МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2006

УДК 539.3:534.1:550.3

© 2006 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, Д.И. ЗАРУБОВ

# УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ НА НЕСЖИМАЕМОМ ПРЕДНАПРЯЖЕННОМ СИЛАМИ ТЯЖЕСТИ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В плоской, осесимметричной и пространственной постановках исследована задача об устойчивости бесконечной плиты под действием продольных сжимающих усилий, находящейся в двухстороннем контакте с упругим несжимаемым полупространством, преднапряженным силами тяжести. Рассмотрены два варианта двухстороннего контакта плиты с поверхностью полупространства: полное сцепление; проскальзывание без трения. Результаты могут найти применение при расчете работоспособности тел с покрытиями, слоистых композитов, в вопросах геофизики.

Ранее задача об устойчивости бесконечной плиты при продольном сжатии, находящейся в условиях цилиндрического изгиба в двустороннем контакте с упругим основанием, рассматривалась в [1] (основание Фусса–Винклера) и [2] (сжимаемый упругий слой, защемленный по основанию).

**1. Исходные уравнения для полупространства.** Следуя [3], рассмотрим полупространства из несжимаемого изотропного упругого материала, нагруженного силами собственного веса. Эти силы создают в полупространстве гидростатическое напряженное состояние

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = -\gamma(p - x_3), \quad \sigma_{ij}^0 = 0 \ (i \neq j) \tag{1.1}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $\gamma = \rho g$; $\rho$ – плотность материала полупространства; $g$ – ускорение свободного падения; $p$ учитывает пригрузку от выше лежащей плиты, $x_3 < 0$. В силу условия несжимаемости в напряженном состоянии (1.1) материал недеформирован.

На начальное напряженное состояние (1.1) накладывается малая деформация, вызванная воздействием плиты на границу полупространства. Общие уравнения, описывающие малые деформации предварительно напряженного несжимаемого тела, имеют вид [4]:

$$\frac{\partial \theta_{sk}}{\partial x_s} = 0, \quad \theta_{sk} = \sigma_{sk}^* - \sigma_{ms}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial x_s} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{ms}^0$ – начальные напряжения, $x_k$ – декартовы координаты начального напряженного состояния, которое в данном случае является недеформированным, $u_s$ – компоненты вектора добавочных перемещений, $\sigma_{sk}^*$ – обусловленные ими малые приращения напряжений. По повторяющимся индексам в (1.2) подразумевается суммирование. Последнее уравнение в (1.2) – условие несжимаемости.

Для вычисления величин $\sigma_{sk}^*$ воспользуемся законом состояния изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях [4]:

$$\begin{gathered} \sigma_{mn} = \alpha_1 M_{mn} - \alpha_2 N_{mn} + \sigma\delta_{mn} \\ M_{sk} = \frac{\partial X_s}{\partial x_t}\frac{\partial X_k}{\partial x_t}, \quad N_{sk}M_{kt} = \delta_{st} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $X_s$ – декартовы координаты деформированного состояния, $M_{sk}$ – компоненты меры деформации Фингера, $N_{sk}$ – компоненты меры деформации Альманзи, составляющие тензор, обратный к мере деформации Фингера, $\delta_{st}$ – символ Кронекера, $\sigma$ – первый инвариант напряжений, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – некоторые функции инвариантов деформации.

Полагая

$$\begin{aligned} X_s &= x_s + u_s, \quad \sigma_{mn} = \sigma^0_{mn} + \sigma^*_{mn}, \quad \sigma = \sigma^0 + \sigma^* \\ \alpha_1 &= \alpha^0_1 + \alpha^*_1, \quad \alpha_2 = \alpha^0_2 + \alpha^*_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

и линеаризуя соотношения (1.3) в окрестности начального состояния $X^0_s = x_s$, получим

$$\begin{aligned} \sigma^*_{mn} &= \mu\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right) + q\delta_{mn} \\ \mu &= \alpha^0_1 + \alpha^0_2, \quad q = \alpha^*_1 - \alpha^*_2 + \sigma^* \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\mu$ – модуль сдвига. Для материала Муни [4], в частности, имеем $\alpha_1 = 2C_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = 2C_2 = \text{const}$, тогда $\alpha^*_1 = \alpha^*_2 = 0$ и $\mu = 2(C_1 + C_2)$. Подставляя далее (1.5) во вторую группу формул (1.2), найдем $\theta_{sk}$, и, наконец, подставляя выражения $\theta_{sk}$ в первую группу формул (1.2), получим уравнения Ламе относительно компонент вектора перемещений

$$\begin{aligned} &\mu\Delta u_s + \frac{\partial}{\partial x_s}(q - \gamma u_3) = 0 \\ &s = 1, 2, 3, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для замыкания системы уравнений (1.6) сюда нужно еще добавить последнее соотношение (1.2) – условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{1.7}$$

которое, кстати, было использовано для приведения уравнений Ламе к форме (1.6).

Формулы (1.6) и (1.7) образуют систему уравнений относительно неизвестных $u_1$, $u_2$, $u_3$ и $q$, после определения которых дополнительные напряжения находятся по формулам (1.5). Далее будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} &u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \\ &\sigma^*_{11} = \sigma_x, \quad \sigma^*_{22} = \sigma_y, \quad \sigma^*_{33} = \sigma_z, \quad \sigma^*_{12} = \tau_{xy}, \quad \sigma^*_{13} = \tau_{xz}, \quad \sigma^*_{23} = \tau_{yz} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для случая плоской деформации в формулах (1.5)–(1.7) нужно положить $v \equiv 0$ и учесть, что $u$, $w$ и $q$ не зависят от $y$. При этих условиях формулы (1.5)–(1.7) примут вид

$$\begin{aligned} &\mu\Delta u + \frac{\partial}{\partial x}(q - \gamma w) = 0, \quad \mu\Delta w + \frac{\partial}{\partial z}(q - \gamma w) = 0 \\ &\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ &\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + q, \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + q, \quad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что уравнения (1.6) и (1.7) можно записать в векторном виде

$$\begin{aligned} &\mu(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}) + \operatorname{grad}(q - \gamma w) = 0 \\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\mathbf{u}(u, \upsilon, w)$ – вектор перемещения. Теперь нетрудно на основании (1.10) получить уравнения в компонентах для случая осесимметричной деформации

$$\begin{aligned} &\mu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}(q - \gamma w) = 0, \quad \mu\Delta w + \frac{\partial}{\partial z}(q - \gamma w) = 0 \\ &\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь $u$ и $w$ – перемещения соответственно по $r$ и $z$ в цилиндрической системе координат $r$, $\varphi$, $z$. Перемещение $\upsilon$ по координате $\varphi$ тождественно равно нулю. Функции $u$, $w$ и $q$ от координаты $\varphi$ не зависят. Уравнения (1.5) для дополнительных напряжений нужно заменить следующими

$$\begin{aligned} &\sigma_r = 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} + q, \quad \sigma_\varphi = 2\mu\frac{u}{r} + q, \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + q \\ &\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

**2. Исходные уравнения для плиты.** Лежащую на полупространстве изотропную плиту с упругими характеристиками $G$ и $\nu$ будем описывать уравнениями

$$\begin{aligned} 4\theta h^2\Delta^2 u_\pm^* &= \mp 3\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1 - \sigma_2) - h\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\tau_{11} - \tau_{21} \pm 3(\tau_{11} + \tau_{21})] - \\ &- \frac{2h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\tau_{11} - \tau_{21}) + h\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}(\tau_{12} - \tau_{22}) \mp 3(\tau_{12} + \tau_{22})\right] \\ 4\theta h^2\Delta^2 \upsilon_\pm^* &= \mp 3\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_1 - \sigma_2) - h\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\tau_{12} - \tau_{22} \pm 3(\tau_{12} + \tau_{22})] - \\ &- \frac{2h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tau_{12} - \tau_{22}) + h\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}(\tau_{11} - \tau_{21}) \mp 3(\tau_{11} + \tau_{21})\right] \\ 4\theta h^3\Delta^2 w^* + 3N\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} &= 3(\sigma_1 - \sigma_2) + 3h\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{11} + \tau_{21}) + 3h\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{12} + \tau_{22}) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $2h$ – толщина плиты; $G$ – модуль сдвига материала плиты; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $u_+^*$ и $\upsilon_+^*$ – перемещения по осям $x$ и $y$ верхней грани плиты; $u_-^*$ и $\upsilon_-^*$ – перемещения по осям $x$ и $y$ нижней грани плиты; $w^*$ – перемещения граней плиты по оси $z$; $\sigma_1$, $\tau_{11}$ и $\tau_{12}$ – усилия, действующие на верхнюю грань плиты (усилие $\tau_{11}$ в направлении оси $x$, усилие $\tau_{12}$ в направлении оси $y$); $\sigma_2$, $\tau_{21}$ и $\tau_{22}$ – усилия, действующие на нижнюю грань плиты (усилие $\tau_{21}$ в направлении оси $x$, усилие $\tau_{22}$ в направлении оси $y$).

Уравнения (2.1) получены отбрасыванием членов порядка $h^2$ и выше в правых частях уточненных уравнений изгиба плиты [5] и добавлением к левой части третьего уравнения известного моментного члена вида $3N\partial^2 w^*/\partial x^2$, где $N$ – сжимающее продольное усилие, направленное по оси $x$, критическое значение которого, приводящее к потере устойчивости конструкции плита – полупространство, надо определить в результате решения задачи.

Для случая плоской деформации в формулах (2.1) нужно положить $\upsilon_\pm^* = \tau_{12} = \tau_{22} \equiv 0$ и учесть, что $u_\pm^*$, $w^*$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\tau_{11} = \tau_1$ и $\tau_{21} = \tau_2$ не зависят от $y$. При выполнении этих условий уравнения (2.1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
4\theta h^2 \frac{d^3}{dx^3} u_\pm^* &= \mp 3(\sigma_1 - \sigma_2) - h\frac{d}{dx}[\tau_1 - \tau_2 \pm 3(\tau_1 + \tau_2)] \\
4\theta h^3 \frac{d^4}{dx^4} w^* + 3N\frac{d^2}{dx^2} w^* &= 3(\sigma_1 - \sigma_2) + 3h\frac{d}{dx}(\tau_1 + \tau_2)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

и совпадают с уточненными уравнениями цилиндрического изгиба плиты [6] (глава 1, § 3, формулы (3.3)), если в них отбросить в правых частях члены порядка $h^2$ и выше и добавить к левой части второго уравнения известный моментный член со второй производной функции $w^*$.

Для случая осесимметричной деформации плиты будем использовать формулы

$$
\begin{aligned}
2\theta h^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[ r\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) u_\pm^* \right] &= \mp 3(\sigma_1 - \sigma_2) - \\
-\frac{h}{r}\frac{d}{dr}\{ r[\tau_1 - \tau_2 \pm 3(\tau_1 + \tau_2)]\}, \quad \Delta &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \\
4\theta h^3 \Delta^2 w^* + 3N\Delta w^* &= 3(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{3h}{r}\frac{d}{dr}[r(\tau_1 + \tau_2)]
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

полученные отбрасыванием членов порядка $h^2$ и выше в правых частях уточненных уравнений осесимметричного изгиба плиты [7] и добавлением к левой части второго уравнения известного моментного члена вида $3N\Delta w^*$, описывающего всестороннее продольное сжатие плиты усилием $N$. В формулах (2.3) $u_\pm^*$ – перемещение по оси $r$ соответственно верхней и нижней граней плиты, $\tau_k$ $(k = 1, 2)$ – касательные усилия по направлению оси $r$, действующие соответственно на верхней и нижней гранях плиты. Величины $w^*$, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ определены выше.

**3. Плоская задача.** Рассмотрим в условиях плоской деформации задачу о взаимодействии бесконечной упругой плиты, продольно сжатой усилием $N$, с бесконечным преднапряженным упругим полупространством. Будем предполагать, что между нижней гранью плиты и поверхностью полупространства осуществлено полное сцепление, а верхняя грань плиты свободна от усилий, т.е. в уравнениях (2.2) $\sigma_1 = \tau_1 = 0$.

В силу условий полного механического контакта между поверхностями плиты и полупространства будем на основании (2.2) иметь для полупространства при $z = 0$ следующие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
4\theta h^2 \frac{d^3}{dx^3} u(x, 0) &= -3\sigma(x) + 4h\frac{d}{dx}\tau(x) \\
4\theta h^3 \frac{d^4}{dx^4} w(x, 0) + 6nh\frac{d^2}{dx^2} w(x, 0) &= -3\sigma(x) + 3h\frac{d}{dx}\tau(x)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

При $z \to -\infty$ будем считать, что перемещения и дополнительные напряжения затухают. В (3.1) $n = N/(2h)$, $\tau(x)$ и $\sigma(x)$ – контактные напряжения, действующие между поверхностями плиты и полупространства.

Будем искать решение уравнений (1.9) (уравнений Ламе + условие несжимаемости) в виде

$$u = U(\alpha, z)\sin\alpha x, \quad w = W(\alpha, z)\cos\alpha x, \quad q = Q(\alpha, z)\cos(\alpha x) \tag{3.2}$$

где $\alpha > 0$ – параметр, характеризующий периодичность задачи по $x$ с длиной полуволны $l = \pi/\alpha$. Такое общее решение, удовлетворяющее условию затухания при $z \to -\infty$ перемещений и напряжений, имеет вид

$$\begin{aligned} U &= (c_1 + \alpha z d_1)e^{\alpha z}, \quad W = (d_1 - c_1 - \alpha z d_1)e^{\alpha z} \\ Q &= [(2\mu\alpha + \gamma)d_1 - \gamma c_1 - \alpha z \gamma d_1]e^{\alpha z} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу для полупространства

$$z = 0: \quad u(x, 0) = a(\alpha)\sin\alpha x, \quad w(x, 0) = b(\alpha)\cos\alpha x \tag{3.4}$$

и найдем в результате ее решения с помощью формул (3.2) и (3.3) добавочные напряжения $\sigma_z(x, 0)$ и $\tau_{xz}(x, 0)$ (используются предпоследняя и последняя формулы (1.9)). Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, 0) &= \sigma(x) = (2\mu\alpha + \gamma)b\cos\alpha x \\ \tau_{xz}(x, 0) &= \tau(x) = 2\mu\alpha a\sin\alpha x \end{aligned} \tag{3.5}$$

Перейдем к основной задаче (3.1). Подставляя (3.4) и (3.5) в формулы (3.1) и переходя к безразмерным величинам

$$\tilde{a} = \frac{a}{h}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{h}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\mu}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\mu}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma h}{\mu}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha h \tag{3.6}$$

получим однородную систему алгебраических уравнений относительно $a$ и $b$ (волны над безразмерными величинами далее опускаем)

$$\begin{aligned} &-(4\theta\alpha^3 + 8\alpha^2)a + (6\alpha + 3\gamma)b = 0 \\ &-6\alpha^2 a + (4\theta\alpha^4 - 6n\alpha^2 + 6\alpha + 3\gamma)b = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для существования нетривиального решения системы (3.7) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} &f_1(\alpha)[f_4(\alpha) - 6n\alpha^2] - f_2(\alpha)f_3(\alpha) = 0 \\ &f_1(\alpha) = 4\theta\alpha^3 + 8\alpha^2, \quad f_2(\alpha) = 6\alpha + 3\gamma \\ &f_3(\alpha) = 6\alpha^2, \quad f_4(\alpha) = 4\theta\alpha^4 + 6\alpha + 3\gamma \end{aligned} \tag{3.8}$$

Задавая разные значения $\alpha$, т.е. разную длину полуволны, можем получить любое значение для безразмерного критического усилия потери устойчивости $n$. Однако существует значение $\alpha_*$, при котором критическое усилие $n_*$ минимально. Значения $\alpha_*$ и $n_*$ соответствуют кратному корню уравнения (3.8) по $\alpha$ или, что равносильно, $\alpha_*$ и $n_*$ могут быть одновременно найдены из системы уравнений (3.8) и

$$\begin{aligned} &f_1'(\alpha)[f_4(\alpha) - 6n\alpha^2] + f_1(\alpha)[f_4'(\alpha) - 12n\alpha] - \\ &-f_2'(\alpha)f_3(\alpha) - f_2(\alpha)f_3'(\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Далее полученным таким образом значениям $\alpha_*$ и $n_*$ будем придавать индекс 1.

*Таблица 1*

| $\mu$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $n_1$ | $n_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $3.5 \cdot 10^8$ | 0.2895 | 0.2942 | 16.73 | 17.08 |
| $3.5 \cdot 10^7$ | 0.2778 | 0.2782 | 139.1 | 139.4 |
| $3.5 \cdot 10^6$ | 0.2765 | 0.2765 | 1361 | 1361 |

В случае проскальзывания без трения в горизонтальном направлении нижней границы плиты по границе полупространства при сохранении их двухсторонней связи в вертикальном направлении нужно рассмотреть другую вспомогательную задачу для полупространства

$$z = 0: \tau_{xz}(x, 0) = \tau(x) = 0, \quad w(x, 0) = b(\alpha)\cos\alpha x \tag{3.10}$$

и найти добавочное напряжение $\sigma_z(x, 0)$. Снова имеем

$$\sigma_z(x, 0) = \sigma(x) = (2\mu\alpha + \gamma)b\cos\alpha x \tag{3.11}$$

(формулы (3.10) и (3.11) записаны в размерных величинах). Подставляя (3.10) и (3.11) во вторую формулу (3.1) и переходя к безразмерным величинам (3.6), получим

$$(4\theta\alpha^4 - 6n\alpha^2 + 6\alpha + 3\gamma)b = 0 \tag{3.12}$$

Теперь $\alpha_*$ и $n_*$ для указанного случая проскальзывания без трения найдем одновременно из системы уравнений

$$f_4(\alpha) - 6n\alpha^2 = 0, \quad f_4'(\alpha) - 12n\alpha = 0 \tag{3.13}$$

Далее полученным таким образом значениям $\alpha_*$ и $n_*$ будем придавать индекс 2.

Для расчетов, имея в виду приложения к геофизике, примем $h = 10000$ м, $G = 3.5 \cdot 10^{10}$ Н/м$^2$, $\nu = 0.25$ (литосферная плита под океаном), $g = 9.81$ м/с$^2$, $\rho = 3700$ кг/м$^3$ – плотность материала астеносферы. Модуль сдвига $\mu$ материала астеносферы в единицах Н/м$^2$ будем менять в широких пределах (см. табл. 1).

Из табл. 1 видно, что $\alpha_2$ и $n_2$ несколько больше, чем $\alpha_1$ и $n_1$. При $\mu \le 3.5 \cdot 10^6$ Н/м$^2$ значения $\alpha_*$ и $n_*$ в случаях 1 и 2 практически совпадают и слабо зависят от величины $\mu$. В результате потери устойчивости поверхность литосферной плиты приобретает складчатость с длиной полуволны $l = \pi h/\alpha_* \approx 112$ км. О горизонтальных смещениях земной коры в случае полного сцепления нижней границы плиты с полупространством можно получить представление с помощью первой формулы (2.2) (верхняя строчка) и формул (3.5).

**4. Осесимметричная задача.** Рассмотрим в условиях осесимметричной деформации задачу о взаимодействии бесконечной упругой плиты, продольно осесимметрично сжатой усилием $N$, с бесконечным преднапряженным упругим полупространством. Как и ранее будем предполагать, что между нижней гранью плиты и поверхностью полупространства осуществлено полное сцепление, а верхняя грань плиты свободна от усилий, т.е. в уравнениях (2.3) $\sigma_1 = \tau_1 = 0$.

В силу условий полного механического контакта между поверхностями плиты и полупространства будем на основании (2.3) иметь для полупространства при $z = 0$ следующие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&4\theta h^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)u\right] = -3\sigma(r)+\frac{4h}{r}\frac{d}{dr}[r\tau(r)]\\
&4\theta h^3\Delta^2 w+6nh\Delta w = -3\sigma(r)+\frac{3h}{r}\frac{d}{dr}[r\tau(r)]
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

при $z \to -\infty$ перемещения и дополнительные напряжения затухают. В (4.1) $\sigma(r)$ и $\tau(r)$ – контактные напряжения, действующие между поверхностями плиты и полупространства.

Будем искать решение уравнений (1.11) в виде

$$
u = U(\alpha, z)J_1(\alpha r), \quad w = W(\alpha, z)J_0(\alpha r), \quad q = Q(\alpha, z)J_0(\alpha r) \tag{4.2}
$$

где $\alpha > 0$ – параметр, характеризующий волнистость по $r$; $J_1(x)$ и $J_0(x)$ – функции Бесселя. Такое общее решение, удовлетворяющее условию затухания при $z \to -\infty$ перемещений и напряжений, по-прежнему имеет вид (3.3).

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу для полупространства

$$
z = 0: \quad u(r, 0) = a(\alpha)J_1(\alpha r), \quad w(r, 0) = b(\alpha)J_0(\alpha r) \tag{4.3}
$$

и найдем в результате ее решения с помощью формул (4.2), (3.3) и (1.12) добавочные напряжения

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z(r, 0) = \sigma(r) = (2\mu\alpha+\gamma)bJ_0(\alpha r)\\
&\tau_{rz}(r, 0) = \tau(r) = 2\mu\alpha a J_1(\alpha r)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Переходя к основной задаче (4.1) и вновь используя безразмерные величины (3.6), на основании (4.1), (4.3) и (4.4) получим однородную систему алгебраических уравнений относительно $a$ и $b$, совпадающую с системой (3.7). Отсюда следует, что для осесимметричной задачи также имеют место уравнения (3.8) и (3.9), из которых снова найдем для случая полного сцепления поверхностей плиты и полупространства значения критических величин $\alpha_1$ и $n_1$, представленные в табл. 1. Для случая проскальзывания без трения поверхностей плиты и полупространства, решая вспомогательную задачу

$$
z = 0: \quad \tau_{rz}(r, 0) = \tau(r) = 0, \quad w(r, 0) = b(\alpha)J_0(\alpha r) \tag{4.5}
$$

найдем добавочное напряжение

$$
\sigma_z(r, 0) = \sigma(r) = (2\mu\alpha+\gamma)bJ_0(\alpha r) \tag{4.6}
$$

(формулы (4.5) и (4.6) записаны в размерных величинах). Далее, подставляя (4.5) и (4.6) во вторую формулу (4.1), получим соотношения (3.12) и (3.13), из которых снова определим значения критических величин $\alpha_2$ и $n_2$, представленные в таблице 1.

В результате потери устойчивости поверхность литосферной плиты приобретает рельеф: чередование кольцевых складок с убывающей, как $r^{-1/2}$, от центра амплитудой. Расстояние в метрах между складками определяется формулой $l_s = j_s h/\alpha_*$, где $j_s$ ($s = 1, 2, \ldots$) – нули функции $J_0(x)$. О горизонтальных смещениях земной коры в случае полного сцепления нижней границы плиты с полупространством можно получить представление с помощью первой формулы (2.3) (верхняя строчка) и формул (4.4).

**5. Пространственная задача.** Рассмотрим в условиях пространственной постановки задачу о взаимодействии бесконечной упругой плиты, продольно сжатой усилием $N$ в направлении оси $x$, с бесконечным преднапряженным упругим полупространством. Будем, как и ранее, предполагать, что между нижней гранью плиты и поверхностью полупространства осуществлено полное сцепление, а верхняя грань плиты свободна от усилий, т.е. в уравнениях (2.1) $\sigma_1 = \tau_{11} = \tau_{12} = 0$.

В силу условий полного механического контакта между поверхностями плиты и полупространства будем на основании (2.1) иметь для полупространства при $z = 0$ следующие граничные условия:

$$4\theta h^2\Delta^2 u(x,y,0) = -3\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,y) + 4h\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(x,y) +$$
$$+\frac{2h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tau_1(x,y) + \frac{2(1-2\nu)h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_2(x,y)$$
$$4\theta h^2\Delta^2 \upsilon(x,y,0) = -3\frac{\partial}{\partial y}\sigma(x,y) + 4h\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tau_2(x,y) +$$
$$+\frac{2h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_2(x,y) + \frac{2(1-2\nu)h}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau_1(x,y) \tag{5.1}$$
$$4\theta h^3\Delta^2 w(x,y,0) + 6nh\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,y,0) = -3\sigma(x,y) +$$
$$+3h\frac{\partial}{\partial x}\tau_1(x,y) + 3h\frac{\partial}{\partial y}\tau_2(x,y)$$

при $z \to -\infty$ будем считать, что перемещения и дополнительные напряжения затухают. В (5.1) $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$ – касательные контактные напряжения, действующие между поверхностями плиты и полупространства соответственно в направлениях осей $x$ и $y$; $\sigma(x, y)$ – нормальное контактное напряжение.

Будем искать решение уравнений (1.6) и (1.7) в виде

$$u = U(\alpha,\beta,z)\sin\alpha x\cos\beta y, \quad \upsilon = V(\alpha,\beta,z)\cos\alpha x\sin\beta y$$
$$w = W(\alpha,\beta,z)\cos\alpha x\cos\beta y \tag{5.2}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – параметры, характеризующие периодичность задачи по $x$ с длиной полуволны $l_1 = \pi/\alpha$ и по $y$ с длиной полуволны $l_2 = \pi/\beta$. Такое общее решение, удовлетворяющее условию затухания при $z \to -\infty$ перемещений и напряжений, имеет вид

$$U = (c_1 + f\alpha z\kappa^{-1})e^{\kappa z}, \quad V = (c_2 + f\beta z\kappa^{-1})e^{\kappa z}, \quad W = (c_3 - fz)e^{\kappa z}$$
$$Q = (2\mu f + \gamma c_3 - \gamma f z)e^{\kappa z}, \quad f = \alpha c_1 + \beta c_2 + \kappa c_3, \quad \kappa = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{5.3}$$

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу для полупространства

$$z = 0: \quad u(x,y,0) = a(\alpha,\beta)\sin\alpha x\cos\beta y$$
$$\upsilon(x,y,0) = b(\alpha,\beta)\cos\alpha x\sin\beta y, \quad w(x,y,0) = c(\alpha,\beta)\cos\alpha x\cos\beta y \tag{5.4}$$

и найдем в результате ее решения с помощью формул (5.2) и (5.3) добавочные напряжения $\sigma_z(x, y, 0)$, $\tau_{xz}(x, y, 0)$ и $\tau_{yz}(x, y, 0)$ (используются формулы (1.5)). Имеем

$$\sigma_z(x,y,0) = \sigma(x,y) = (2\mu\kappa + \gamma)c\cos\alpha x\cos\alpha y$$
$$\tau_{xz}(x,y,0) = \tau_1(x,y) = \mu\kappa^{-1}[(2\alpha^2+\beta^2)a + \alpha\beta b]\sin\alpha x\cos\beta y \tag{5.5}$$
$$\tau_{yz}(x,y,0) = \tau_2(x,y) = \mu\kappa^{-1}[(2\beta^2+\alpha^2)b + \alpha\beta a]\cos\alpha x\sin\beta y$$

Перейдем к основной задаче (5.1). Подставляя (5.4) и (5.5) в формулы (5.1) и переходя к безразмерным величинам (3.6), которые дополним безразмерными величинами

$$\tilde{c} = c/h, \quad \tilde{\beta} = \beta h, \quad \tilde{\kappa} = \kappa h \tag{5.6}$$

получим однородную систему алгебраических уравнений относительно $a$, $b$ и $c$ (волны над безразмерными величинами далее опускаем):

$$\begin{gathered}
4\theta(\alpha^2+\beta^2)^2 a - 3\alpha(2\kappa+\gamma)c + 4\frac{\alpha^2}{\kappa}[(2\alpha^2+\beta^2)a+\alpha\beta b] + \\
+\frac{2}{1-\nu}\frac{\beta^2}{\kappa}[(2\alpha^2+\beta^2)a+\alpha\beta b] + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\alpha\beta}{\kappa}[(2\beta^2+\alpha^2)b+\alpha\beta a] = 0 \\
4\theta(\alpha^2+\beta^2)^2 b - 3\beta(2\kappa+\gamma)c + 4\frac{\beta^2}{\kappa}[(2\beta^2+\alpha^2)b+\alpha\beta a] + \\
+\frac{2}{1-\nu}\frac{\alpha^2}{\kappa}[(2\beta^2+\alpha^2)b+\alpha\beta a] + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\alpha\beta}{\kappa}[(2\alpha^2+\beta^2)a+\alpha\beta b] = 0 \\
4\theta(\alpha^2+\beta^2)^2 c - 6n\alpha^2 c + 3(2\kappa+\gamma)c - \\
-3\frac{\alpha}{\kappa}[(2\alpha^2+\beta^2)a+\alpha\beta b] - 3\frac{\beta}{\kappa}[(2\beta^2+\alpha^2)b+\alpha\beta a] = 0
\end{gathered} \tag{5.7}$$

Для существования нетривиального решения системы (5.7) необходимо, чтобы определитель, состоящий из коэффициентов системы при неизвестных $a$, $b$ и $c$, был бы равен нулю. Это приводит к соотношению

$$F_1(\alpha,\beta) - nF_2(\alpha,\beta) = 0 \tag{5.8}$$

где громоздкие функции $F_1(\alpha, \beta)$ и $F_2(\alpha, \beta)$ в целях краткости не выписываем. Задавая разные значения $\alpha$ и $\beta$, т.е. разную длину полуволн в направлениях осей $x$ и $y$, можем получить из (5.8) любое значение для безразмерного критического усилия потери устойчивости $n$. Однако для любого заданного значения $\beta$ можно найти $\alpha_*$, при котором критическое усилие $n_*$ минимально. Значения $\alpha_*$ и $n_*$, если $\beta$ задано, могут быть найдены из системы уравнений (5.8) и

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F_1(\alpha,\beta) - n\frac{\partial}{\partial\alpha}F_2(\alpha,\beta) = 0 \tag{5.9}$$

Далее при фиксированном $\beta$ полученным таким образом значениям $\alpha_*$ и $n_*$ будем придавать индекс 1.

В случае проскальзывания без трения в горизонтальном направлении нижней границы плиты по границе полупространства при сохранении их двухсторонней связи в вертикальном направлении нужно рассмотреть другую вспомогательную задачу для полупространства

$$\begin{gathered}
z = 0: \quad \tau_{xz}(x,y,0) = \tau_1(x,y) = 0, \quad \tau_{yz}(x,y,0) = \tau_2(x,y) = 0 \\
w(x,y,0) = c(\alpha,\beta)\cos\alpha x\cos\beta y
\end{gathered} \tag{5.10}$$

и найти добавочное напряжение $\sigma_z(x, y, 0)$. Снова имеем

$$\sigma_z(x,y,0) = \sigma(x,y) = (2\mu\kappa+\gamma)c\cos\alpha x\cos\beta y \tag{5.11}$$

*Таблица 2*

| $\beta$ | $\mu$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $n_1$ | $n_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | $3.5 \cdot 10^8$ | 0.2905 | 0.2950 | 17.02 | 17.58 |
| 0.05 | $3.5 \cdot 10^7$ | 0.2779 | 0.2784 | 141.5 | 144.0 |
| 0.05 | $3.5 \cdot 10^6$ | 0.2766 | 0.2766 | 1384 | 1407 |
| 0.1 | $3.5 \cdot 10^8$ | 0.2938 | 0.2979 | 17.94 | 19.15 |
| 0.1 | $3.5 \cdot 10^7$ | 0.2793 | 0.2797 | 149.4 | 158.5 |
| 0.1 | $3.5 \cdot 10^6$ | 0.2777 | 0.2778 | 1462 | 1551 |

(формулы (5.10) и (5.11) записаны в размерных величинах). Подставляя (5.10) и (5.11) в третью формулу (5.1) и переходя к безразмерным величинам (3.6) и (5.6), получим

$$[4\theta(\alpha^2+\beta^2)^2 - 6n(\alpha^2+\beta^2) + (2\kappa+\gamma)]c = 0 \tag{5.12}$$

Теперь $\alpha_*$ и $n_*$, если задано $\beta$, для указанного случая проскальзывания без трения могут быть найдены одновременно из системы уравнений

$$\begin{aligned} &4\theta(\alpha^2+\beta^2)^2 - 6n(\alpha^2+\beta^2) + 3(2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\gamma) = 0 \\ &8\theta(\alpha^2+\beta^2)\alpha - 6n\alpha + 3\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2} = 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Далее при фиксированном $\beta$ полученным таким образом значениям $\alpha_*$ и $n_*$ будем придавать индекс 2.

Для расчетов примем значения $h$, $G$, $\nu$, $g$ и $\rho$, указанные в п. 3. Безразмерную величину $\beta \neq 0$ будем задавать (при $\beta = 0$ получаются результаты, приведенные в табл. 1) и менять модуль сдвига $\mu$ в широких пределах, измеряя его в единицах Н/м$^2$ (см. таблицу 2). В результате потери устойчивости поверхность литосферной плиты приобретает ячеистую структуру соответственно в направлениях $x$ и $y$ с длинами полуволн $l_1 \approx 111$ км, $l_2 = 628$ км ($\beta = 0.05$) и $l_1 \approx 110$ км, $l_2 = 314$ км ($\beta = 0.1$).

О горизонтальных смещениях земной коры в случае полного сцепления нижней границы плиты с полупространством можно получить представление с помощью первой и второй формул (2.1) (верхние строчки) и формул (5.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00002).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Александров В.М.* Устойчивость системы покрытие–подложка при продольном сжатии покрытия // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 76–79.
3. *Александров В.М., Филиппова Л.М.* Контактная задача для тяжелой полуплоскости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 535–539.
4. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. *Коваленко Е.В.* О контакте твердого тела с упругим полупространством через тонкое покрытие // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 119–127.
6. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
7. *Авилкин В.И., Александров В.М., Коваленко Е.В.* Об использовании уточненных уравнений тонких покрытий в теории осесимметричных контактных задач для составных оснований // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1010–1018.

Москва

Поступила в редакцию
10.04.2006