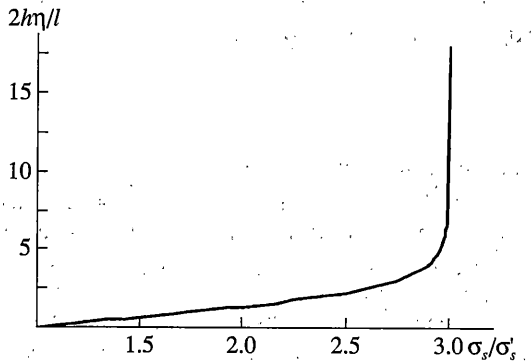
$$2 < at/l < 4: \sigma = \rho v_0 (1 - 4e^{-h(at-2l)/l})$$

$$4 < at/l < 6: \sigma = -\rho v_0 (1 + 4e^{-h(at-2l)/l} - 8h(at/l-4)e^{-h(at-4l)/l}) \quad (3.6)$$

$$6 < at/l < 8: \sigma = \rho v_0 (1 - 4e^{-h(at-2l)/l} + 8h(at/l-4)e^{-h(at-4l)/l} - 4(1 - 2h(at/l-6) + 2h^2(at/l-6)^2)e^{-h(at-6l)/l})$$



Фиг. 7

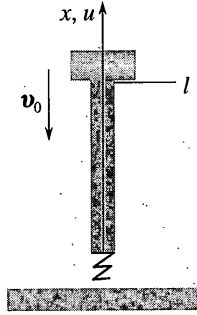


Фиг. 8

Отношение массы штока к массе поршня для существующих конструкций молотов [4] находится в пределах  $0.5 \leq h \leq 5$ . На фиг. 7 представлены графики изменения во времени напряжения на конце стержня  $x = 0$  для значений параметра  $h = 5; 2; 1; 0.5$ . На фиг. 7  $h = 5$  соответствует сплошная линия,  $h = 2$  – длинный штрих–двойной пунктирная,  $h = 1$  – длинный штрих – линия и  $h = 0.5$  – линия из квадратных точек. В 1-ой области напряжение постоянно и от  $h$  не зависит.

Максимальное по абсолютной величине значение напряжения  $|\sigma| = 3a\rho v_0$  независимо от массы поршня достигается в момент времени  $t = 2l/a$ , когда отраженная от поршня волна достигает нижнего сечения  $x = 0$ . Единственным условием этого является конечность массы поршня. С уменьшением же массы поршня  $m$ , т.е. с увеличением параметра  $h = M/m$ , уменьшается время, в течение которого напряжения сохраняют большую величину. Полагая  $E = 2 \cdot 10^3 \text{ кгс/мм}^2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ МН/м}^2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $v_0 = 6 \text{ м/с}$ ,  $a = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  получим  $\max|\sigma(0, \tau)| = 3a\rho v_0 = 72 \text{ МН/м}^2 = 7.2 \text{ кгс/мм}^2$ .

Для увеличения стойкости усталостному разрушению штоков обычно закаливают. Предпочтительной оказывается закалка только нижнего конца штока. Объяснить это можно тем, что оставшаяся незакаленной часть будет больше поглощать энергию, что приведет к снижению максимального напряжения на начальном участке.



Фиг. 9

Оптимальную границу закалки  $x = \eta$  можно определить из условия равной прочности закаленной и незакаленной частей штока усталостному разрушению. Это условие можно сформулировать в виде  $\max|\sigma|/\sigma_s = \max|\sigma'|/\sigma'_s$ , где штрихом отмечены значения величин, относящихся к незакаленной части. Тогда, пользуясь формулой (3.5), получим уравнение  $3arv_0/\sigma_s = arv(1 + 2e^{-2h\eta/l})/\sigma'_s$ , откуда

$$\eta = \frac{l}{2h} \ln \frac{2\sigma_s}{3\sigma'_s - \sigma_s} \quad (3.7)$$

На фиг. 8 представлен график зависимости величины  $2h\eta/l$  от  $\sigma_s/\sigma'_s$ . Если закалить меньшую, чем по формуле (3.7), часть штока, то граница закалки окажется более слабым местом, чем нижнее сечение штока  $x = 0$ . Если закалить большую часть штока, то в сократившейся незакаленной части штока рассеяние энергии будет меньше, и сечение  $x = 0$  окажется в более тяжелых условиях.

В условие равной прочности подставлялись максимальные по абсолютной величине напряжения. Они являются сжимающими и лишь изнашивают материал штока, разорвать шток они не могут.

Разрыв происходит за счет растягивающих напряжений, максимальная величина которых для рассматриваемого интервала времени  $0 \leq at/l \leq 8$  и для  $1 < h < 5$  в сечении  $x = 0$  имеет порядок  $2arv_0$ , достигается в 5-ой области и определяется согласно (3.6) по формуле

$$\sigma_m = arv_0(-1 - 4e^{-h(\tau_m - 2)} + 8h(\tau_m - 4)e^{-h(\tau_m - 4)}), \quad \tau_m = 4 + \frac{2 + e^{-2h}}{2h}$$

или  $\sigma_m = arv_0(-1 + 8e^{-1 - e^{-2h}/2})$ .

При  $h = M/m$ , равных 5; 2 и 1, значение  $\sigma_m$  приближенно равно 1.94297; 1.91621 и 1.75048 соответственно.

Сечения штока испытывают циклические, знакопеременные нагрузки. Полученные расчетные формулы для напряжений позволяют определить форму цикла напряжений и по экспериментальным данным найти предел усталости и время до разрушения.

В случае (b) штампуемая деталь представляет собой пружину с жесткостью  $K$ , поршень и шабот по-прежнему являются жесткими, а стержень упругим. Теперь оба граничных условия представляют собой дифференциальные уравнения:

$$x = l: S\sigma(l, t) = -m \frac{\partial v(l, t)}{\partial t}; \quad x = 0: v(0, t) = \frac{SE}{K} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$$

Эта задача линейна, и ее решение для произвольного момента времени может быть получено методом преобразования Лапласа и теоремы о вычетах. Не приводя детали этого громоздкого решения, выпишем решение лишь для нескольких первых областей, что обычно достаточно для практических целей. Отметим, что в литературе можно найти формулировку задач с граничным условием для пружины, но каких-либо конкретных решений за исключением работы [7], которая будет обсуждаться ниже, авторам не известно.

Введем  $u_0$ ,  $\sigma_0$  и  $k$ , равные  $v_0/l/a$ ,  $av_0$  и  $IK/(SE)$  соответственно. Тогда перемещение, напряжение и скорость для первых четырех областей примут вид:

$0 < at < x$ :  $u = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $v = 0$  – область покоя (нулевая область)

$x < at < 2l - x$ :

$$u/u_0 = k^{-1}(-1 + e^{-k(at-x)/l} - x/l), \quad v/v_0 = -e^{-k(at-x)/l}, \quad \sigma/\sigma_0 = -1 + e^{-k(at-x)/l}$$

Видно, что если  $k = \infty$ , то получаем решение как в случае (а) (3.3)

$2l - x < at < 2l + x$ :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{e^{-k(at-x)/l}}{k} + \frac{2ke^{-h(at+x-2l)/l}}{(k-h)h} - \frac{e^{-k(at+x-2l)/l}(k+h)}{k(k-h)} + \frac{at}{l} - 2 - \frac{2}{k} - \frac{2}{h}$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 - e^{-k(at-x)/l} - \frac{2ke^{-h(at+x-2l)/l}}{(k-h)} + \frac{e^{-k(at+x-2l)/l}(k+h)}{(k-h)}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = e^{-k(at-x)/l} - \frac{2ke^{-h(at+x-2l)/l}}{(k-h)} + \frac{e^{-k(at+x-2l)/l}(k+h)}{(k-h)}$$

Если  $k = \infty$ , то также получаем напряжение как в случае (а) (3.4)

$2l + x < at < 4l - x$ :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + e^{-k(at-x)/l} - \frac{2ke^{-h(at+x-2l)/l}}{(k-h)} + \frac{e^{-h(at+x-2l)/l}(k+h)}{(k-h)} - \frac{2e^{-h(at-x-2l)/l}k(k+h)}{(k-h)^2} + \frac{e^{-k(at-x-2l)/l}(k^2 - h^2 + 2kh(2 - h(at-x-2l)/l) + 2k^3(at-x-2l)/l)}{(k-h)^2}$$

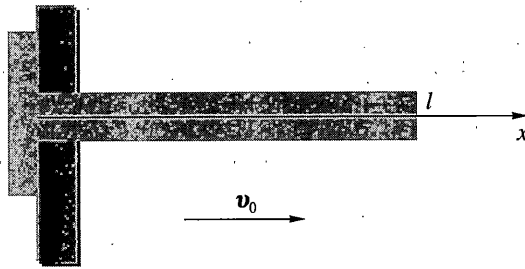
и при  $k = \infty$  это будет соответствовать (3.5).

Как упоминалось выше, единственным известным из литературы примером использования граничного условия в виде упругой заделки является рассмотренная в [7] задача об ударе клапана о седло в двигателе внутреннего сгорания. Поскольку она привела к неожиданному результату, рассмотрим ее повторно.

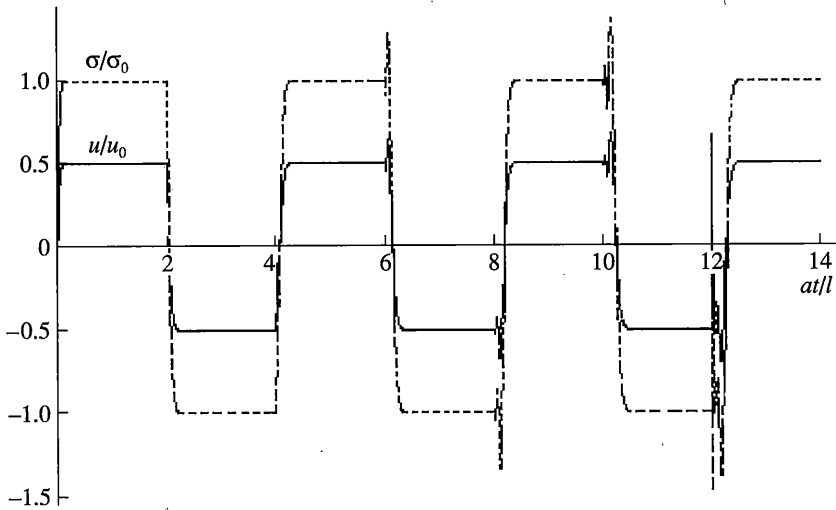
Клапан будет моделировать упругим стержнем так, что его движение описывается уравнениями (1.3) при  $q = 0$ . Стержень движется со скоростью  $v_0$  и в момент времени  $t = 0$  встречается с неподвижным седлом. Взаимодействие стержня с седлом моделируется упругой пружиной жесткости  $K$ . Направим ось  $x$  вдоль оси стержня, поместив ее начало на конце стержня, встречающим клапан (фиг. 10).

Начальные условия будут следующими:

$$t = 0: u = 0, \quad v = v_0, \quad \sigma = 0$$



Фиг. 10



Фиг. 11

Взаимодействие левого конца стержня  $x = 0$  с седлом дает первое граничное условие:  $S\sigma(0, t) = Ku(u, t)$ ,  $v(0, 0) = v_0$ . Правый конец стержня остается свободным от напряжения  $\sigma(l, t) = 0$ .

Решение здесь имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma/\sigma_0 &= \sum_{n=0}^N L_n^1(k(at - x - 2ln)/l) - \sum_{n=0}^{M-1} L_n^1(k(at + x - 2l(n+1))/l) \\ u/u_0 &= at/l - k^{-1} \sum_{n=0}^N L_n^2(k(at - x - 2ln)/l) - k^{-1} \sum_{n=0}^{M-1} L_n^2(k(at + x - 2l(n+1))/l) \end{aligned} \quad (3.8)$$

По формулам (3.8) напряжения и смещения рассчитаны также в первых 13-ти областях для различных значений параметра  $k$ .

На фиг. 11 построены зависимости напряжений  $\sigma/\sigma_0$  и смещений  $u/u_0$  от времени  $at/l$  в месте взаимодействия клапана и седла-пружины  $x = 0$  для значений параметра  $1/k = 0.025$ , принятого в работе [7] в качестве приблизительно соответствующего реальным условиям.

Оказывается, что в момент  $t \approx 6.06l/a$  возникает всплеск напряжения, который превышает по величине значение, отвечающее абсолютно жесткой заделке. Объяснение этому неожиданному факту следует из анализа смещений стержня.

На фиг. 11 сплошными линиями представлены зависимости для смещений, а пунктирными для напряжений на ударяемом конце стержня  $x = 0$ . Для наглядности значения для перемещений на фигуре умножены на 20. Из фиг. 11 видно, что до появления необычного всплеска напряжения перемещения становятся отрицательными, так, что возникновение всплеска напряжений может появиться только в том случае, если седло не только не оказывает сопротивление движению клапана, а, напротив, растягивает пружину. Таким образом, принятая модель является не вполне удачной. Более реалистичной будет модель пружины, которая не выдерживает растягивающих напряжений и при их возникновении происходит отскок клапана от седла-пружины и напряжения в клапане при  $x = 0$  обращаются в ноль. При необходимости решение можно продолжить при таком граничном условии, но вряд ли оно будет представлять практический интерес.

Рассмотрим, наконец, случай  $c$ ), когда штампуемая деталь ведет себя как жесткопластическое тело с пределом текучести  $\sigma_s$ . При  $\sigma \leq \sigma_s$  граничное условие на конце стержня  $x = 0$  будет  $v = 0$ , а при достаточно сильном ударе происходит пластическая деформация детали, и напряжение там будет равным  $\sigma_s$ .

Начальными условиями будут

$$t = 0, \quad 0 < x < l: \quad \sigma = 0, \quad v = -v_0 \quad (3.9)$$

Граничным условием на верхнем конце остается выражение (3.1). На нижнем конце условиями будут

$$|\sigma| \leq \sigma_s; \quad v = 0, \quad x = 0: \quad \sigma = -\sigma_s \quad (3.10)$$

Второе из условий (3.10) начинает выполняться, когда напряжение достигнет или превысит предельное.

Решение найдем по формулам Даламбера (1.7) при  $q = 0$ . В области 1 (фиг. 2) оно будет следующим:

$$\sigma = -\sigma_s, \quad v_1 = -v_0 + \sigma_s/(a\rho) \quad (3.11)$$

Деталь начнет деформироваться при  $v_1 \leq 0$  или  $v_0 \geq \sigma_s/a\rho$ . Здесь и далее через  $\sigma_k$  и  $v_k$ , где  $k = 1, 2, 3$  обозначены напряжение и скорость в соответствующих областях 1, 2, 3.

Для нахождения решения в области 2 используем (3.1) и условие для скачков (1.5) вдоль фронта  $at + x = 2l$ . В результате получим

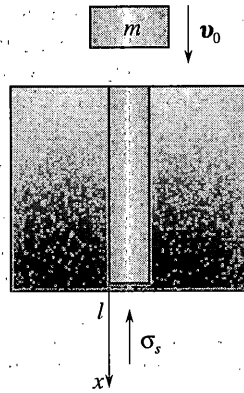
$$\sigma_2 = -2\sigma_s e^{-(at+x-2l)/l_1}, \quad v_2 = -v_0 + 2\sigma_s/(a\rho) - 2\sigma_s e^{-(at+x-2l)/l_1}/(a\rho) \quad (3.12)$$

В области 3 решение находится из условия для скачков вдоль  $at - x = 2l$  и (3.10). В результате

$$\sigma_3 = -\sigma_s, \quad v_3 = -v_0 - (4e^{-(at-x-2l)/l_1} - 5)\sigma_s/(a\rho) \quad (3.13)$$

Скорость  $v_3$  позволяет определить степень деформирования детали.

**4. Динамика погружения сваи в грунт.** Одним из важных приложений теории продольного удара массой по стержню является задача об ударном погружении сваи в грунт (фиг. 12). Постановка задачи об определении сопротивления сваи при забивке в грунт принадлежит Н.М. Герсеванову [13]. Однако при решении задачи им был допущен досадный просчет. Решение было исправлено в работе [14] и приводится также в работах [11, 15]. Обобщение решения на случай учета лобового сопротивления движению сваи и для более сильного удара получено в [16]. Эта задача рассматривается также в ра-



Фиг. 12

боте [17]. Несущая способность свай на основе результатов динамической теории стержней в сопротивляющейся среде определялась в работах [16, 18, 19]. Здесь подытоживаются, уточняются и при необходимости исправляются результаты упомянутых работ.

В системе (1.3) учитываются сопротивление по боковой поверхности и сила тяжести так, что  $q$  принято равным  $q = k\tau_{fr} + g$ .

Начальные и граничные условия те же, что и ранее: (2.1), (2.2), (2.3), (2.4). Эти условия позволяют определить решение до отскока тела.

В области, где  $at > x$ , решение будет следующим

$$\sigma = 1/2\tau_{fr}(x - l_i) - \sigma_0(1 - l_i/l_f)e^{-(at-x)/l_i} \quad (4.1)$$

$$apv = 1/2\tau_{fr}(l_i - at) + \sigma_0(1 - l_i/l_f)e^{-(at-x)/l_i}$$

где  $\sigma_0 = apv_0$  – абсолютная величина напряжения, возникающего в момент удара на ударяемом конце  $x = 0$ .

Решение (4.1) получено в предположении  $v > 0$ . Скорость обратится в ноль на фронте волны  $x = at$  при  $x = l_f$ , а в плоскости  $(x, t)$  – вдоль кривой

$$x = at + l_i \ln \frac{at - l_i}{l_f - l_i} \quad (4.2)$$

Если линия (4.2) лежит правее характеристики  $x + at = 2l_f$ , то решение необходимо строить с учетом обращения скорости в ноль [14].

Примем, что удар достаточно сильный:  $l_f \gg 1$  или  $\sigma_0 \gg \tau_{fr}l$ . Тогда решение (4.1) будет справедливым вплоть до прихода волны, отраженной от нижнего конца сваи, с фронтом  $x + at = 2l$ , т.е. в области 1:  $0 < x < l, x \leq at \leq 2l - x$ .

Для нахождения решения в области 2:  $0 < x < l, 2l - x \leq at \leq 2l + x$ , необходимо знать условия взаимодействия нижнего конца сваи с подстилающим грунтом. Будем считать, что это взаимодействие соответствует жесткопластической схеме. Тогда конец сваи будет оставаться неподвижным, если напряжение там не превзошло по модулю заданное предельное значение  $\sigma_s$ . При достаточно сильном ударе свая будет проникать в грунт при постоянном напряжении

$$\sigma = -\sigma_s \quad (4.3)$$

Отраженная от нижнего конца сваи волна также будет ударной. На ее фронте  $x + at = 2l$  в силу (1.5) должно выполняться равенство

$$[\sigma] = ap[v] \quad (4.4)$$

Равенства (4.3) и (4.4) позволяют с помощью решения Даламбера (1.7) получить напряжения и скорость в области 2:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(x-l) - \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x)/l_i} - e^{-(at+x-2l)/l_i}) \\ apv &= -\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(2l_i-l-at) + \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x)/l_i} + e^{-(at+x-2l)/l_i}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

В области 3, где  $2l + x \leq at \leq 4l - x$ , решения находятся по граничному условию (2.2) и соотношения для скачков (1.5) вдоль ударного фронта  $x = at + 2l$  имеют вид

$$[\sigma] + ap[v] = 0 \quad (4.6)$$

Рассмотрим случай совместного движения конца сваи и массы. Решение в области 3 получится из решения (1.7) с помощью условий (2.1), (2.2) и (4.6):

$$\begin{aligned} \sigma &= 1/2\tau_{fr}(x-l) - \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x)/l_i} - e^{-(at+x-2l)/l_i}) - \\ &- (\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(l-l_i) + \tau_{fr}(l_i/l_f-1)(at-x-2l))e^{-(at-x-2l)/l_i} \\ apv &= -2\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(3l_i-2l-at) + \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x)/l_i} + e^{-(at+x-2l)/l_i}) + \\ &+ (\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(l-l_i) + \tau_{fr}(l_i/l_f-1)(at-x-2l))e^{-(at-x-2l)/l_i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

В момент прихода отраженной волны  $t = 2l/a$  произойдет отскок массы, если напряжение  $\sigma_0$  удовлетворит условию

$$\sigma_0 \geq \frac{\sigma_s + 1/2\tau_{fr}l + 1/2\tau_{fr}l_i(1 - e^{-2l/l_i})}{1 - e^{-2l/l_i}} \quad (4.8)$$

В случае отскока массы решение в области 3 будет следующим

$$\begin{aligned} \sigma &= 1/2\tau_{fr}x - \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x-2l)/l_i} - e^{-(at+x-2l)/l_i}) \\ apv &= -2\sigma_s + 1/2\tau_{fr}(2l_i-2l-at) + \sigma_0(1-l_i/l_f)(e^{-(at-x-2l)/l_i} + e^{-(at+x-2l)/l_i}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если отскок произойдет в более позднее время, то решение может быть получено тем же путем.

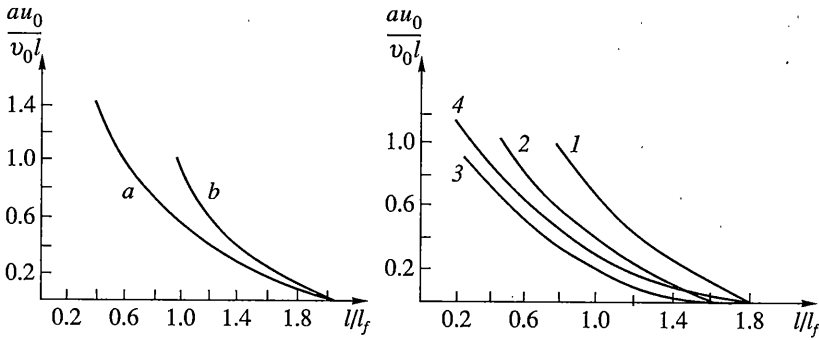
Определим теперь отказ сваи, то есть смещение  $u_0$  нижнего конца сваи  $x = l$  в результате удара. Предположим, что остановка конца  $x = l$  происходит в момент  $t = t_*$ , предшествующий приходу отраженного от конца  $x = 0$  фронта волны  $at - x = 2l$ :

$$l/a < t_* < 3l/a \quad (4.10)$$

Момент времени  $t_*$  находим из уравнения, получаемого приравниванием нулю скорости, определяемой формулой (4.5) при  $x = l$ . В результате имеем следующее трансцендентное уравнение для определения  $t_*$ :

$$2\tau_{fr}(l_f-l_i)e^{-(at_*-l)/l_i} + \tau_{fr}(2l_i-l-at_*) - 2\sigma_s = 0 \quad (4.11)$$





Фиг. 13

Для того чтобы решение (4.2) давало время остановки, кривая  $v(x, t) = 0$  должна находиться вне области зависимости решения (4.5) в точке  $x = l, t = t_*$ , т.е. правее характеристики  $at - x = at_* - l$ . С помощью 4.5 легко установить, что кривая  $v(x, t) = 0$  в точке  $x = l, t = t_*$  имеет вертикальную касательную  $dx/dt = \infty$ , так что это условие выполняется.

Смещение стержня в области 2 получим интегрированием соотношений (4.5):

$$u = \frac{1}{4E}(\tau_{fr}(x^2 - a^2t^2) + 2\tau_{fr}(2l_i - l)(at - l - l(x - l)) - 4\sigma_s(at + x - 2l) - 4\sigma_0l_i(1 - l_i/l_f)(e^{-(at+x-2l)/l_i} + e^{-(at-x)/l_i} - 2)) \quad (4.12)$$

Решение будет справедливым, по крайней мере, в какой-то части области 2 только, когда скорость в точке  $x = l, t = t_*$  положительна. Это условие выполняется, если параметры задачи удовлетворяют следующему неравенству

$$v_0 > 1/2(\sigma_r + \tau_{fr}l)a/E \quad (4.13)$$

Для смещения  $u_0$  конца стержня  $x = l$  из (4.12) с помощью (4.11) получим

$$u_0 = (2l_i + 3l^2/l_f - 3l_i/l_f - (at_* - l + l_i)\sigma_s/\sigma_0 + (l_i - l)at_*/l_f - a^2t_*^2/(2l_f))v_0/a \quad (4.14)$$

Предположения (4.9) также накладывают ограничения на параметры задачи. Если скорость сечений  $x = l$ , определяемая формулой (4.5), изменяется во времени монотонно, то из (4.10) следует, что при  $t = 3l/a$  скорость не будет положительной. Следовательно, второе ограничение требует выполнения неравенства

$$(1 - 1/2e^{2l/l_i}\sigma_s/\sigma_0)l_f/l \leq l_i/l + (2 - l_i/l)e^{2l/l_i} \quad (4.15)$$

Формулы (4.11) и (4.14) дают в параметрическом виде зависимость осадки сваи от ее длины и скорости удара. На фиг. 13 на первом графике (слева) изображены кривые осадки сваи в отсутствие лобового сопротивления при  $l_i/l_f = 1$  (a) и  $l_i/l_f = 2$  (b), на втором (справа) – кривые осадки сваи при наличии лобового сопротивления при  $l_i/l_f = 2$ ,  $\sigma_r/\sigma_0 = 0.2$  – линия (1);  $l_i/l_f = 2$ ,  $\sigma_r/\sigma_0 = 0.4$  – линия (2);  $l_i/l_f = 2$ ,  $\sigma_r/\sigma_0 = 0.6$  – линия (3); при  $l_i/l_f = 1$ ,  $\sigma_r/\sigma_0 = 4$  – линия (4).

Следует отметить, что формула (4.14) не исчерпывает все случаи остановки сечения  $x = l$  в интервале времени  $l/a < t_* < 3l/a$  и справедлива лишь в предположении о неотрицательности скорости в области зависимости решения в точке  $x = l, t = l/a$ . Например, при  $l > l_f$  возможна остановка сечения  $x = l$  в этом интервале, но при этом передний

фронт возмущений отойдет от характеристики  $x = at$ . Решение в этом случае должно строиться с учетом этого факта.

Если остановка сечения  $x = l$  происходит в более поздние моменты времени, то следует воспользоваться решениями в последующих областях, которые можно найти в работе [14].

Полученные результаты позволяют по динамическим испытаниям определить несущую способность сваи  $Q$ , которая складывается из лобового сопротивления  $\sigma_r S$  и бокового сопротивления  $\tau_{fr} l S$ :

$$Q = (\sigma_r + \tau_{fr} l) S \quad (4.16)$$

В динамических испытаниях свай регистрируют зависимость от времени скорости и(или) деформации на ударяемом конце. В принципе для определения несущей способности сваи достаточно знать скорость или деформацию в какие-либо два момента времени, причем, по крайней мере, один из моментов, очевидно, должен быть после прихода волны, отраженной от нижнего сечения. Как заметил Д. Колимбас [18], наиболее просто и эффективно несущая способность сваи определяется в том случае, когда отскок массы от ударяемого сечения происходит в момент прихода отраженной волны. В этом случае зависимость скорости от времени в ударяемом сечении согласно (4.1) и (4.5) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 2l/a: v &= \tau_{fr}(l_i - at)/(2ap) + v_0(1 - l_i/l_f)e^{-at/l_i} \\ t \geq 2l/a: v &= -2\sigma_s/(ap) + \tau_{fr}(2l_i - 2l - at)/(2ap) + 2v_0(1 - l_i/l_f)e^{-(at-2l)/l_i} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Зависимость (4.17) на рассматриваемом интервале времени имеет два максимума. Один появляется в момент удара и равен  $v_0$ , второй сразу после прихода отраженной от нижнего сечения волны. Его величина  $v_*$  согласно (4.17) равна

$$v_* = 2v_0 - 2(\sigma_s + \tau_{fr} l)/(ap) \equiv 2v_0 - 2Q/(apS) \quad (4.18)$$

Экспериментальные данные также свидетельствуют о наличии двух достаточно ярко выраженных максимумов на осциллограмме скорости на ударяемом конце [19]. Из (4.18) следует формула Д. Колимбаса [18] о равенстве несущей способности сваи произведению импеданса сваи  $apS$  на первый максимум в зависимости (4.17) скорости ударяемого конца от времени без половины второго максимума

$$Q = apS(v_0 - 1/2 v_*) \quad (4.19)$$

Формула (4.19) хорошо согласуется с опытными данными [20].

Таким образом, при испытаниях, в которых отскок массы происходит сразу после прихода отраженной волны, несущая способность сваи может быть просто, без каких-либо расчетов, определена по осциллограмме скорости на ударяемом конце.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Унксов Е.П. Экспериментальное определение напряжений в штоках штамповочных молотов. Машгиз, 1945. 36 с.
5. Никитин Л.В. К расчету штоков штамповочных молотов // Инж. ж. 1961. № 3. С. 185–188.

6. Майборода В.П., Кравчук А.С., Холин Н.Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1986. 262 с.
7. Werner E.A., Fischer F.D. The stress state in a moving rod suddenly elastically fixed at its trailing end // Acta Mech. 1995. V. 111. № 3/4. P. 171–179.
8. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Московский Лицей, 1998. 272 с.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1975. 407 с.
11. Никитин Л.В. Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 53–106.
12. Hu B., Eberhard P. Symbolic Computation of Longitudinal Impact Waves // Computer Meth. Appl. Mech. and Eng. 2001. V. 190. № 37–38. P. 4805–4815.
13. Герсванов Н.М. Теория продольного упругого удара с применением к определению сопротивления свай // Собр. соч. 1948. Т. 1. С. 70–94.
14. Никитин Л.В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 166–170.
15. Nikitin L.V., Tyurekhdgaev A.N. Wave propagation and vibration of elastic rods with interfacial frictional slip // Wave Motion. 1990. V. 12. № 6. P. 513–526.
16. Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт // Проблемы механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1966. С. 304–311.
17. Веклич Н.А., Мальшиев Б.М. Распространение волн в упругих стержнях, находящихся в среде с сухим трением // Задачи механики твердого деформируемого тела. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 64–99.
18. Kolymbas D. Longitudinal impacts on piles // Dynamics and Earthquake Engineering. 1991. V. 10. № 5. P. 264–270.
19. Rausche F., Goble G., Links G.E. Dynamic determination of pile capacity // Geomechanical engineering. 1985. P. 367–383.
20. Grade J., Shuler V. Auswertung von dynamischen Pfahlpruefungen nach verschiedene Verfahren // Geotechnik. 1991. № 1. S. 37–41.

Москва

Поступила в редакцию  
14.09.2006