

УДК 539.3

© 2006 г. А.В. МАНЖИРОВ, Д.А. ПАРШИН

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАРАЩИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОПРАВКЕ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

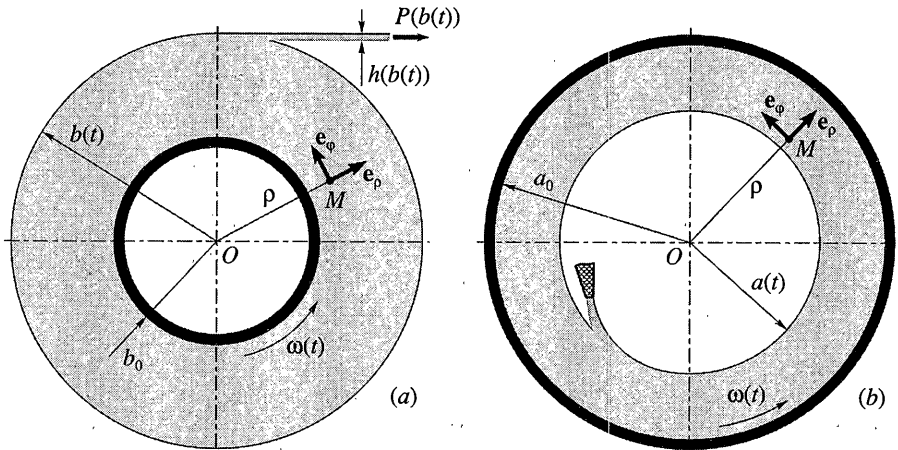
На основе подходов механики наращиваемых тел изучаются процессы изготовления упругих и вязкоупругих цилиндрических тел и покрытий посредством нанесения материала с произвольным натягом на вращающуюся оправку. Моделирование проводится с учетом влияния центробежных сил. Дана постановка соответствующей неклассической краевой задачи наращивания. Построено ее аналитическое решение. Предположен эффективный метод определения остаточных напряжений в изготовленном теле. Приведены результаты расчетов для двух модельных задач. Показана принципиальная необходимость совместного рассмотрения факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на тело центробежных сил.

**1. Введение.** Одним из способов изготовления или усиления определенного рода элементов конструкций и деталей машин, а также одним из вариантов технологии нанесения на них покрытий может быть организация направленного потока или послойная намотка материала на приведенную во вращение вокруг своей оси поверхность вращения. Если скорость вращения и момент инерции формируемого подобным образом слоя достаточно велики, то под действием центробежных сил он будет испытывать заметную деформацию. Помимо этого деформация слоя может быть вызвана созданием в материале перед его присоединением некоторых предварительных напряжений.

Поскольку отдельные слои (монослои) материала присоединяются к телу последовательно и включаются в процесс совместного деформирования одновременно и, вообще говоря, в произвольном начальном напряженном состоянии, то после прекращения процесса наращивания и остановки вращения во всем сформированном в результате теле необходимым образом должны оставаться некоторые напряжения. Можно ожидать, что при определенных условиях они окажутся значительными, а потому должны быть учтены при оценке качества готового изделия и при анализе его поведения в последующей эксплуатации. Понятно, что если используемый материал обладает вязкостью, то финальное состояние тела будет существенно зависеть от скорости и режима его формирования.

Следует заметить, что создание и расчет необходимых полей технологических остаточных напряжений в изделии может быть частью его оптимального проектирования. Одним из примеров здесь может служить усиление сосудов высокого давления намоткой на их наружную поверхность нескольких монослоев предварительно растянутого высокопрочного материала. Дополнительной целью при этом является создание в стенке незаполненного сосуда сжимающих окружных напряжений. Очевидно, что распределение напряжений в стенке, как и в самом намотанном слое усиливающего материала, должно определяющим образом зависеть от характера намотки.

**2. Постановка задачи.** Будем далее полагать, что толщина присоединяемых в процессе наращивания монослоев настолько мала, что скорость притока материала в окружном направлении несравнимо выше скорости его притока в направлении радиальном.



Фиг. 1

Кроме того, пусть утолщение слоя происходит равномерно по его окружности, так что на протяжении всего процесса наращивания он сохраняет осесимметричную форму. Предполагая также, что жесткость наносимого материала существенно ниже жесткости тела, на которое он наносится, будем считать последнее абсолютно жестким.

Тогда в качестве возможной модели для описания упомянутых выше технологических процессов можно рассмотреть задачу о кусочно-непрерывном нанесении на жесткую оправку, вращающуюся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью  $\omega(t)$ , осесимметричных элементарных слоев материала с некоторым заданным начальным напряженным состоянием.

Исследуем случай цилиндрического слоя, наращиваемого в условиях плоской деформации (соответствующие технологические процессы схематически изображены на фиг. 1). Задачу рассмотрим в квазистатической постановке, отказавшись от учета динамических эффектов, то есть пренебрегая силами инерции деформирования материала по сравнению с центробежными силами его вращения вместе с оправкой (это предполагает, в частности, достаточно плавное изменение во времени скорости вращения).

Анализ проведем для случая малых деформаций. При этом допущении закон изменения одного из радиусов наращиваемого слоя можно считать заданной непрерывной функцией времени  $x(t)$ , строго монотонной на  $N$  интервалах  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) непрерывного нанесения материала и постоянной вне этих интервалов. Другой радиус слоя обозначим через  $x_0$  и положим  $x_k = x(t_{2k})$  – значения изменяющегося радиуса слоя после окончания  $k$ -го этапа непрерывного роста.

Особо отметим то обстоятельство, что приводимые ниже формулы и рассуждения являются универсальными и справедливыми независимо от того, изменение какого из радиусов растущего цилиндра задает функция  $x(t)$  – внешнего или внутреннего.

Используемый материал будем считать вязкоупругим стареющим, однородным и изотропным. Отсчет времени будем вести от момента изготовления материала, уравнения состояния которого запишем в виде [1, 2]:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t)(\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})})[2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau_0(\mathbf{r})$  – момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  – тензоры напряжений и малой деформации;  $\mathbf{1}$  – единичный тензор 2-го ранга;

$G(t)$  – модуль сдвига;  $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Оператор вязкоупругости определяется соотношениями

$$\mathcal{F} + \mathcal{N}_s = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_s)^{-1}$$

$$\mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$K(t, \tau) = G(\tau) \Delta_s^1(t, \tau), \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau)$$

где  $\mathcal{L}_s$ ,  $\mathcal{N}_s$  и  $\mathcal{F}$  – интегральные операторы Вольтерра с параметром  $s$  и тождественный оператор,  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  – ядра ползучести и релаксации,  $\Delta(t, \tau)$  и  $\omega(t, \tau)$  ( $t \geq \tau \geq 0$ ) – функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге, для последней по определению выполняется тождество

$$\omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geq 0 \quad (2.3)$$

С учетом тождества (2.3) функция удельной деформации может быть также представлена в виде

$$\Delta(t, \tau) = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_\tau) G(t)^{-1} \quad (2.4)$$

Пусть  $\mathcal{H}_s$  – оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{H}_s f(t) = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_s) f(t) / G(t)$$

Введем обозначение

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

где  $g(\mathbf{r}, t)$  – произвольная функция точки тела и времени. С использованием (2.5) определяющее соотношение (2.1) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

Предположим, что нагружение материала осуществляется непосредственно перед его присоединением к формируемому слою. Это значит, что напряжения в точках слоя, удаленных от оси его вращения на расстояние  $\rho$ , возникают в момент времени

$$\tau_0(\mathbf{r}) \equiv \tau_*(\rho), \quad \rho \in (x_0, x_N) \quad (2.7)$$

где  $\tau_*(\rho)$  – момент присоединения материального слоя радиуса  $\rho$ . Здесь и далее при указании промежутков изменения полярного радиуса  $\rho$  будем считать, что если первая граница промежутка располагается на числовой оси правее второй, то границы следует переставить в записи местами.

Ясно, что на каждом интервале  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) имеет место тождество

$$\tau_*(x(t)) \equiv t \quad (2.8)$$

а уравнение  $\tau_*(\rho) = t$  описывает мгновенную поверхность роста – часть граничной поверхности растущего слоя, к которой в данный момент времени поступает дополнительный материал.

Заканчивая постановку задачи, отметим, что при моделировании, например, процессов изготовления намоточных композитов необходимо учитывать анизотропию мате-

риала. Краевую задачу для анизотропного тела можно получить аналогично проделанному ниже в изотропном случае. Решение такой задачи и ее анализ выходят за рамки настоящей работы и могут стать предметом отдельных исследований.

Отметим также, что другие подходы к моделированию процессов намотки цилиндрических тел рассмотрены, например, в [3–8].

**3. Краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого слоя.** Основными характеристическими особенностями деформирования наращиваемых тел являются отсутствие недеформированной конфигурации для любого такого тела в целом и независимое деформирование дополнительного материала перед его присоединением. Следствие этого есть неопределенность поля перемещений в растущем теле и несовместность компонент деформации его элементов, а также необходимость задания эволюции напряженно-деформированного состояния всех новых элементов вплоть до момента их присоединения к телу. Все это принципиальным образом отличает механическое поведение наращиваемых тел от деформирования тел постоянного состава и тел с переменной вследствие снятия материала границей.

В то же время, частицы нового материала после присоединения к поверхности роста сцепляются с ней и движутся далее уже в составе сплошного, пусть и растущего тела. Это значит, что в каждый момент времени во всем сформированном к этому моменту теле однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей движения его частиц, и задача кусочно-непрерывного наращивания может быть корректно поставлена в скоростной форме.

Запишем аналог принятого выше определяющего соотношения (2.6) для скоростей соответствующих величин:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) / 2$$

где  $\mathbf{S}$  – так называемый тензор скоростей операторных напряжений,  $\mathbf{D}$  – тензор скорости деформации,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – векторное поле скоростей частиц тела.

Свяжем с вращающейся жесткой оправкой круговую цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  с правым ортонормированным репером  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}\}$ , направив вектор  $\mathbf{k}$  вдоль оси вращения и отсчитывая от этой оси полярный радиус  $\rho$  (фиг. 1). В этой подвижной неинерциальной системе для рассматриваемого наращиваемого слоя справедливо стандартное уравнение равновесия, в котором в качестве объемных сил выступают центробежные силы инерции:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho(\varphi)\rho c(t), \quad c(t) = \omega^2(t)d \quad (3.1)$$

где  $d$  – плотность массы используемого материала.

Уравнение для тензора  $\mathbf{S}$  можно получить, подействовав на уравнение равновесия (3.1) линейным оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и продифференцировав результат по времени  $t$ . Здесь важным является то обстоятельство, что в общем случае интегральный оператор  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и оператор дивергенции не являются перестановочными, поскольку нижний предел интеграла в (2.5) зависит от точки тела. Однако можно показать [9], что для рассматриваемых процессов (см. п. 2) достаточным условием коммутации указанных операторов по отношению к тензору напряжений является незагруженность будущей поверхности роста до начала наращивания и в паузах между его этапами, а также отсутствие напряжения на фактической поверхности роста во время самих этапов. В этом случае при  $t > t_1$  в области, занятой в данный момент времени наращиваемым телом, выполняется тождество

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ = \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ$$

и, следовательно, справедливы аналоги уравнения равновесия в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ + \mathbf{f}^\circ = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{S} + \partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

В рассматриваемой конкретной задаче

$$\mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \rho c^\circ(\rho, t), \quad \partial \mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t) / \partial t = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \chi(\rho, t), \quad \chi(\rho, t) = \rho [c^\circ(\rho, t)]'_t$$

На основании определения (2.5) и равенства (2.7), применяя интегрирование по частям и используя тождество (2.3), находим

$$c^\circ(\rho, t) = \frac{c(t)}{G(t)} - \int_{\tau_*(\rho)}^t c(\tau) \Delta'_t(t, \tau) d\tau = c(\tau_*(\rho)) \Delta(t, \tau_*(\rho)) + \int_{\tau_*(\rho)}^t c'(\tau) \Delta(t, \tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$\chi(\rho, t) = \rho \left[ c(\tau_*(\rho)) \omega'_t(t, \tau_*(\rho)) + \frac{c'(t)}{G(t)} + \int_{\tau_*(\rho)}^t c'(\tau) \omega'_t(t, \tau) d\tau \right] \quad (3.4)$$

В случае вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega(t) \equiv \omega_0$  имеем

$$c^\circ(\rho, t) = c_0 \Delta(t, \tau_*(\rho)), \quad \chi(\rho, t) = c_0 \rho \omega'_t(t, \tau_*(\rho)), \quad c_0 = \omega_0^2 d$$

Начальное напряженное состояние присоединяемого материала должно определяться некоторым априори известным полным тензором напряжений, задаваемых в точках поверхности роста на каждом временном интервале непрерывного наращивания:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho = x(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

Считая, что дополнительные элементарные слои материала перед присоединением подвергаются только натяжению в окружном направлении, постоянному в пределах одного оборота, будем иметь

$$\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \sigma_\varphi^*(\rho) \quad (3.6)$$

причем  $\sigma_\varphi^*(\rho)$  – известная функция, которая может быть выбрана, например, равной отношению  $P(\rho)/h(\rho)$ , где  $P(\rho)$  – сила натяжения реальных приращиваемых монослоев на единицу их длины в осевом направлении в зависимости от радиуса, а  $h(\rho)$  – их конечная (достаточно малая) переменная толщина (фиг. 1, а). Для заданной таким образом тензорной функции  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$  выполняется, очевидно, условие  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_* = \mathbf{0}$ , означающее отсутствие нагрузки на текущей поверхности роста и требуемое для выполнения уравнений (3.2).

Условие (3.5) может быть преобразовано к простому условию на компоненты тензора  $\mathbf{S}$  [9]. Для этого достаточно заметить, что для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  справедливо

$$g^\circ(\mathbf{r}, \tau_0(\mathbf{r})) = g(\mathbf{r}, \tau_0(\mathbf{r})) / G(\tau_0(\mathbf{r})) \quad (3.7)$$

записать после этого совокупность условий (3.5) для всех моментов конкретного этапа непрерывного роста в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k)$$

или, с учетом (3.7) и (2.7):

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) / G(\tau_*(\rho)), \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k) \quad (3.8)$$

и свернуть последнее равенство с оператором Гамильтона, привлекая первое уравнение (3.2), а затем снова (3.7) и (2.7):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) \equiv \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) + [\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)]|_{t=\tau_*(\rho)} \equiv \tau_*'(\rho) \mathbf{e}_\rho(\varphi) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) - \\ - \mathbf{f}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho))/G(\tau_*(\rho)) = \nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})/G(\tau_*(\rho)), \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k) \end{aligned}$$

Выделяя теперь из записанной совокупности условий одно, соответствующее рассматриваемому моменту времени, то есть полагая  $\rho = x(t)$ , и пользуясь тождеством (2.8), приходим к условию на поверхности роста в виде:

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = [\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)]x'(t)/G(t), \quad \rho = x(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}) \quad (3.9)$$

Для выбранного тензора начальных напряжений (3.6) имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_* = -\mathbf{e}_\rho(\varphi) \sigma_\varphi^*(\rho)/\rho$$

В этом случае на мгновенной поверхности роста должно выполняться условие  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t)$ , где

$$q(t) = [c(t)x(t) - \sigma_\varphi^*(x(t))/x(t)]x'(t)/G(t) \quad (3.10)$$

Поскольку вне интервалов наращивания не контактирующая с оправкой поверхность слоя не подвергается нагружению, то после каждой остановки роста на ней выставляется обычное условие отсутствия напряжения, имеющее очевидный аналог для тензора  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \rho = x_k, \quad t \in (t_{2k}, t_{2k+1})$$

и являющееся одним из условий выполнения уравнений (3.2). Здесь формально считается  $t_{2N+1} = +\infty$ .

Как видим, в силу определения функции  $x(t)$  (см. п. 2) условие на не сцепленной с оправкой поверхности слоя в форме (3.9) формально остается справедливым и вне интервалов роста и может использоваться для любого  $t > t_1$ . Однако необходимо иметь в виду, что природа этого условия на интервалах непрерывного наращивания и на этапах после временного или окончательного его прекращения принципиально различна.

Что касается условия на неподвижной в выбранных осях поверхности наращиваемого слоя – поверхности его сопряжения с жесткой оправкой, то здесь на протяжении всего процесса деформирования остается справедливым классическое условие отсутствия перемещения, очевидным образом модифицированное для скоростной постановки задачи:  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = x_0$ .

Итак, процесс деформирования слоя после начала его наращивания описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{e}_\rho \chi(\rho, t) = \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1 \\ \mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2 \\ \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

В ней время  $t$  не является, очевидно, существенной переменной, а лишь выполняет роль вещественного параметра. Причем для каждого значения этого параметра формально имеем классическую задачу линейной теории упругости для цилиндрического слоя фиксированной толщины. Слой находится под действием объемных сил, величина которых

зависит от радиальной координаты, жестко закреплен по одной из своих боковых поверхностей и нагружен по другой некоторыми распределенными силами. В этой задаче на месте вектора перемещения, тензора деформации и отнесенного к модулю сдвига тензора напряжений выступают соответственно вектор скорости  $\mathbf{v}$ , тензор скорости деформации  $\mathbf{D}$  и тензор скоростей операторных напряжений  $\mathbf{S}$ .

После решения задачи (3.11) необходимо в каждой точке  $\mathbf{r}$  наращиваемого слоя восстановить эволюцию тензора  $\mathbf{T}^\circ$  по найденной скорости его изменения  $\mathbf{S}$ , используя в качестве начального условия соотношение (3.8):

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\rho))} + \int_{\tau_*(\rho)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tau_*(\rho) \quad (3.12)$$

Тогда сможем найти полную эволюцию тензора напряжений по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) &= G(t)(\mathcal{F} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})})\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \\ &= G(t) \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_*(\rho)}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau \right], \quad t \geq \tau_*(\rho) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Записанное равенство (3.13) есть по существу резольвентное представление решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$$

относительно неизвестной функции  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)/G(t)$ . Если аналитическое выражение для резольвенты  $R(t, \tau)$  неизвестно или является слишком громоздким, данное уравнение может быть решено численно, например, методом квадратур на базе формулы трапеций [10].

**4. Решение краевой задачи.** В рассматриваемом случае плоской деформации из характера присущей поставленной задаче (3.11) симметрии вытекает, что поле скоростей в занимаемой растущим слоем области должно иметь следующий вид:  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\rho v(\rho, t)$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho D_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi D_\varphi$$

$$D_\rho(\rho, t) = v'_\rho(\rho, t), \quad D_\varphi(\rho, t) = v(\rho, t)/\rho$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho S_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi S_\varphi + \mathbf{k}\mathbf{k} S_z, \quad S_z = v(S_\rho + S_\varphi)$$

$$S_{\rho, \varphi}(\rho, t) = (\kappa + 1)D_{\rho, \varphi}(\rho, t) + (\kappa - 1)D_{\varphi, \rho}(\rho, t)$$

В результате компонентная запись задачи (3.11) будет иметь вид:

$$(S_\rho)'_\rho + (S_\rho - S_\varphi)/\rho + \chi(\rho, t) = 0, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1$$

$$S_{\rho, \varphi} = (\kappa + 1)D_{\rho, \varphi} + (\kappa - 1)D_{\varphi, \rho}, \quad D_\rho = v'_\rho, \quad D_\varphi = v/\rho \quad (4.1)$$

$$v = 0, \quad \rho = x_0; \quad S_\rho = q(t), \quad \rho = x(t)$$

Внося выражения компонент  $S_{\rho, \varphi}$  через  $v$  в дифференциальное уравнение из (4.1), приходим к следующему аналогу уравнения Ляме:

$$[(\rho v)'_{\rho}]'_{\rho} = -\chi(\rho, t)/(\kappa + 1).$$

Его общее решение имеет вид

$$v(\rho, t) = \frac{\rho}{2} [C_1(t)/\kappa + C_2(t)/\rho^2 - \Phi(\rho, t)]$$

$$\Phi(\rho, t) = \frac{1}{\kappa + 1} \int_{\rho}^{x(t)} \chi(\xi, t) \left( \frac{\xi^2}{\rho^2} - 1 \right) d\xi$$

где  $C_{1,2}(t)$  – произвольные функции времени. Соответствующие выражения для компонент  $S_{\rho, \varphi}$  запишем в виде

$$S_{\rho, \varphi}(\rho, t) = C_1(t) \mp C_2(t)/\rho^2 + \Xi^{\pm}(\rho, t)$$

$$\Xi^{\pm}(\rho, t) = -\kappa \Phi(\rho, t) - \frac{(\kappa \pm 1)\rho \Phi'_{\rho}(\rho, t)}{2} = \frac{1}{\kappa + 1} \int_{\rho}^{x(t)} \chi(\xi, t) \left( \kappa \pm \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) d\xi$$

Удовлетворяя крайвым условиям из (4.1), находим

$$C_1(t) = F(t) + \kappa Q(t), \quad C_2(t) = x^2(t)F(t) - x_0^2 Q(t)$$

$$F(t) = \kappa \Phi(x_0, t) x_0^2 / [x_0^2 + \kappa x^2(t)], \quad Q(t) = q(t) x^2(t) / [x_0^2 + \kappa x^2(t)]$$

Таким образом, решение задачи (4.1) имеет вид

$$v(\rho, t) = \frac{\rho}{2} \{ [1/\kappa + x^2(t)/\rho^2] F(t) + (1 - x_0^2/\rho^2) Q(t) - \Phi(\rho, t) \} \quad (4.2)$$

$$S_{\rho, \varphi}(\rho, t) = [1 \mp x^2(t)/\rho^2] F(t) + (\kappa \pm x_0^2/\rho^2) Q(t) + \Xi^{\pm}(\rho, t)$$

**5. Упругий случай.** Все проделанные выкладки остаются, очевидно, в силе и для случая чисто упругого поведения материала. В этом случае нужно всюду принять  $\omega(t, \tau) \equiv 0$ ,  $G(t) \equiv \text{const}$ . При этом для произвольной функции точки и времени в соответствии с (2.2) и (2.5) будем иметь

$$g^{\circ}(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G \quad (5.1)$$

По формуле (3.4) находим  $\chi(\rho, t) = \rho c'(t)/G$ . В итоге можем вычислить

$$\Phi(\rho, t) = \frac{\rho^2 c'(t)}{4G(\kappa + 1)} \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} - 1 \right]^2, \quad F(t) = \frac{\kappa c'(t) [x^2(t) - x_0^2]^2}{4G(\kappa + 1) [x_0^2 + \kappa x^2(t)]}$$

$$\Xi^{\pm}(\rho, t) = \frac{\rho^2 c'(t)}{4G(\kappa + 1)} \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} - 1 \right] \left\{ 2\kappa \pm \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} + 1 \right] \right\}$$

Эти функции нужно подставить в выражения для скоростей перемещения и операторных напряжений (4.2). Ясно, что после этого проинтегрировать данные выражения



можно будет только для конкретных программ наращивания слоя  $x(t)$ , натяжения  $\sigma_\phi^*$  ( $\rho$ ) монослоев и вращения  $\omega(t)$  оправки.

В частном случае, когда скорость вращения постоянна и равна  $\omega_0$ , имеем

$$c(t) \equiv c_0 = \omega_0^2 d, \quad \Phi(\rho, t) \equiv 0, \quad \Xi^\pm(\rho, t) \equiv 0, \quad F(t) \equiv 0$$

$$Q(t) = \frac{[c_0 x^3(t) - x(t)\sigma_\phi^*(x(t))]x'(t)}{G[x_0^2 + \kappa x^2(t)]} \quad (5.2)$$

Первообразная определяемой выражением (5.2) функции  $Q(t)$ , умноженная на модуль сдвига, есть

$$G \int Q(t) dt = W(x(t))$$

$$W(\xi) = \int \frac{c_0 \xi^3 - \xi \sigma_\phi^*(\xi)}{x_0^2 + \kappa \xi^2} d\xi = \frac{c_0}{2\kappa} \left[ \xi^2 - \frac{x_0^2}{\kappa} \ln \left( \xi^2 + \frac{x_0^2}{\kappa} \right) \right] - \int \frac{\xi \sigma_\phi^*(\xi) d\xi}{x_0^2 + \kappa \xi^2} \quad (5.3)$$

Если натяг монослоев не зависит от их радиуса и равен  $\sigma_\phi^*(\rho) \equiv \sigma$ , то

$$W(\xi) = \frac{1}{2\kappa} \left[ c_0 \xi^2 - \left( \frac{c_0 x_0^2}{\kappa} + \sigma \right) \ln \left( \xi^2 + \frac{x_0^2}{\kappa} \right) \right]$$

Итак, для случая вращения растущего упругого слоя с постоянной угловой скоростью из (4.2) с учетом (3.12), (3.6), (5.1) и обратного к (2.8) тождества  $x(\tau_*(\rho)) \equiv \rho$ ,  $\rho \in (x_{k-1}, x_k)$  ( $k = 1, \dots, M$ ), находим

$$v(\rho, t) = \frac{\rho}{2} (1 - x_0^2/\rho^2) Q(t)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \sigma_\phi + \mathbf{k} \mathbf{k} \sigma_z, \quad \sigma_z = v(\sigma_\rho + \sigma_\phi)$$

$$\sigma_\rho(\rho, t) = (\kappa + x_0^2/\rho^2) W(\xi)|_{\xi=\rho}^{x(t)}, \quad \sigma_\phi(\rho, t) = \sigma_\phi^*(\rho) + (\kappa - x_0^2/\rho^2) W(\xi)|_{\xi=\rho}^{x(t)}$$

где функции  $Q(t)$  и  $W(\xi)$  определены выражениями (5.2) и (5.3).

Видно, что напряженное состояние упругого слоя, наращиваемого на вращающейся с постоянной угловой скоростью оправке, как и следовало ожидать, не зависит явно от времени  $t$ , а зависит только от текущего значения радиуса  $x(t)$  поверхности роста слоя и распределения в последнем начальных напряжений  $\sigma_\phi^*(\rho)$ .

**6. Остаточные напряжения в изготовленном слое.** В пп. 3, 4 построено решение задачи о деформировании слоя, формируемого на вращающейся оправке при некоторых заданных программах наращивания  $x(t)$ , натяжения  $\sigma_\phi^*(\rho)$  и вращения  $\omega(t)$ , на интервале времени  $t \in (t_1, +\infty)$ . Пусть это решение дается известными функциями

$$v(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \quad t > \tau_*(\rho) \quad (6.1)$$

1. Предположим теперь, что начиная с некоторого момента времени  $t = t^s > t_{2N}$ , когда формирование слоя уже полностью завершено, задается программа вращения  $\tilde{\omega}(t)$ , отличная от той, для которой построено решение (6.1). Положим тогда  $\tilde{\omega}(t) \equiv \omega(t)$

при  $t_1 < t < t^s$  и будем считать, что процесс деформирования наращиваемого слоя при заданной таким образом новой полной программе вращения и прежних программах наращивания и натяжения описывается функциями

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{T}}^{\circ}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t), \quad t > \tau_*(\rho) \quad (6.2)$$

Первые три из них представляют собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{e}_{\rho} \tilde{\chi}(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1 \\ \tilde{\mathbf{S}} &= 2\tilde{\mathbf{D}} + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}})/2 \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_{\rho} \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_{\rho} q(t), \quad \rho = x(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

полученной из задачи (3.11) добавлением тильды над нужными величинами. Функция  $\tilde{\chi}(\rho, t)$  здесь определяется как

$$\tilde{\chi}(\rho, t) = \rho [\tilde{c}^{\circ}(\rho, t)]_r^l, \quad \tilde{c}(t) = \tilde{\omega}^2(t)d$$

Функция  $q(t)$  в граничном условии на поверхности роста остается прежней и задается формулой (3.10), поскольку до момента  $t^s$  имеет место тождество

$$\tilde{c}(t) \equiv c(t), \quad t_1 < t < t^s \quad (6.4)$$

а при  $t \geq t^s$  независимо от программы вращения  $x'(t) \equiv 0$ .

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} c_-(t) &= \tilde{c}(t) - c(t), \quad \chi_-(\rho, t) = \tilde{\chi}(\rho, t) - \chi(\rho, t) \\ \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{S}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{T}_-(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольный момент времени  $\tilde{t} \in (t_{2N}, t^s)$ . Поскольку для всех точек окончательно изготовленного слоя выполняется неравенство  $\tau_*(\rho) \leq t_{2N} < \tilde{t}$ , из тождества (6.4) и определения (2.5) вытекает, что

$$c_-(\rho, t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t} \quad (6.5)$$

$$c_-(\rho, t) \equiv c_-(t) = \frac{c_-(t)}{G(t)} - \int_{\tilde{t}}^t \frac{c_-(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = (\mathcal{J} - \mathcal{L}_{\tilde{t}})c_-(t)/G(t), \quad t \geq \tilde{t} \quad (6.6)$$

Следовательно,  $\chi_-(\rho, t) \equiv \chi_-(t)$ , причем

$$\chi_-(t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t} \quad (6.7)$$

Таким образом, вычитая из соотношений (6.3) соответствующие соотношения (3.11), получаем следующую краевую задачу для  $\mathbf{v}_-$ ,  $\mathbf{D}_-$  и  $\mathbf{S}_-$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_- + \mathbf{e}_{\rho} \chi_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1 \\ \mathbf{S}_- &= 2\mathbf{D}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{D}_-, \quad \mathbf{D}_- = (\nabla \mathbf{v}_-^T + \nabla \mathbf{v}_-)/2 \\ \mathbf{v}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_{\rho} \cdot \mathbf{S}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x(t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ввиду (6.7) краевая задача (6.8) при  $t \leq \tilde{t}$  имеет тривиальное решение

$$\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \tau_*(\rho) < t \leq \tilde{t}. \quad (6.9)$$

Вычитая соотношение (3.12) из аналогичного ему соотношения для тензора  $\tilde{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t)$  и пользуясь последним тождеством из (6.9), находим

$$\mathbf{T}_-^\circ(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \tau_*(\rho) < t \leq \tilde{t}, \\ \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, & t \geq \tilde{t} \end{cases} \quad (6.10)$$

Вследствие (6.10) на основании формулы (3.13) и ее аналога для тензора  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)$  можем для всех  $t \geq \tilde{t}$  записать

$$\frac{\mathbf{T}_-(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = \mathbf{T}_-^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{T}_-^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau = (\mathcal{F} + \mathcal{N}_{\tilde{t}}) \mathbf{T}_-^\circ(\mathbf{r}, t) \quad (6.11)$$

Определим на занимаемой окончательно сформированным слоем области следующие функции:

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{r}, t) = \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tilde{t}$$

Тогда, интегрируя по параметру все соотношения задачи (6.8) от  $\tilde{t}$  до  $t \geq \tilde{t}$  с учетом (6.10) и (6.5), получим для названной области следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_-^\circ + \mathbf{e}_\rho c_-^\circ(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad t \geq \tilde{t} \\ \mathbf{T}_-^\circ &= 2\mathbf{E}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_-, \quad \mathbf{E}_- = (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2 \\ \mathbf{u}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_-^\circ = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N \end{aligned} \quad (6.12)$$

Действуя на все соотношения этой задачи, содержащие тензор  $\mathbf{T}_-^\circ$ , линейным оператором  $\mathcal{F} + \mathcal{N}_{\tilde{t}}$ , будем с учетом (6.11) и (6.6) иметь

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- + \mathbf{e}_\rho c_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad t \geq \tilde{t} \\ \mathbf{T}_- &= G(t)(\mathcal{F} + \mathcal{N}_{\tilde{t}})[2\mathbf{E}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_-] \\ \mathbf{E}_- &= (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2 \\ \mathbf{u}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N \end{aligned} \quad (6.13)$$

Задача (6.13) представляет собой, как видим, классическую задачу линейной теории вязкоупругости для слоя окончательной толщины, закрепленного по одной из своих боковых поверхностей и подверженного действию переменных во времени объемных сил. В этой задаче на месте вектора перемещения, тензора деформации и тензора напряже-

ний фигурируют соответственно величины  $\mathbf{u}_-$ ,  $\mathbf{E}_-$  и  $\mathbf{T}_-$ . Согласно известному принципу соответствия [2] тензор  $\mathbf{T}_-$ , представляющий решение задачи (6.13), в каждый момент времени  $t \geq \tilde{t}$  может быть найден из решения соответствующей упруго-мгновенной задачи. Таким образом, вспоминая смысл тензора  $\mathbf{T}_-$  и определение функции  $c_-(t)$ , можем сделать следующий вывод.

*Теорема 1.* Пусть  $\tilde{\omega}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть новый закон изменения угловой скорости после завершения формирования слоя приводит к остановке вращения оправки. Тогда, если  $\omega(t) \rightarrow \omega_\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , финальные остаточные напряжения в изготовленном слое независимо от программы остановки и момента времени  $t^s$  определяются тензором остаточных напряжений

$$\mathbf{T}_r(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_-(\mathbf{r}) \quad (6.14)$$

где первое слагаемое в правой части есть финальный тензор напряжений, соответствующий решению (6.1) исходной задачи наращивания, а компоненты тензора дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$ , взятые с обратным знаком, есть напряжения во вращающемся с угловой скоростью  $\omega_\infty$  однородном упругом полем цилиндра фиксированных размеров, одна из боковых поверхностей которого сцеплена с жесткой втулкой, а другая свободна. Тензор  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  находится из решения классической упругой задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_- - \mathbf{e}_\rho c_\infty = \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N)$$

$$\mathbf{T}_- = G_\infty [2\mathbf{E}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2$$

$$\mathbf{u}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N$$

в которой  $c_\infty = \omega_\infty^2 d$ , а  $G_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$  – модуль сдвига материала в весьма большом возрасте.

2. Теперь предположим, что в момент времени  $t = t^s$  помимо программы вращения изменяется также и граничное условие на поверхности слоя, сцепленной в процессе наращивания с жесткой оправкой.

Поскольку решение (6.1) исходно поставленной задачи наращивания известно для любого сколь угодно отдаленного момента времени  $t$ , то известна и соответствующая этому решению зависимость от времени контактного давления на поверхности оправки  $\rho = x_0$ , т.е. функция

$$p(t) = -\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{\rho = x_0} \cdot \mathbf{e}_\rho$$

Очевидно, что первые три функции из (6.1) удовлетворяют эквивалентной (3.11) краевой задаче

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{e}_\rho \chi(\rho, t) = \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1$$

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2 \quad (6.15)$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{e}_\rho \lambda(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t)$$

где функция  $\lambda(t)$  определяется по известной функции  $p(t)$  соотношениями

$$\lambda(t) = [p^\circ(t)]_r, \quad p^\circ(t) = \frac{p(t)}{G(t)} - \int_{t_1}^t \frac{p(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau \quad (6.16)$$

Будем считать, что начиная с момента  $t = t^s$  на поверхности  $\rho = x_0$  задан некоторый другой закон изменения давления  $\tilde{p}(t)$ , который продолжим на весь рассматриваемый в задаче временной луч, положив

$$\tilde{p}(t) \equiv p(t), \quad t_1 < t < t^s \quad (6.17)$$

В итоге для трех первых функций из (6.2) должна быть вместо (6.3) сформулирована следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{e}_\rho \tilde{\chi}(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1 \\ \tilde{\mathbf{S}} &= 2\tilde{\mathbf{D}} + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}})/2 \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \tilde{\mathbf{S}} &= -\mathbf{e}_\rho \tilde{\lambda}(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Здесь функция  $\tilde{\lambda}(t)$  вычисляется по формулам (6.16), в которых нужно поставить тильду над величинами  $\lambda$  и  $p$ .

Вводя функции  $p_-(t) = \tilde{p}(t) - p(t)$  и  $\lambda_-(t) = \tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$ , находим, что в силу тождественного равенства (6.17) будут иметь место равенства

$$p_-^\circ(t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t}$$

$$p_-^\circ(t) = \frac{p_-(t)}{G(t)} - \int_{\tilde{t}}^t \frac{p_-(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = (\mathcal{J} - \mathcal{L}_{\tilde{t}}) p_-(t) / G(t), \quad t \geq \tilde{t}$$

из которых, в частности, вытекает, что

$$\lambda_-(t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t} \quad (6.19)$$

Вычитая из соотношений (6.18) соответствующие соотношения (6.15), будем теперь для  $\mathbf{v}_-$ ,  $\mathbf{D}_-$  и  $\mathbf{S}_-$  вместо (6.8) иметь краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_- + \mathbf{e}_\rho \chi_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1 \\ \mathbf{S}_- &= 2\mathbf{D}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{D}_-, \quad \mathbf{D}_- = (\nabla \mathbf{v}_-^T + \nabla \mathbf{v}_-)/2 \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_- &= -\mathbf{e}_\rho \lambda_-(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x(t) \end{aligned} \quad (6.20)$$

В силу (6.7) и (6.19) эта задача при  $t \leq \tilde{t}$  имеет тривиальное решение, то есть по-прежнему справедливы тождества (6.9), а значит и представления (6.10) и (6.11). Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным ранее. Их следствием является классическая краевая задача

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- + \mathbf{e}_\rho c_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad t \geq \tilde{t} \\ \mathbf{T}_- &= G(t)(\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tilde{t}})[2\mathbf{E}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_-] \\ \mathbf{E}_- &= (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2 \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- &= -\mathbf{e}_\rho p_-(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ссылаясь снова на принцип соответствия в линейной теории вязкоупругости [2], можем искать тензор  $\mathbf{T}_-$  в каждый момент времени  $t \geq \tilde{t}$  из решения упруго-мгновенной за-

дачи, соответствующей в данный момент (6.21). В результате придем к следующему заключению.

**Теорема 2.** Пусть  $\tilde{\omega}(t) \rightarrow 0$  и  $\tilde{p}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть после окончательного завершения наращивания производится остановка вращения и отсоединение сформированного слоя от жесткой оправки. Тогда, если  $\omega(t) \rightarrow \omega_\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , финальные остаточные напряжения в слое независимо от программы остановки, способа отсоединения и момента  $t^s$  определяются тензором остаточных напряжений, вычисляемым по формуле (6.14). В ней смысл первого слагаемого в правой части остается прежним, а компоненты тензора дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  определяются как взятые с обратным знаком напряжения во вращающемся с угловой скоростью  $\omega_\infty$  однородном упругом полем цилиндра фиксированных размеров, одна из боковых поверхностей которого свободна, а на другой задано равномерное давление  $p_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$ , равное установившемуся значению давления изготовленного слоя на оправку в изначально поставленной задаче наращивания, решение которой дается функциями (6.1). Тензор  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  находится из решения следующей классической краевой задачи теории упругости для окончательно сформированного слоя:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_- - \mathbf{e}_\rho c_\infty = \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N)$$

$$\mathbf{T}_- = G_\infty [2\mathbf{E}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{e}_\rho p_\infty, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N$$

**7. Модельные задачи.** В рамках построенной модели рассмотрим процесс послойной силовой намотки вязкоупругого стареющего материала на жесткую оправку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ .

Для аппроксимации меры ползучести материала воспользуемся зависимостью [4, 2]:

$$\omega(t, \tau) = \Phi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

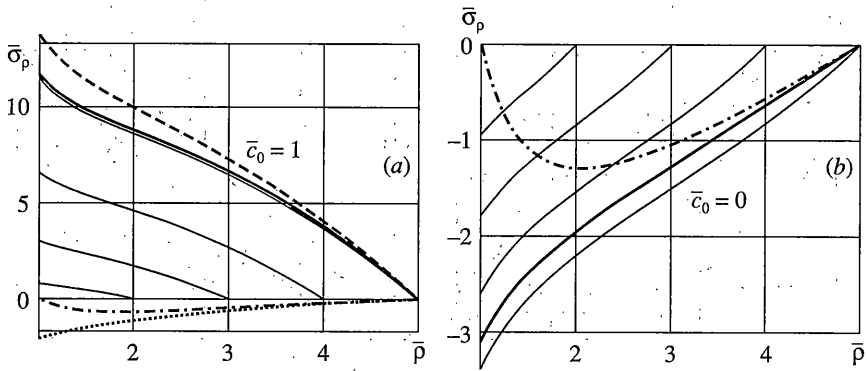
где  $\Phi(\tau)$  – так называемая функция старения,  $\gamma > 0$  – коэффициент, задающий масштаб времени. Аппроксимирующие выражения для модуля сдвига и функции старения возьмем в виде [4, 2]:

$$G(t) = G_\infty (1 - \delta G e^{-\alpha t}), \quad \Phi(\tau) = \varphi_0 + \varphi_1 e^{-\beta \tau}$$

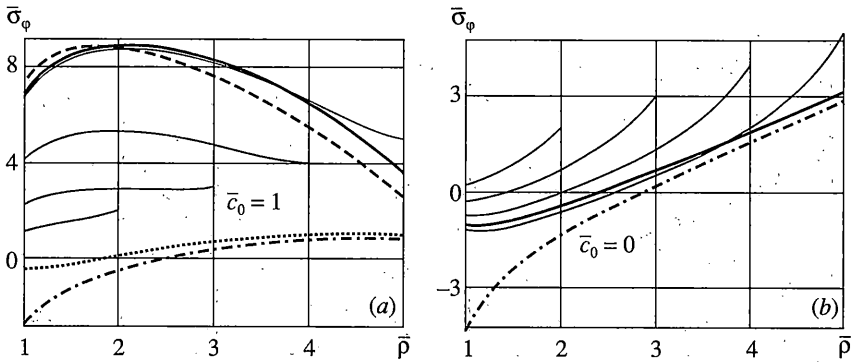
Для расчетов примем  $\nu = 0.35$ ,  $\alpha = 3\gamma/5$ ,  $\delta G = 0.3$ ,  $\beta = 4\gamma/105$ ,  $\varphi_0 G_\infty = 0.1808$ ,  $\varphi_1 G_\infty = 0.4875$ . Данные константы получены для поливинилхлорида на основании экспериментальных кривых, представленных в работе [11].

В расчетах выбрана следующая система базовых безразмерных величин: все величины, имеющие размерность времени, для приведения их к безразмерному виду умножены на  $\gamma$ ; величины, имеющие размерность длины, отнесены к внутреннему радиусу наращиваемого слоя  $x_0$  (радиусу оправки), а величины, имеющие размерность напряжения – к модулю сдвига  $G_\infty$  материала в весьма большом возрасте. Размерные физические величины, приведенные к безразмерному виду, помечаются всюду чертой сверху.

Для простоты ограничимся одним этапом непрерывного наращивания с линейным законом  $x(t)$  изменения во времени внешнего радиуса. Положим  $\bar{x}_1 = 5$ ,  $\bar{t}_1 = 0.3$ ,  $\bar{t}_2 = 4.3$ . Зависимость напряжения натяга монослоев от их радиуса зададим функцией  $\bar{\sigma}_\phi^*(\bar{\rho}) = \bar{\rho}$ . На фиг. 2–5 представлены зависимости характеристик напряженного состояния наращиваемого слоя (безразмерных компонент тензора напряжений в цилиндрической системе координат и интенсивности касательных напряжений) от радиальной



Фиг. 2

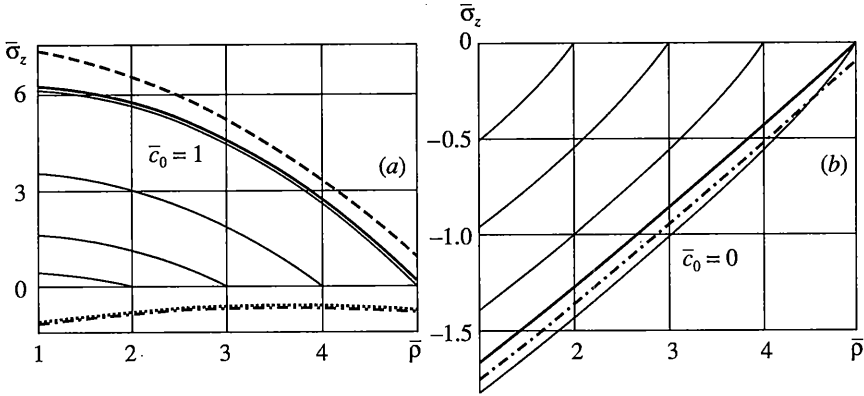


Фиг. 3

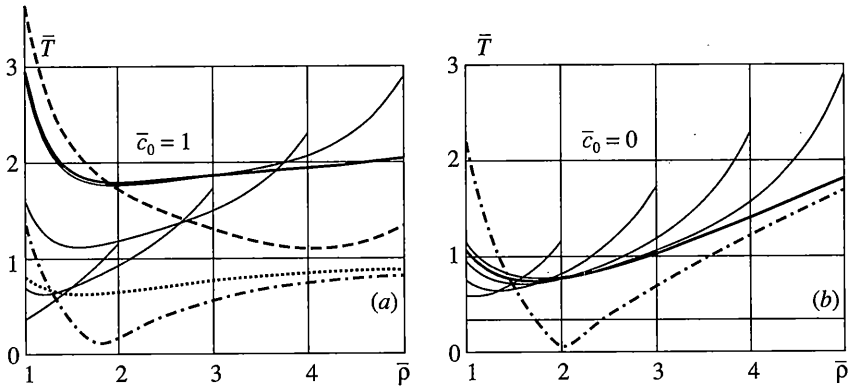
координаты. Тонкими сплошными линиями показана эволюция распределений этих характеристик в процессе непрерывного роста слоя. Сплошная толстая линия изображает финальное (установившееся) распределение каждой характеристики. Штриховая линия соответствует распределениям исследуемых характеристик во вращающемся вязкоупругом слое окончательной толщины, найденном без учета механических особенностей процесса его изготовления из классической задачи линейной теории вязкоупругости. Пунктирной линией изображены эпюры финальных остаточных напряжений и отвечающей им интенсивности касательных напряжений в готовом слое после остановки вращения оправки. Штрихпунктирной линией показаны эпюры финальных остаточных напряжений и соответствующей интенсивности касательных напряжений после остановки вращения и последующего отсоединения изготовленного в процессе намотки цилиндрического тела от оправки.

На фиг. 2 показаны радиальные напряжения в слое, на фиг. 3 – окружные и на фиг. 4 – осевые напряжения. Графики на фиг. 5 отражают распределения интенсивности касательных напряжений.

Для режима намотки, представленного графиками (a) на фиг. 2–5 скорость вращения определяется величиной  $\bar{c}_0 = \bar{\omega}_0^2 \bar{d} = 1$ . Графики (b) на тех же фигурах построены для



Фиг. 4



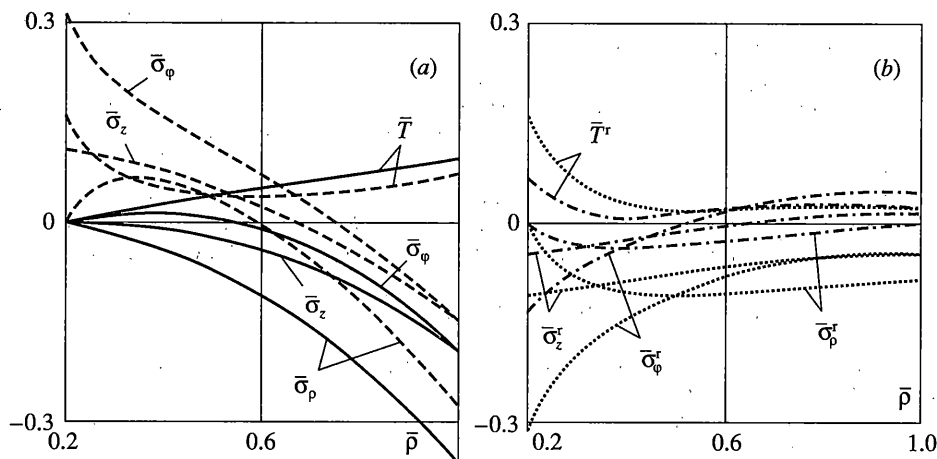
Фиг. 5

случая отсутствия вращения тела в процессе намотки и приведены для сравнения с первым режимом.

Не вдаваясь в подробное обсуждение приведенных результатов ввиду их достаточной наглядности, отметим лишь два принципиальных момента. Во-первых, при анализе кривых становится очевидной необходимость учета фактора постепенного формирования тела при расчете его напряженно-деформированного состояния в процессе и после изготовления (только таким образом можно найти, например, распределение технологических остаточных напряжений в готовом теле). Во-вторых, при моделировании рассматриваемых процессов важно принимать во внимание и оценивать влияние присутствующих в них центробежных сил. Пренебрежение последними при определенных соотношениях между скоростью вращения оправки и силой натяжения присоединяемых монослоев материала может привести к абсолютно неверному результату (в этой связи обратим внимание на знак радиальных и осевых напряжений, а также на положение максимума окружного напряжения и интенсивности касательных напряжений в слое для двух рассмотренных вариантов намотки).

Рассмотрим также задачу о нанесении ненапряженного материала на внутреннюю поверхность вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  жесткой оправки. Здесь





Фиг. 6

приведем результаты расчета для чисто упругого материала. В этом случае, как уже отмечалось в п. 5, закон изменения во времени радиуса поверхности роста  $x(t)$  (внутреннего радиуса слоя) не играет никакой роли, напряжения в растущем слое определяются только мгновенным значением данного радиуса и не изменяются после остановки роста.

Для приведения к безразмерному виду все линейные величины здесь, как и ранее, относятся к неизменяемому радиусу слоя  $x_0$ , в данном случае внешнему. Величины, совпадающие по размерности с напряжением, относятся к постоянному модулю сдвига  $G$ .

Коэффициент Пуассона принимается в расчетах равным  $\nu = 0.35$ . Скорость вращения определяется значением коэффициента  $\bar{c}_0 = 1$ .

На фиг. 6, *a* показаны распределения безразмерных напряжений (радиального  $\bar{\sigma}_r$ , окружного  $\bar{\sigma}_\varphi$  и осевого  $\bar{\sigma}_z$ ) и интенсивности касательных напряжений  $\bar{T}$  в растущем слое для значения внутреннего радиуса  $\bar{x} = 0.2$  (сплошные линии), а также в аналогичном вращающемся слое, изготовленном до начала вращения без остаточных напряжений (штриховые линии). Налицо принципиальные качественные и количественные различия этих распределений. Они отличаются характером монотонности, положениями и величинами экстремальных значений, имеют разные интервалы знакопостоянства.

Фиг. 6, *b* иллюстрирует зависимости от радиальной координаты характеристик остаточного напряженного состояния изготовленного на вращающейся оправке упругого слоя, которое возникает в нем после остановки вращения (пунктирная линия) или после остановки вращения с последующим отсоединением оправки (штрихпунктирная линия). Важно отметить, что значения этих характеристик соизмеримы с соответствующими значениями в процессе роста и в классической задаче для вращающегося слоя.

**8. Заключение.** На основании проведенных в работе исследований можно сделать следующие выводы.

1. Предложена математическая модель процессов изготовления упругих и вязкоупругих стареющих цилиндрических тел и покрытий на вращающейся оправке, учитывающая как особенности послыопного нанесения материала с произвольным натягом, так и влияние центростремительных сил.

2. Дана постановка соответствующей неклассической краевой задачи механики растущих тел и предложен метод ее решения.

3. Получены замкнутые решения поставленной задачи для случаев упругого и вязкоупругого стареющего материалов.

4. Доказаны теоремы об остаточных напряжениях в наращиваемых телах.

5. Проведены расчеты для модельных задач и выявлены новые механические эффекты, возникающие только в растущих цилиндрических телах, находящихся под действием центробежных сил.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
3. Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ГИИЛ, 1948. 675 с.
4. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. Метлов В.В., Никитин А.В. О наращивании вязкоупругого цилиндра, подверженного старению // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 5. С. 52–60.
6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
7. Метлов В.В. О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637–647.
8. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
9. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
10. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
11. Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.

Москва

Поступила в редакцию  
12.09.2006