

## ДИНАМИКА ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ШАРА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Задача о качении шара по шероховатой плоскости изложена в большом количестве публикаций [1–6]. Наиболее принципиальным моментом в этой задаче является представление о силовом взаимодействии шара с плоскостью в точке контакта. В указанных публикациях авторы полагают, что используют модель сухого трения по Кулону, считая силу в точке контакта направленной против относительной скорости скольжения и не зависящей от ее модуля.

На самом деле такая модель представляет собой умозрительную экстраполяцию закона Кулона на условия, в которых он первоначально не формулировался и экспериментально не проверялся. Между тем, существуют эксперименты, опровергающие возможность такого расширения модели в тех случаях, когда чистое скольжение сопровождается верчением [7].

Эффекты сухого трения, хорошо известные для протяженных зон контакта в условиях сложной кинематики скольжения [8, 9], имеют место и для точечных контактов. Ниже в задаче о качении однородного шара используется модель сухого трения по Кулону, примененная в дифференциальной форме с последующим интегрированием по области контакта. Зона контакта находится в соответствии с теорией контактных напряжений Герца, после чего рассматривается предельный переход к точечному контакту.

Уравнения движения тяжелого шара с такой моделью трения допускают точное интегрирование и анализ. Из него вытекает, что следствия последовательного применения закона сухого трения противоречат результатам применения упрощенного варианта такого закона.

**1. Общие свойства сухого трения по Кулону.** Рассмотрим вначале случай скольжения тела по плоскости с произвольной площадкой контакта. Будем исходить из модели сухого трения Кулона, сводящейся к следующему (фиг. 1).

Пусть выполнены условия

1. Момент вокруг центра  $C$  приложенных к телу движущих сил равен нулю.
2. Скольжение является чисто поступательным.

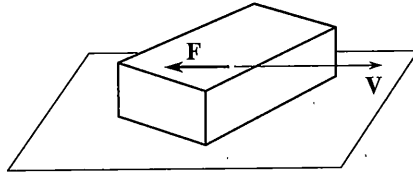
Тогда

1. Тело не движется, если  $|\mathbf{F}| < F_0$ . Сила  $F_0$ , называемая силой трения трогания, определяет зону застоя.

2. Вне зоны застоя сила, препятствующая движению (сила сухого трения), связана со скоростью поступательного скольжения формулой

$$\mathbf{F} = -fN \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}, \quad |\mathbf{V}| \neq 0 \quad (1.1)$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения,  $N$  – модуль силы взаимодействия между телом и плоскостью по нормали к ней.



Фиг. 1

Центр  $C$  есть центр тяжести распределения сил нормального давления в области контакта тела и плоскости.

Опыт показывает, что сформулированный закон нарушается, если не выполнено любое из приведенных выше условий. В частности, сила трения трогания зависит от приложенного момента, а сила (1.1) зависит не только от линейной скорости, но и от угловой скорости.

Условия “1–2” являются слишком жесткими, и они почти никогда не выполняются. Предметом интереса в этих случаях в литературе являлось либо построение зоны застоя в переменных “главный вектор – главный момент” приложенных к телу сил [8, 10, 11], либо изучение возможностей намеренного использования нарушения условий “1–2” с целью уменьшения сопротивления движению (эффект преобразования сухого трения) [9]. Вместе с тем существует значительное число публикаций, в которых очевидное нарушение условий “1–2” попросту игнорируется [1–6]. Применение закона (1) в таких случаях не может оправдываться ссылкой на закон Кулона и должно либо рассматриваться в качестве новой гипотезы, либо эффект нарушения этих условий должен специально оцениваться.

Наибольшее число такого рода работ относится к задачам качения выпуклых твердых тел по шероховатым поверхностям, когда зона контакта предельно мала и чаще всего полагается точечной.

Вопрос о применимости закона (1.1) в таких случаях может рассматриваться предельным переходом от конечной зоны контакта, когда закон (1.1) принимается в дифференциальной форме, а связь сил и моментов трения с кинематическими параметрами вычисляется посредством интегрирования элементарных сил по площадке контакта.

Пусть помимо линейной скорости  $v$  центра  $C$  тело обладает угловой скоростью  $\omega$ . Закон (1.1) в этом случае может быть применен только в дифференциальной форме. Интегрируя его по площадке контакта  $S$  (фиг. 2), получим выражение для полной силы трения

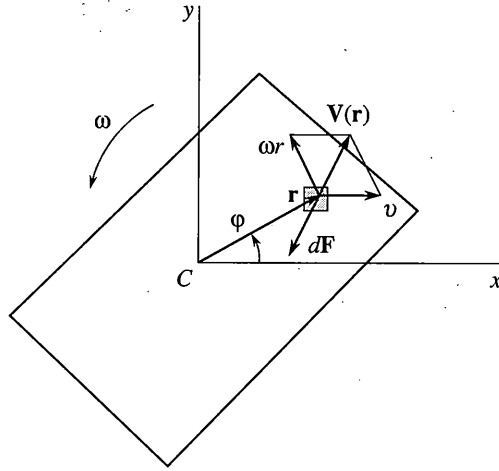
$$\mathbf{F} = -f \iint_S \sigma(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r})}{|\mathbf{V}(\mathbf{r})|} dx dy \left( \iint_S \sigma(\mathbf{r}) dx dy = N \right) \quad (1.2)$$

и для момента сил трения вокруг  $C$ :

$$M_C = -f \iint_S \sigma(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{r})}{|\mathbf{V}(\mathbf{r})|} dx dy \quad (1.3)$$

Где  $\sigma(\mathbf{r})$  представляет собой распределение нормальных напряжений по площадке контакта. Считаем для простоты, что коэффициент трения  $f$  постоянен в области контакта,  $N$  – нормальная реакция плоскости скольжения.

Обозначим буквой  $\epsilon$  характерный размер площадки контакта и будем рассматривать линейную скорость  $u = \omega \epsilon$  в качестве меры угловой.



Фиг. 2

Нормируем переменные  $x$  и  $y$  с помощью характерного размера  $\epsilon$ :  $x = x'\epsilon$ ,  $y = y'\epsilon$  и введем обозначение  $\sigma'(x', y') = \sigma(x'\epsilon, y'\epsilon)\epsilon^2/N$  для безразмерной функции распределения напряжений. Выражения (1.1) и (1.2) примут вид

$$M_C = -f\epsilon N \iint_S \sigma'(\mathbf{r}') \frac{r'^2 u - y'v}{|\mathbf{V}(\mathbf{r}')|} dx' dy', \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}') = (v - y'u, x'u) \quad (1.4)$$

$$F_x = -fN \iint_S \sigma'(\mathbf{r}') \frac{v - y'u}{|\mathbf{V}(\mathbf{r}')|} dx' dy', \quad F_y = -fN \iint_S \sigma'(\mathbf{r}') \frac{x'u}{|\mathbf{V}(\mathbf{r}')|} dx' dy'$$

Если считать для определенности, что  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ , то  $M_C \leq 0$  и  $F_x \leq 0$ . Интересуясь в дальнейшем только этими составляющими трения, введем обозначения для их модулей  $M = |M_C|$ ,  $F = |F_x|$ .

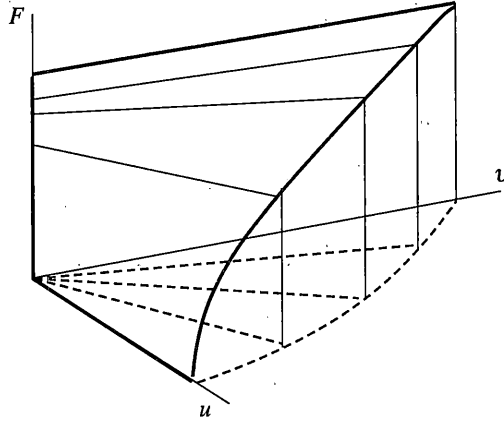
Если распределение  $\sigma'(\mathbf{r}')$  в области контакта обладает симметрией  $n$ -го порядка ( $n \geq 3$ ), то перпендикулярная скорости скольжения сила равна нулю  $F_y = 0$ . В общем случае это не так. Момент и сила зависят от переменных  $u$  и  $v$ , поэтому  $M = M(u, v)$ ,  $F = F(u, v)$ . Функции эти при любом виде нормальных напряжений  $\sigma(\mathbf{r})$  являются однородными функциями нулевого порядка, что означает  $F(\lambda u, \lambda v) \equiv F(u, v)$  при любом  $\lambda$ . График данной функции (фиг. 3) представляет собой линейчатую поверхность. При  $v = 0$  также и  $F = 0$ , а при  $u = 0$  выражение для силы имеет вид (1.1). Свойство однородности этих функций позволяет просто найти уравнения, определяющие зону застоя. Рассмотрим стремление скорости скольжения к нулю вдоль прямой  $v = ku$ . Используя свойство однородности нулевого порядка, получим  $M(u, ku) \equiv M(1, k)$ ,  $F(u, ku) \equiv F(1, k)$ . Уравнения

$$M = M(1, k), \quad F = F(1, k), \quad k \in (0, \infty) \quad (1.5)$$

представляют собой запись уравнений границы зоны застоя в параметрической форме ( $k$  – параметр) в первом квадранте плоскости  $(M, F)$ .

**2. Особенности сухого трения в точечном контакте.** В этом случае распределение нормальных напряжений подчиняется закону Герца [12]:

$$\sigma'(r') = (3/2\pi) \sqrt{1 - r'^2} \quad (2.1)$$



Фиг. 3

Подставим (2.1) в (1.4) и вычислим момент и силу при чистом вращении и чистом скольжении

$$M_0 = M(u, 0) = \frac{3\epsilon f N}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r'^2} r'^2 dr' = \frac{3\pi\epsilon f N}{16} \quad (2.2)$$

$$F_0 = F(0, v) = \frac{3fN}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r'^2} r' dr' = fN$$

Выражения для главного момента элементарных сил трения и для их главного вектора относительно центра пятна контакта получаем в виде

$$\frac{M}{M_0} = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r'^2} \frac{ur' - v\sin\varphi}{\sqrt{r'^2 + v^2 - 2uvr'\sin\varphi}} r'^2 dr' \quad (2.3)$$

$$\frac{F}{F_0} = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r'^2} \frac{v - ur'\sin\varphi}{\sqrt{r'^2 + v^2 - 2uvr'\sin\varphi}} r' dr'$$

При подставке сюда  $v = ku$  в соответствии с (1.5) получаем границу зоны застоя. Граница с оставшихся квадрантах является симметричной (2.3) относительно координатных осей. Кривая (2.3) близка к эллипсу

$$(M/M_0)^2 + (F/F_0)^2 = 1 \quad (2.4)$$

Выражения для силы и момента трения (2.3) могут быть проинтегрированы в элементарных функциях [13]:

$$M = \frac{M_0}{8}(8 - 8k^2 + 3k^4), \quad F = \frac{3}{32}\pi F_0 k(4 - k^2), \quad k \leq 1$$

$$M = \frac{M_0}{4\pi} \left[ (8 - 8k^2 + 3k^4) \arcsin \frac{1}{k} + 3(2 - k^2) \sqrt{k^2 - 1} \right], \quad k > 1 \quad (2.5)$$

$$F = \frac{3F_0}{64k} \left[ 4k^2(4 - k^2) \arcsin \frac{1}{k} + 4(2 + k^2) \sqrt{k^2 - 1} \right], \quad k > 1$$

$$M_0 = 3\pi N f \epsilon / 16, \quad F_0 = N f, \quad k = v/u$$

**3. Уравнения динамики однородного шара на шероховатой плоскости.** Уравнения движения однородного шара радиуса  $R$  и массы  $m$ , рассматриваемые в проекциях на неподвижные оси, имеют вид

$$J\dot{\omega} = M, \quad m\ddot{r} = F, \quad J = 2mR^2/5$$

Скорость точки шара, совпадающей с центром пятна контакта

$$v_x = \dot{x} - R\omega_y, \quad v_y = \dot{y} + R\omega_x \quad (3.1)$$

выразим с помощью полярных переменных

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0, \quad \cos \alpha = v_x/v, \quad \sin \alpha = v_y/v \quad (3.2)$$

В соответствии с (1.4) для компонент силы  $F$  получаем

$$F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha \quad (3.3)$$

Полная система уравнений динамики катящегося с сухим трением однородного шара имеет вид

$$J\dot{\omega}_x = RF_y, \quad J\dot{\omega}_y = -RF_x, \quad J\dot{\omega}_z = M_z, \quad m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y \quad (3.4)$$

Система (3.4) зависит только от скоростей (угловых и линейных) и не зависит от переменных, определяющих положение и ориентацию шара. В дальнейшем удобно от переменных  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{x}, \dot{y}$  перейти к переменным  $\omega_x, \omega_y, u, v, \alpha$ , используя формулы (3.2) и (3.3):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \alpha + R\omega_y, & \dot{y} &= v \sin \alpha - R\omega_x \\ J\dot{\omega}_x &= -FR \sin \alpha, & J\dot{\omega}_y &= FR \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$J\dot{u} = -\epsilon M, \quad 2m\dot{v}/7 = -F, \quad \dot{\alpha} = 0$$

где  $M$  и  $F$  определяются формулами (2.5).

Отсюда немедленно следует, что направление относительной скорости проскальзывания при движении шара не изменяется  $\alpha \equiv \text{const}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha \equiv 0$ , что дает  $\omega_x = \text{const}$  и  $J\dot{\omega}_y + 2mRv/7 = \text{const}$ .

Таким образом, решение системы семи уравнений (3.5) свелось к решению двух уравнений относительно  $u$  и  $v$ . Если уравнения относительно этих переменных решаются, то все остальные переменные находятся в квадратурах.

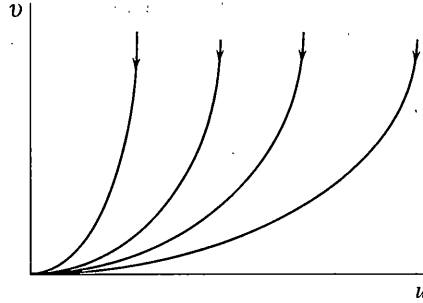
Предпоследние два уравнения системы (3.5), учитывая (2.5) для случая  $k \leq 1$ , перепишем в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{uv(4u^2 - v^2)}{\mu(8u^4 - 8u^2v^2 + 3v^4)} \quad \left( \mu = \frac{5\epsilon^2}{28R^2} \right) \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) в плоскости  $(u, v)$  имеет единственную особую точку  $u = 0, v = 0$ . Поскольку в силу (3.5)  $u$  и  $v$  являются убывающими функциями времени, то это означает, что скольжение и верчение прекращаются одновременно. Уравнение (3.6) является однородным, поэтому заменой переменных вида  $v/u = w, \ln u = s$  оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными, что позволяет получить его первый интеграл в явной форме. Фазовые траектории  $v(u)$  приведены на фиг. 4.

Время, через которое скольжение прекращается, можно найти так. Фазовые траектории, соответствующие уравнению (3.6), будем искать в параметрической форме

$$\frac{du}{d\tau} = -\mu(8u^4 - 8u^2v^2 + 3v^4), \quad \frac{dv}{d\tau} = -uv(4u^2 - v^2) \quad (3.7)$$



Фиг. 4

Нетрудно видеть, что асимптотическое поведение искомых переменных в окрестности особой точки таково:  $u \sim \tau^{-1/3}$ ,  $v \sim \tau^{-1}$ . Из (3.5) и (3.7) находим связь параметра  $\tau$  с временем

$$t = (64m/21\pi F_0) \int_0^\tau u^4(\tau) d\tau$$

В силу указанной асимптотики при  $\tau \rightarrow \infty$  этот интеграл сходится, т.е. скольжение и верчение заканчиваются одновременно за конечное время  $T \sim 8\pi m_0 / (21\pi F_0 \mu)$ .

Траектория центра масс с начальными условиями  $x(0) = y(0) = 0$  получается в силу (3.5) такой:

$$x = \frac{2}{7} \left( \int_0^t v(t) dt - v(0) \right), \quad y = -R\omega_x t$$

В [1–6] приведены такие же уравнения движения шара по шероховатой плоскости, как и (3.5), однако в них, в силу упрощенного предположения о характере закона сухого трения,  $M = 0$  и  $F = F_0 = \text{const}$ . Из этого следует, что верчение  $u$  – постоянно, а скольжение имеет вид  $v = v_0 - (7F_0/2m)t$ , ( $0 \leq t \leq T = 2v_0m/7F_0$ ).

Как видим, решение задачи о качении шара по шероховатой плоскости в упрощенной постановке о сухом трении имеет серьезные количественные и качественные отличия от решения такой же задачи в точной постановке. В частности, конечное время скольжения в упрощенной постановке на самом деле стремится к бесконечности при стремлении области контакта к точке. Серьезные отличия имеются и для траектории центра масс. Ранее эти же выводы уже были получены в [13], где для сухого трения в рассматриваемой задаче использовалась аппроксимация Паде.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. Корнелис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
3. Пэнлве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
4. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
5. Resal H. Sur un point de la théorie mathématique des effets du jeu de billard // C.r. Acad. Sci. 1882. Т. 94. Р. 1548–1551.
6. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.

7. *Contensou P.* Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie // *Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina, 1962. Berlin etc., Springer, 1963. P. 201–216.* = *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением вращения и ее учет в теории волчка // *Проблемы гироскопии. М.: “Мир”, 1967. С. 60–77.*
8. *Жуковский Н.Е.* Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // *Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 1. С. 339–354.*
9. *Андронов В.В.* Механические системы с преобразованным сухим трением // *Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 40–49.*
10. *Черноузько Ф.Л.* Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // *Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.*
11. *Розенблат Г.М.* Динамические системы с трением. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 155 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
13. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.*

Москва

Поступила в редакцию  
3.03.2006