

УДК 539.3

© 2006 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ, Л.В. ФЕДОРОВ

ПЛОСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКОВ

На основе уравнений геометрической теории упругости, позволяющих связать напряженное состояние среды с геометрией порождаемого напряжением риманова пространства, рассматривается осесимметричная плоская задача для диска, нагруженного в своей плоскости контурными и центробежными силами. Метрический коэффициент риманова пространства, соответствующий координате, нормальной к плоскости диска, истолковывается как переменная толщина диска, находящегося в трехмерном евклидовом пространстве. Предполагается, что полученная таким образом толщина определяет оптимальный закон распределения материала по радиусу диска. Для подтверждения этого предположения строятся решения задач классической теории упругости для дисков с найденным законом изменения толщины, которые сопоставляются с известными решениями задач оптимизации дисков.

1. Уравнения теории упругости для диска переменной толщины. Рассмотрим диск, показанный на фиг. 1 и отнесенный к цилиндрическим координатам r, θ, z . Для изотропного диска, находящегося в условиях плоского напряженного состояния и вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью ω , имеем следующую систему:

уравнение равновесия

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r + \sigma_r h'/h + \rho \omega^2 r = 0 \quad (1.1)$$

где σ_r и σ_θ – радиальные и кольцевые напряжения, а ρ – плотность материала; соотношения упругости

$$\varepsilon_r = (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)/E, \quad \varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu \sigma_r)/E \quad (1.2)$$

уравнения совместности деформаций

$$\varepsilon_r = (r \varepsilon_\theta)' \quad (1.3)$$

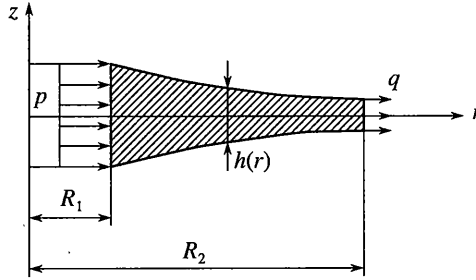
$$\varepsilon_z' = 0, \quad \varepsilon_z'' = 0 \quad (1.4)$$

В записанных выше уравнениях и далее штрихом обозначена производная по r . Поскольку плоское напряженное состояние является приближенным, уравнения совместности деформаций (1.4) обычно не учитываются и используется только уравнение (1.3). Записывая его в напряжениях с помощью соотношений (1.2), получим

$$\sigma_\theta' - \nu \sigma_r' + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r)/r = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, осесимметричная плоская задача теории упругости для диска сводится к двум уравнениям (1.1) и (1.5) относительно напряжений. На краях диска зададим статические граничные условия (фиг. 1):

$$\sigma_r|_{r=R_1} = -p, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = q \quad (1.6)$$



Фиг. 1

В общем случае, т.е. для диска с произвольно изменяющейся толщиной краевая задача (1.1), (1.5), (1.6) допускает только численное решение.

Для диска постоянной толщины, т.е. если $h = h_1 = \text{const}$, уравнения равновесия (1.1) можно тождественно удовлетворить с помощью функции напряжений $\varphi(r)$, полагая

$$\sigma_r = \varphi/r, \quad \sigma_\theta = \varphi' + \rho\omega^2 r^2 \quad (1.7)$$

Тогда уравнение совместности деформаций (1.5) принимает вид

$$\varphi'' + \varphi'/r - \varphi/r^2 + (3 + \nu)\rho\omega^2 r = 0 \quad (1.8)$$

Решение этого уравнения

$$\varphi = C_1 r + C_2/r - (3 + \nu)\rho\omega^2 r^3 \quad (1.9)$$

включает две произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий (1.6). В результате получим следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left(pR_1^2 + qR_2^2 - (p+q)\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left(pR_1^2 + qR_2^2 + (p+q)\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. Уравнения геометрической теории упругости. В геометрической теории упругости [2] используется аппарат общей теории относительности [3]. Роль уравнений равновесия (1.1) в этой теории играют уравнения закона сохранения тензора энергии-импульса T_j^i :

$$\nabla_i T_j^i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$T_j^i = \sigma_j^i - \rho v_j v^i \quad (2.2)$$

Здесь σ_j^i – напряжения, а v^i – компоненты скорости. Уравнения (2.1) и (2.2) записаны относительно смешанных компонент тензоров, так как для рассматриваемой задачи они

совпадают с физическими компонентами. Уравнения (2.1) тождественно удовлетворяются подстановкой

$$\chi T_j^i = G_j^i - \lambda \delta_j^i \quad (2.3)$$

где χ и λ – постоянные коэффициенты, δ_j^i – символ Кронекера, а

$$G_j^i = R_j^i - R \delta_j^i / 2 \quad (2.4)$$

является тензором Эйнштейна, выраженным через компоненты тензора Риччи R_j^i , который связан с кривизной риманова пространства.

Предположим, что пространство, занимаемое диском, можно представить как риманово пространство, описываемое следующей метрической формой [2]:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + H^2(r) dz^2 \quad (2.5)$$

где $H(r)$ – коэффициент Ламе, соответствующий координате z (фиг. 1). При $H = 1$ форма (2.5) соответствует евклидову пространству, отнесенному к цилиндрическим координатам. Для осесимметричной задачи уравнения (2.1), соответствующие метрической форме (2.5), имеют вид

$$\frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \frac{T_1^1 - T_2^2}{r} + \frac{H'}{H}(T_1^1 - T_3^3) + \frac{1}{H} \frac{\partial T_1^3}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial T_3^3}{\partial z} + \frac{\partial T_1^3}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{2H'}{H} \right) T_1^3 = 0$$

Для диска, вращающегося вокруг оси z (фиг. 1) с угловой скоростью ω , соотношения (2.2) для компонент тензора энергии-импульса записываются следующим образом:

$$T_1^1 = \sigma_r, \quad T_2^2 = \sigma_\theta - \rho \omega^2 r^2, \quad T_3^3 = \sigma_z, \quad T_j^i = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.7)$$

Подставляя равенства (2.7) в уравнения (2.6), получим

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r + H'(\sigma_r - \sigma_z)/H + \rho \omega^2 r = 0 \quad (2.8)$$

$$\partial \sigma_z / \partial z = 0 \quad (2.9)$$

Эти уравнения тождественно удовлетворяются, если воспользоваться равенствами (2.3), (2.4) и (2.7), которые позволяют выразить напряжения через метрический коэффициент H , т.е.

$$\chi \sigma_r = H'/(rH) + \lambda \quad (2.10)$$

$$\chi \sigma_\theta = H''/H + \chi \rho \omega^2 r^2 + \lambda \quad (2.11)$$

$$\chi \sigma_z = \lambda \quad (2.12)$$

В случае плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$. Однако если принять $\lambda = 0$, то равенства (2.10) и (2.11) не позволяют описать равнонапряженное состояние диска. В статических задачах геометрической теории упругости такое состояние соответствует евклидову пространству. Действительно, полагая $H = 1$ и $\omega = 0$, получим $\chi \sigma_r = \chi \sigma_\theta =$

$= \chi \sigma_z = \lambda$. В случае плоского напряженного состояния равнонапряженность обеспечивается, если $\chi \sigma_r = \chi \sigma_\theta = \lambda$ и $\sigma_z = 0$. Для того чтобы такое состояние могло быть описано соотношениями геометрической теории, проведем следующее преобразование. Как следует из уравнения (2.9), оно тождественно удовлетворяется при любом постоянном напряжении σ_z . В связи с этим примем $\sigma_z = \lambda + \eta$, где η – постоянная величина, определяемая из условия $\eta = -\lambda$. Тогда $\sigma_z = 0$, а напряжения σ_r и σ_θ определяются равенствами (2.10) и (2.11), включающими параметр λ . При $\sigma_z = 0$ уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r + H' \sigma_r / H + \rho \omega^2 r = 0 \quad (2.13)$$

Для того чтобы установить физический смысл этого уравнения, сопоставим его с уравнением (1.1), т.е. с уравнением равновесия классической теории упругости для диска переменной толщины. В результате такого сопоставления можно заключить, что, принимая в уравнении (2.13):

$$H'/H = h'/h \quad (2.14)$$

можно привести его к уравнению (1.5). Таким образом, (2.13), по существу, является уравнением равновесия, а метрический коэффициент $H(r)$ соответствует толщине диска $h(r)$. Подстановка напряжений, выраженных через $H(r)$ с помощью равенств (2.10) и (2.11), позволяет тождественно удовлетворить уравнению (2.13). Получаемая в результате задача полностью аналогична задаче классической теории упругости, сформулированной в напряжениях. При этом роль функций напряжений в геометрической теории играет метрический коэффициент $H(r)$. Для того чтобы определить этот коэффициент, необходимо воспользоваться уравнениями аналогичными уравнениям совместности деформаций (1.3) и (1.4). В геометрической теории упругости роль уравнений совместности деформаций играют условия инвариантности составляющих тензора Эйнштейна (2.4) [2], предполагающие, что они не изменяются при деформации среды. В рассматриваемой задаче отличными от нуля являются три составляющих: G_1^1 , G_2^2 , G_3^3 , и для случая малых деформаций условия их инвариантности имеют вид

$$\varepsilon_r = (r\varepsilon_\theta)' \quad (2.15)$$

$$H'(r\varepsilon_\theta' - 2\varepsilon_r)/H + \varepsilon_z' = 0 \quad (2.16)$$

$$2H''\varepsilon_r/H + H'(2\varepsilon_z' - \varepsilon_r')/H + \varepsilon_z'' = 0 \quad (2.17)$$

Уравнение (2.15) совпадает с классическим уравнением совместности деформаций (1.3), что естественно, так как в плоскости диска метрическая форма (2.5) соответствует евклидову пространству. Уравнения (2.16) и (2.17) аналогичны уравнениям (1.4) и так же, как в классической теории упругости, в дальнейшем не используются. Уравнение совместности деформаций (2.15), записанное в напряжениях, совпадает с уравнением (1.5) классической теории упругости.

Таким образом, осесимметричная плоская задача геометрической теории упругости сводится к классическому уравнению совместности деформаций в напряжениях, из которого, после подстановки напряжений из равенств (2.10) и (2.11), определяется метрический коэффициент $H(r)$.

Предварительно необходимо выделить тривиальное решение уравнения совместности деформаций, которое соответствует однородному и равнонапряженному состоянию диска, т.е.

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma \quad (2.18)$$

где σ – напряжение, не зависящее от r .

Такое напряженное состояние возможно только при специальных граничных условиях (1.6), т.е. при

$$\sigma_r|_{r=R_1} = \sigma_r|_{r=R_2} = \sigma \quad (2.19)$$

Напряжения тождественно удовлетворяют уравнению совместности деформаций (2.15) или (1.5), а уравнение равновесия (2.13) после подстановки равенств (2.18), принимает вид

$$\sigma H'/H + \rho \omega^2 r = 0 \quad (2.20)$$

и позволяет определить метрический коэффициент $H(r)$ для равнонапряженного диска. Если диск не вращается ($\omega = 0$), то H не зависит от r и метрическая форма (2.5) соответствует евклидовому пространству.

Если равнонапряженное состояние диска при заданных условиях нагружения невозможно, то можно принять $\lambda = 0$. Тогда равенства (2.10) и (2.11) дают следующие выражения для напряжений:

$$\chi \sigma_r = H'/(rH), \quad \chi \sigma_\theta = H''/H + \chi \rho \omega^2 r^2 \quad (2.21)$$

При этом уравнение равновесия (2.13) удовлетворяется тождественно, а уравнение совместности деформаций (2.15) после подстановки в него (2.21) принимает вид

$$r^2 H H''' + r H H'' - r^2 H' H'' - H H' + \nu r (H')^2 + \chi (3 + \nu) H^2 \rho \omega^2 r^3 = 0 \quad (2.22)$$

Это уравнение позволяет определить коэффициент $H(r)$ в случае неравнонапряженного состояния диска.

3. Линеаризованная задача геометрической теории упругости. Предположим, что риманово пространство, определяемое метрической формой (2.5) мало отличается от евклидова пространства, т.е.

$$H(r) = 1 + f(r) \quad (3.1)$$

причем амплитуда функции $f(r)$ много меньше единицы. Осуществляя линеаризацию представленных выше соотношений по $f(r)$, запишем линейные уравнения осесимметричной плоской задачи геометрической теории упругости. Уравнения (2.10) и (2.11) для напряжения и уравнение (2.14) для толщины диска имеют вид

$$\chi \sigma_r = f'/r + \lambda, \quad \chi \sigma_\theta = f'' + \chi \rho \omega^2 r^2 + \lambda \quad (3.2)$$

$$h' - f'h = 0 \quad (3.3)$$

Для равнонапряженного диска функция $f(r)$ определяется из уравнения равновесия (2.20), т.е.

$$f' = -\rho \omega^2 r / \sigma \quad (3.4)$$

В общем случае напряженного состояния функция $f(r)$ определяется из уравнения совместности деформаций (2.22), которое принимает вид

$$r^2 f''' + r f'' - f' + \chi (3 + \nu) \rho \omega^2 r^3 = 0 \quad (3.5)$$

Заметим, что формально уравнения (3.2) и (3.5) не отличаются от соответствующих уравнений классической теории упругости, в которых функция $f(r)$ является функцией напряжений. Однако в рамках геометрической теории упругости функция $f(r)$ приобретает геометрическую интерпретацию. Согласно уравнению (3.1) она определяет отли-

чие метрического коэффициента $H(r)$ от единицы, т.е. от коэффициента Ламе евклидова пространства. Более того, как следует из уравнения (3.3), функция $f(r)$ связана с законом изменения толщины диска по его радиусу. Существенно, что эта толщина зависит от напряжений, которые как бы формируют некоторую естественную геометрию диска. Приведенные далее примеры дают основание предполагать, что получаемая в результате решения задачи геометрической теории толщина диска определяет рациональный закон распределения материала по радиусу диска.

4. Задачи статики. Рассмотрим диск, который не вращается ($\omega = 0$) и нагружен по внутренней поверхности $r = R_1$ давлением p (фиг. 1). Граничные условия (1.6) имеют вид

$$\sigma_r|_{r=R_1} = -p, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0 \quad (4.1)$$

Предположим сначала, что диск имеет постоянную толщину h_0 и $R_2 = 2R_1$. Решение (1.10), соответствующее классической теории упругости, в котором следует принять $q = 0$, $\omega = 0$, $R_2/R_1 = 2$, дает следующие значения для напряжений на внутренней и наружной поверхностях диска:

$$\bar{\sigma}_\theta|_{r=R_1} = 1.67, \quad \bar{\sigma}_r|_{r=R_1} = -1, \quad \bar{\sigma}_\theta|_{r=R_2} = 0.67, \quad \bar{\sigma}_r|_{r=R_2} = 0 \quad (4.2)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma/p.$$

Максимальные напряжения действуют на внутренней поверхности диска. Объем материала диска $V_0 = 3\pi R_1^2 h_0$.

Сформулируем задачу геометрической теории, заключающуюся в определении закона изменения толщины диска, удовлетворяющего следующим условиям: радиус внутренней поверхности, на которой действуют давление p , равен R_1 , т.е. радиусу исходного диска постоянной толщины; толщина диска при $r = R_1$, равна толщине исходного диска h_0 ; максимальные напряжения в диске переменной толщины не превышают напряжений (4.2), т.е. величины $\bar{\sigma}_\theta = 1.67$.

Как уже отмечалось, есть основание полагать, что получаемая в результате толщина диска определяет некоторый рациональный закон распределения материала по радиусу диска. При этом, поскольку напряжения максимальны при $r = R_1$ и убывают при увеличении радиуса, естественно ожидать, что толщина диска окажется максимальной при $r = R_1$ и минимальной при $r = R_2$, где напряжения минимальны. Однако, как следует из представленного ниже расчета, решение задачи геометрической теории приводит к прямо противоположному результату: толщина оказывается максимальной на наружном контуре диска.

Поскольку граничные условия (4.1) не соответствуют условиям (2.19), при которых существует равнонапряженное состояние диска, задача сводится к уравнению (3.5), которое при $\omega = 0$ принимает вид

$$r^2 f''' + r f'' - f' = 0 \quad (4.3)$$

Выражение (3.2) для σ_r применительно к рассматриваемой задаче, для которой $\lambda = 0$, можно записать следующим образом:

$$\chi \sigma_r = f'/r \quad (4.4)$$

Подставляя общее решение уравнения (4.3) в выражение (4.4) и определяя постоянные интегрирования из граничных условий (4.1), окончательно получим

$$f'(r) = -\frac{\chi p R_1^2 r \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (4.5)$$

Воспользуемся уравнением (3.3) для толщины диска. Интегрируя это уравнение с учетом граничного условия $h(r = R_1) = h_0$, найдем

$$h(r) = h_0 \exp[\beta(\bar{r}^2 - 1)]/\bar{r}^\alpha \quad (4.6)$$

$$\bar{r} = r/R_1, \quad \alpha = \chi p R_1^2 R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2), \quad \beta = \alpha R_1^2 / (2R_2^2) \quad (4.7)$$

Таким образом, решение задачи геометрической теории упругости для диска с отверстием, по контуру которого действует давление p , позволяет получить некоторый закон изменения толщины диска, определяемый равенством (4.7). Для анализа полученного результата рассмотрим задачу классической теории упругости для диска с толщиной, изменяющейся по радиусу в соответствии с равенством (4.6). Эта задача сводится к уравнениям (1.1) и (1.5), которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r + h' \sigma_r / h = 0 \quad (4.8)$$

$$r(\sigma_\theta' - \nu \sigma_r') + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0$$

где $h(r)$ задается равенством (4.6). Система (4.8) интегрируется численно при граничных условиях (4.1). При этом параметр α , определяемый соответствующим равенством (4.7), подбирается так, чтобы максимальное кольцевое напряжение в диске переменной толщины оказалось равным значению $\bar{\sigma}_\theta = 1.67$, соответствующему равенствам (4.2) для исходного диска с постоянной толщиной h_0 и отношением радиусов $R_2/R_1 = 2$.

Предварительно проинтегрируем соотношение (4.5) и найдем $f(r)$. Поскольку при $r = R_1$ толщина диска равна h_0 , постоянная интегрирования находится из условия $f(r = R_1) = 0$. Учитывая обозначения (4.7), получим

$$f(\bar{r}) = \alpha[(\bar{r}^2 - 1)/(2s^2) - \ln \bar{r}] \quad (4.9)$$

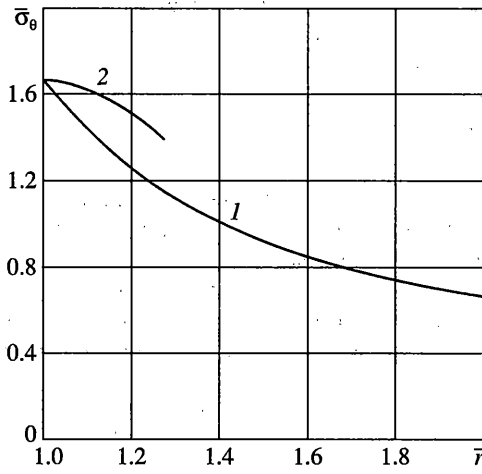
где $s = R_2/R_1$. При $s = 2$ решение уравнения (4.8) дает $\alpha = 0$, $h = h_0$ и $f = 0$, т.е. диск переменной толщины вырождается в исходный диск постоянной толщины. При $s > 2$ получаем $\alpha > 0$ и $f < 0$, что соответствует диску, толщина которого убывает при увеличении r . При $s < 2$ имеем $\alpha < 0$ и $f > 0$, т.е. толщина диска возрастает с увеличением r . Таким образом, имеется семейство дисков с одинаковыми максимальными напряжениями и различными законами изменения толщины, зависящими от соотношения $s = R_2/R_1$.

Найдем параметр s из условия минимума объема материала диска

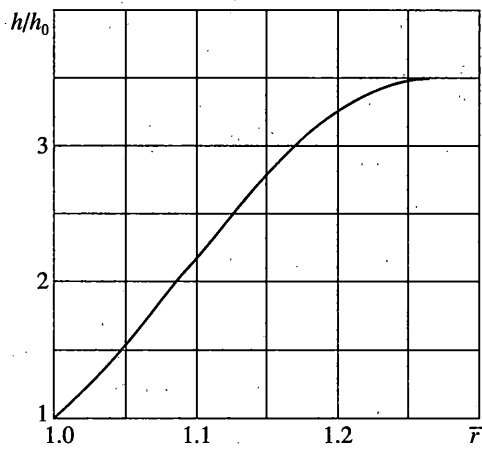
$$V = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} h(r) r dr \quad (4.10)$$

В результате получаем $s = 1.266$, $V = 3\pi R_1^2 h_0/2$, что вдвое меньше объема V_0 диска постоянной толщины, для которого $R_2/R_1 = 2$. Распределение кольцевых напряжений по радиусу диска постоянной толщины (кривая 1) и диска минимального объема (кривая 2) показано на фиг. 2. Изменение толщины диска минимального объема по радиусу, соответствующее равенству (4.6), представлено на фиг. 3. Толщина диска увеличивается при удалении от нагруженного отверстия, на контуре которого действуют максимальные напряжения. Максимальное значение функции $f(\bar{r})$, определяемое равенством (4.9), составляет $5 \cdot 10^{-5}$, что оправдывает операцию линеаризации, проведенную в п. 3.

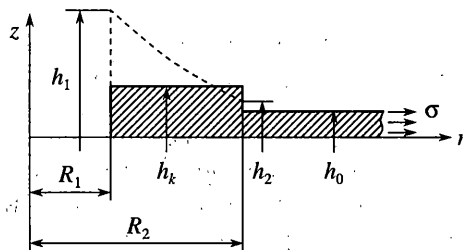
В качестве второго примера рассмотрим задачу оптимального подкрепления кругового отверстия с радиусом R_1 в неограниченной пластине растягиваемой напряжениями $\sigma_r = \sigma$ (фиг. 4). Рассмотрим решение классической теории упругости для пластины с тол-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

щиной h_0 , усиленной по контуру отверстия кольцом с наружным радиусом R_2 и с толщиной h_k . Как известно, размеры кольца R_2 и h_k можно подобрать так, что при $r \geq R_2$ пластина оказывается равнонапряженной, т.е. при $r \geq R_2$ напряжения и деформации не зависят от r и имеют вид

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon = (1 - \nu)\sigma/E \quad (4.11)$$

Напряженное состояние кольца ($R_1 \leq r \leq R_2$) описывается соотношениями (1.10), в которых следует принять $p = 0, \omega = 0, q = \sigma h_0/h_k$. В результате получим

$$\sigma_r = \frac{\sigma h_0 s^2}{h_k(s^2 - 1)} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma h_0 s^2}{h_k(s^2 - 1)} \left(1 + \frac{1}{\bar{r}^2}\right) \quad (4.12)$$

где, как и ранее, $\bar{r} = r/R_1$ и $s = R_2/R_1$. Соответствующая кольцевая деформация определяется из закона Гука (1.2):

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma h_0 s^2}{E h_k (s^2 - 1)} \left(1 - \nu + \frac{1 + \nu}{\bar{r}^2}\right)$$

Условие совместности деформаций кольца и пластины имеет вид $\varepsilon_\theta|_{r=R_2} = \varepsilon$, где ε определяется последним равенством (4.11). В результате получим следующее выражение для толщины кольца:

$$h_k = \frac{h_0}{s^2 - 1} \left(s^2 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\right) \quad (4.13)$$

Наружный радиус кольца, т.е. параметр s , найдем из условия равнопрочности кольца и пластины. Согласно второму равенству (4.12), максимальное напряжение σ_θ действует на внутренней поверхности кольца. Приравнявая это напряжение напряжению в пластине σ , получим $2h_0 s^2 = h_k(s^2 - 1)$. Решая это уравнение совместно с уравнением (4.13), окончательно найдем

$$s^2 = (1 + \nu)/(1 - \nu), \quad h_k = h_0(1 + \nu)/\nu \quad (4.14)$$

Объем материала подкрепляющего кольца определяется равенствами (4.10) и (4.14), т.е.

$$V_0 = 2\pi R_1^2 h_0(1 + \nu)/(1 - \nu) \quad (4.15)$$

При $\nu = 0.3$ получаем

$$s = 1.363, \quad h_k = 4.333h_0, \quad V_0 = 3.714\pi R_1^2 h_0 \quad (4.16)$$

Как следует из равенства (4.15), минимальный объем материала кольца достигается при $\nu = 0$. В этом случае соотношения (4.14) и (4.15) дают

$$s = 1, \quad h_k \rightarrow \infty, \quad V_0 = 2\pi R_1^2 h_0 \quad (4.17)$$

Отсюда можно заключить, что при $\nu = 0$ кольцо вырождается в цилиндрическую оболочку, имеющую радиус R_1 , бесконечно большую высоту и бесконечно малую толщину. При этом площадь сечения такого бесконечно тонкого кольца является конечной и может быть найдена в результате решения контактной задачи, рассмотренной выше, если считать, что сечение кольца, подкрепляющего отверстие в пластине, имеет бесконечно

малый размер по радиусу и площадь F . Под действием контактного радиального напряжения σ в кольце возникают напряжение и деформация, определяемые следующим образом:

$$\sigma_\theta = \sigma h_0 R_1 / F, \quad \varepsilon_\theta = \sigma h_0 R_1 / (EF)$$

Используя условия совместности деформации кольца и пластины и приравнявая ε_θ деформации пластины ε , определяемой вторым равенством (4.11), получим

$$F = h_0 R_1 / (1 - \nu), \quad \sigma_\theta = (1 - \nu) \sigma \quad (4.18)$$

Объем материала кольца

$$V_0 = 2\pi R_1 F = 2\pi R_1^2 h_0 / (1 - \nu) \quad (4.19)$$

Сопоставляя этот результат с равенством (4.15), можно заключить, что объем материала бесконечно тонкого кольца в $(1 + \nu)$ раз меньше объема кольца с конечным размером по радиусу. Однако, как следует из второго равенства (4.18), и для такого кольца напряжение σ_θ в общем случае не достигает напряжения в пластине σ , т.е. система не является равнонапряженной. Абсолютный минимум объема материала достигается в бесконечно тонком кольце, подкрепляющем отверстие в пластине из материала с нулевым коэффициентом Пуассона. Принимая в равенствах (4.18) и (4.19) $\nu = 0$, получим

$$F = h_0 R_1, \quad \sigma_\theta = \sigma, \quad V_0 = 2\pi R_1^2 h_0 \quad (4.20)$$

Эти результаты соответствуют равнонапряженной системе, в которой все напряжения постоянны и равны σ .

Рассмотрим аналогичную задачу геометрической теории упругости. Для пластины, т.е. для области $r \geq R_2$ (фиг. 4), воспользуемся уравнением (3.4), описывающим равнонапряженное состояние, которое при $\omega = 0$ дает $f' = 0$. Тогда из уравнения (3.3) для толщины пластины следует $h = h_0$. Таким образом, при $r \geq R_2$ пластина имеет постоянную толщину такую же, что и пластина, рассмотренная выше на основе уравнений классической теории упругости.

Для кольца, т.е. для области $R_1 \leq r \leq R_2$, решение задачи геометрической теории позволяет найти закон изменения толщины кольца по радиусу $h(r)$. Это решение аналогично построенному выше для кольца, нагруженного внутренним давлением. При этом граничные условия (4.1) заменяются следующими (фиг. 4):

$$\sigma_r|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = h_0 \sigma / h_2 \quad (4.21)$$

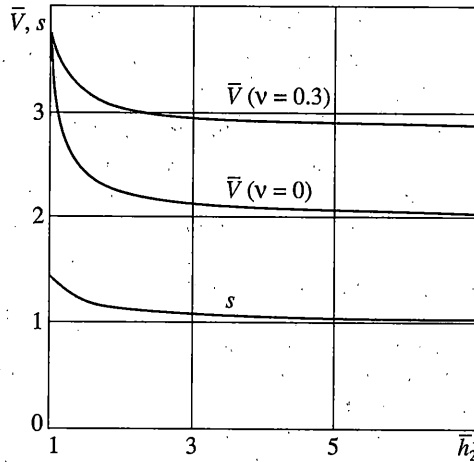
Выражение для $f'(r)$, аналогичное равенству (4.5), имеет вид

$$f'(r) = \frac{\chi \sigma h_0 R_2^2 r}{h_2 (R_2^2 - R_1^2)} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$

Соответственно, толщина кольца, аналогичная (4.6) и удовлетворяющая условию $h|_{r=R_2} = h_2$ (фиг. 4), определяется следующим образом:

$$h(\bar{r}) = h_2 (s/\bar{r})^{\alpha_1} \exp[-\alpha_1 (s^2 - \bar{r}^2)/2] \quad (4.22)$$

$$\alpha_1 = \frac{\chi \sigma h_0 R_2^2}{h_2 (R_2^2 - R_1^2)}, \quad \bar{r} = r/R_1, \quad s = R_2/R_1.$$



Фиг. 5

В результате задача сводится к уравнениям (4.8), в которых $h(r)$ определяется равенством (4.22). Эти уравнения интегрируются численно при граничных условиях (4.21) и следующих ограничениях: радиус внутренней поверхности R_2 и толщина пластины h_0 являются заданными; деформация кольца при $r = R_2$ (фиг. 4) определяется соответствующим равенством (4.11); максимальные напряжения в кольце не превышают напряжения в пластине σ .

Два последние условия позволяют найти наружный радиус кольца и толщину $h_1 = h|_{r=R_1}$. При этом остается один свободный параметр – толщина кольца в месте его соединения с пластиной $h_2 = h|_{r=R_2}$ (фиг. 4). Зависимость относительного объема кольца $\bar{V} = V/(\pi R_1^2 h_0)$, найденного с помощью равенств (4.10) и (4.22), от относительной толщины $\bar{h}_2 = h_2/h_0$ показана на фиг. 5 (кривая, соответствующая $\nu = 0.3$). Там же представлена зависимость относительного наружного радиуса кольца $s = R_2/R_1$ (фиг. 4) от \bar{h}_2 . При $\nu = 0.3$ оптимальные параметры кольца, следующие из теории упругости, определяются равенствами (4.16). При том же наружном радиусе кольца ($s = 1.363$) решение, соответствующее геометрической теории, дает $\bar{h}_1 = h_1/h_0 = 7.65$, $\bar{h}_2 = 1.16$ и $\bar{V} = 3.46$. За счет того, что толщина кольца, следующая из геометрической теории, является переменной, его объем снижается на 6.8% по сравнению с величиной V_0 в последнем равенстве (4.16). Минимальный относительный объем материала кольца, следующий из геометрической теории при $\nu = 0.3$, соответствует параметрам $s = 1.03$, $\bar{h}_1 = 88.95$ и составляет $\bar{V} = 2.88$, что на 22.5% ниже объема оптимального кольца, определяемого теорией упругости.

Как уже отмечалось, из решения теории упругости следует, что полностью равномерно напряженная, подкрепленная пластина с кольцом обладает теоретически минимальным объемом $\bar{V}_0 = 2$, определяемым последним равенством (4.17), если для кольца $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 \rightarrow \infty$ и для пластины $\nu = 0$. Поскольку можно предположить, что кольца с объе-

мом меньшим $\bar{V}_0 = 2$ не существует, представляет интерес решение задачи геометрической теории при $\nu = 0$. Соответствующая зависимость $\bar{V}(\bar{h}_2)$ показана на фиг. 5 (кривая, соответствующая $\nu = 0$). В результате решения получаются следующие параметры: $s = 1.03$, $\bar{h}_1 = 58.6$, $\bar{h}_2 = 6.5$ и $\bar{V} = 2.044$. Найденный объем незначительно отличается от теоретического минимального, причем полученное отклонение (2.2%) может быть связано с погрешностью численного решения задачи геометрической теории.

Важно отметить, что при определении закона изменения толщины кольца в этой теории условие минимума объема не привлекалось. Равенство (4.22) для толщины фактически является решением уравнения (4.3), определяющего метрический коэффициент риманова пространства, порождаемого напряженным состоянием кольца. Таким образом, можно заключить, что получаемая в результате решения задачи геометрической теории толщина пластины с отверстием и размеры подкрепляющего это отверстие кольца обеспечивают минимум объема материала.

5. Вращающийся диск. Рассмотрим сплошной круглый диск с толщиной $h(r)$ и наружным радиусом R , вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Относительная энергоемкость диска характеризуется параметрами

$$e = E/M, \quad E = \pi \rho \omega^2 \int_0^R h r^3 dr, \quad M = 2\pi \rho \int_0^R h r dr \quad (5.1)$$

где E и M – кинетическая энергия и масса диска.

Для диска постоянной толщины $h = h_0$ напряжения определяются равенствами (1.10), в которых следует принять $p = q = 0$, т.е.

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R^2 - r^2), \quad \sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(R^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \quad (5.2)$$

При этом, согласно равенствам (5.1), имеем

$$E_0 = \frac{\pi}{4} \rho R^4 h_0 \omega_0^2, \quad M_0 = \pi \rho R^2 h_0, \quad e_0 = \frac{1}{4} R^2 \omega_0^2 \quad (5.3)$$

В качестве примера рассмотрим диск с радиусом $R = 0.5$ м, изготовленный из стали с плотностью $\rho = 7800$ кг/м³ и пределом прочности $\sigma = 1500$ МПа. Используя первую теорию прочности ($\sigma_{\max} = \sigma$) и принимая $\nu = 0.3$, из равенств (4.1) можно получить предельную скорость вращения диска $\bar{\omega}_0 = 1365$ с⁻¹.

Рассмотрим задачу геометрической теории упругости. Для равнонапряженного диска, в котором $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$, закон изменения толщины по радиусу следует из уравнений (3.3) и (3.4), т.е.

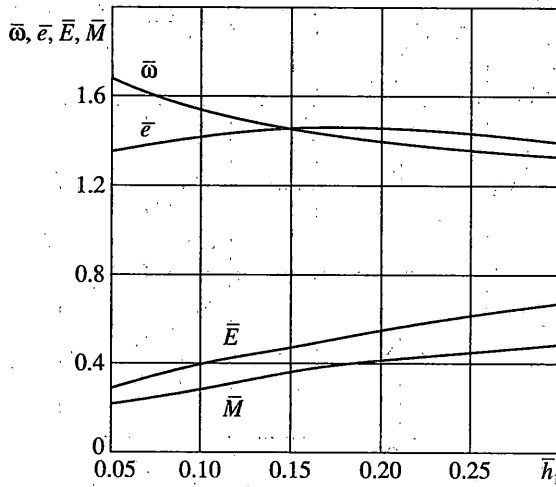
$$h' + \frac{\rho \omega^2}{\sigma} r h = 0$$

Решение этого известного [4] уравнения, удовлетворяющее граничному условию $h|_{r=0} = h_0$, имеет вид

$$h = h_0 \exp(-\rho \omega^2 / (2\sigma)) \quad (5.4)$$

Как отмечалось в п. 2, равнонапряженный диск существует только при специальном граничном условии на его внешнем контуре, т.е. при

$$\sigma_r|_{r=R} = \sigma$$



Фиг. 6

Для диска со свободным краем толщина связана соотношением (3.3) с функцией $f(r)$, являющейся решением уравнения (3.5), имеющим вид

$$f' = C_1 \bar{r} + C_2 / \bar{r} - \alpha R \bar{r}^3, \quad \bar{r} = r/R, \quad \alpha = (3 + \nu) \chi \rho \omega^2 R^2 / 8$$

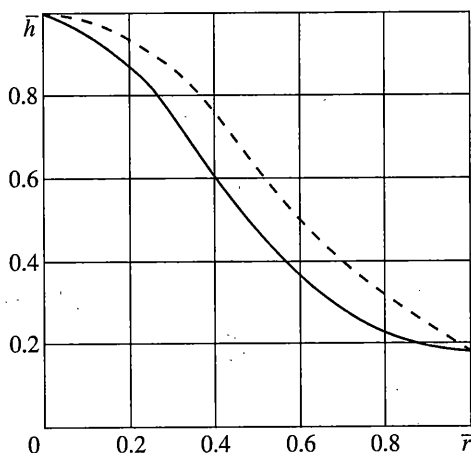
Подставляя это решение в равенство (4.4) для σ_r и удовлетворяя условию регулярности σ_r при $r = 0$ и граничному условию на наружном контуре диска $\sigma_r|_{r=R} = 0$, получим $f' = \alpha R \bar{r} (1 - \bar{r}^2)$. Подставляя это выражение в уравнение (3.3) для толщины диска и интегрируя это уравнение при условии $h|_{r=0} = h_0$, будем иметь

$$\bar{h} = h/h_0 = \exp[\alpha \bar{r}^2 (2 - \bar{r}^2) / 4]. \tag{5.5}$$

На краю диска $\bar{r} = 1$ равенство (5.5) принимает вид

$$\bar{h}_1 = e^{\alpha/4} \tag{5.6}$$

Рассмотрим, как и ранее, задачу классической теории упругости для вращающегося диска, толщина которого изменяется по радиусу в соответствии с равенством (5.5). Задача сводится к численному интегрированию системы, состоящей из уравнения равновесия (1.1) и уравнения совместности деформаций (1.5). Для исследования полученного решения варьировалась относительная толщина диска на краю \bar{h}_1 , с помощью равенства (5.6) определялся соответствующий параметр α , а угловая скорость ω подбиралась так, чтобы максимальное напряжение не превышало предела прочности материала $\sigma = 1500$ МПа. Зависимости массы, $\bar{M} = M/M_0$, абсолютной и удельной энергоемкости $\bar{E} = E/E_0$, $\bar{e} = e/e_0$ и угловой скорости вращения $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, отнесенных к соответствующим характеристикам (5.3) диска с постоянной толщиной, от \bar{h}_1 , представлены на фиг. 6. Как следует из фиг. 6, параметры \bar{M} , \bar{E} и $\bar{\omega}$ монотонно зависят от \bar{h}_1 . Однако удельная энергоемкость \bar{e} имеет максимум $\bar{e}_m = 1.45$ при $\bar{h}_1 = 0.18$. При этом



Фиг. 7

$\bar{M}_m = 0.37$, $\bar{E}_m = 0.5$ и $\bar{\omega}_m = 1.44$. Изменение толщины диска, определяемой равенством (5.5) при $\bar{h}_1 = 0.18$, по радиусу показано на фиг. 7 сплошной линией. Штриховая линия соответствует равнонапряженному диску, толщина которого (5.4) удовлетворяет условию $h|_{r=R} = 0.18h_0$. Относительные характеристики равнонапряженного диска: $\bar{M} = 0.48$, $\bar{E} = 0.35$ и $\bar{e} = 0.73$ (без учета массы, обеспечивающей заданные напряжения $\sigma_r = \sigma$ на наружном краю). Таким образом, равнонапряженный диск имеет массу в 1.3 раза большую, а абсолютную и удельную энергоемкости соответственно в 1.5 и в 2 раза меньшую, чем для диска, толщина которого следует из геометрической теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.З. Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 425–430.
2. Васильев В.В., Федоров Л.В. Геометрическая теория упругости и оптимизация формы твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 16–27.
3. Синг Д. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 432 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.02.2006