

УДК 531.36:62–50

© 2006 г. В.Н. БЕЛОТЕЛОВ, Ю.Г. МАРТЫНЕНКО

УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА, УСТАНОВЛЕННОГО НА КОЛЕСНОЙ ПАРЕ

Рассматривается пространственное движение на горизонтальной шероховатой плоскости перевернутого маятника, установленного на колесной паре. Управление системой осуществляется двумя независимыми электродвигателями постоянного тока, каждый из которых через редуктор создает момент между одним из колес и маятником. Найдены стационарные движения системы при постоянных напряжениях, приложенных к двигателям. Предложен алгоритм стабилизации вертикального положения маятника при движении центра колесной пары с постоянной скоростью по окружности. Приведены результаты численных экспериментов с нелинейной моделью с учетом ограничений на напряжения, подаваемые на двигатели.

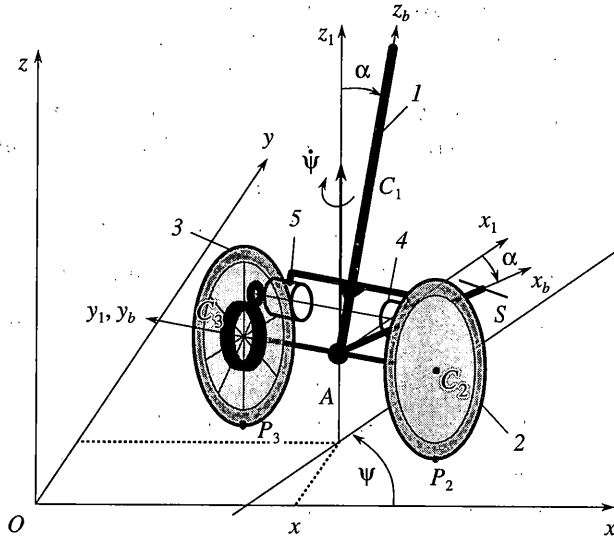
В работе [1] задача управления перевернутым маятником, установленным на колесной паре, колеса которой вращаются двумя независимыми двигателями, решается в рамках линеаризованной математической модели, полученной с помощью общих теорем динамики для каждого из трех тел, входящих в систему. Управление плоскопараллельным движением перевернутого маятника, установленного на катящемся колесе, исследовано в статье [2], где была решена задача синтеза в виде обратной связи ограниченного по величине управления, обеспечивающего стабилизацию вертикального положения маятника и заданной скорости центра колеса.

Рассматриваемая в работе [3] математическая модель пространственного движения системы учитывает неголономность связей (отсутствие проскальзывания колес), однако построенный в [3] алгоритм управления движением не учитывает ограничений на величины управляющих воздействий.

Обширный список устройств (транспортных средств, роботов и т.д.), использующих указанную двухколесную схему, приведен в [4], что свидетельствует о большом интересе к таким системам. В частности, рассматриваемая система является основой транспортного средства “Segway” [5], сконструированного в виде колесной пары, на которой может помещаться человек. В последнее время большое внимание уделяется также разработке различных робототехнических устройств на базе подвижной платформы Segway RMP [6].

При конструировании двухколесного робота возникает задача стабилизации корпуса робота (платформы) в вертикальном положении с помощью системы управления, поскольку центр масс платформы расположен выше оси колес. Одновременно необходимо разработать алгоритмы управления движением робота по заданной траектории. Сложность такой задачи связана с дефицитом управляющих воздействий, неустойчивостью (в отсутствие управления), ограниченностью ресурсов управления, неголономностью связей.

В данной работе для случая отсутствия проскальзывания колес предложена достаточно компактная форма уравнений движения системы. Изучается возможность стабилизации стационарного движения системы, при котором центр масс колесной пары движется по окружности с постоянной скоростью, а маятник находится в верхнем (неустой-



Фиг. 1

чивом) положении. Предлагаемые алгоритмы управления учитывают ограниченность управляющих напряжений, подаваемых на двигатели колес аппарата, и могут обеспечивать максимальную область притяжения стационарного движения.

1. Конструкция системы и уравнения движения. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпадала с горизонтальной плоскостью, по которой катятся абсолютно жесткие колеса колесной пары.

Рассматриваемая система имеет платформу 1, называемую также маятником, так как ее центр масс C_1 находится выше горизонтальной оси вращения C_2C_3 . Вокруг этой оси могут независимо вращаться два одинаковых колеса 2, 3 радиуса r (фиг. 1), центры масс которых находятся в точках C_2 и C_3 . Колеса 2, 3 жестко скреплены с шестернями радиуса r_1 , которые находятся в зацеплении с шестернями радиуса r_2 , жестко скрепленными с роторами двигателей 4, 5. Статоры двигателей скреплены с платформой 1 (фиг. 1). Центры масс роторов находятся в точках C_4 и C_5 ; оси вращения роторов, лежащие на прямой C_4C_5 , параллельны оси колесной пары C_2C_3 . Оси вращения колес и роторов электродвигателей являются осями симметрии соответствующих центральных эллипсоидов инерции. Предполагается, что во все время движения не происходит отрыва колес от плоскости Oxy . С осью колесной пары свяжем подвижную систему координат $Ax_1y_1z_1$, начало которой поместим в точку A – середину отрезка, соединяющего центры C_2, C_3 колес 2, 3. Ось A_1 направим по вектору AC_3 , ось Az_1 – вертикально вверх. С корпусом свяжем подвижную систему координат $Ax_by_bz_b$, ось Ay_b которой направим по Ay_1 , а ось Az_b проведем через центр масс корпуса C_1 . Система $Ax_by_bz_b$ получается из системы $Ax_1y_1z_1$ поворотом на угол α вокруг оси колесной пары Ay_1 .

Согласно фиг. 1 колесная пара с прикрепленным маятником и роторами электродвигателей постоянного тока представляет собой систему пяти абсолютно твердых тел, положение которых можно определить восемью независимыми параметрами, образующими вектор обобщенных координат $\mathbf{q} = (x \ y \ \psi \ \alpha \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5)^T$, где x, y – координаты точки A ; ψ – угол курса (угол поворота вокруг оси Az_1 колесной пары, отсчитываемый от оси x); α – угол поворота маятника (угол между осями Az_1 и Az_b); φ_2, φ_3 – абсолютные углы поворота колес относительно горизонтальной оси Ay_1 ; φ_4, φ_5 – абсолютные углы

поворота роторов электродвигателей относительно своих осей вращения; T – знак транспонирования. Тензор инерции системы в осях $Ax_b y_b z_b$ не зависит от углов ϕ_i .

Пусть расстояние между колесами равно $2a$; плечо маятника $AC_1 = b$. Вектор угловой скорости маятника в проекциях на оси $Ax_b y_b z_b$ имеет вид $\Omega_1 = (-\dot{\psi} \sin \alpha \ \dot{\alpha} \ \dot{\psi} \cos \alpha)^T$, а векторы угловых скоростей колес и роторов электродвигателей в трехграннике $Ax_1 y_1 z_1$ определяются выражениями $\Omega_i = (0 \ \phi_i \ \dot{\psi})^T$ ($i = 2, 3, 4, 5$).

Скорости точек контакта колес с поверхностью имеют вид

$$v_{P_2} = v_A + [\Omega_1, AC_2] + [\Omega_2, C_2 P_2], \quad v_{P_3} = v_A + [\Omega_1, AC_3] + [\Omega_3, C_3 P_3] \quad (1.1)$$

Здесь P_k – точка контакта (мгновенный центр скоростей) k -го колеса аппарата ($k = 2, 3$) с горизонтальной поверхностью (фиг. 1).

Условия отсутствия проскальзывания колес аппарата после проектирования уравнений (1.1) на оси $Ax_1 y_1 z_1$ приводит к трем независимым уравнениям неголономных связей:

$$\begin{aligned} v_{P_2 y_1} &= v_{P_3 y_1} = -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = 0 \\ v_{P_2 x_1} &= \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi + a \dot{\psi} - r \dot{\phi}_2 = 0 \\ v_{P_3 x_1} &= \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - a \dot{\psi} - r \dot{\phi}_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условие отсутствия проскальзывания в точках зацепления шестерен, связанных с колесами, и шестерен, связанных с роторами электродвигателей, сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} r_2(1 + \chi) \dot{\alpha} - r_1 \dot{\phi}_2 - r_2 \dot{\phi}_4 &= 0 \\ r_2(1 + \chi) \dot{\alpha} - r_1 \dot{\phi}_3 - r_2 \dot{\phi}_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\chi = r_2/r_1$ – коэффициент редукции равный отношению радиусов шестерен. Таким образом, на восемь обобщенных координат налагается пять уравнений связей (1.2), (1.3), и рассматриваемая система имеет три степени свободы.

В качестве вектора псевдоскоростей можно выбрать вектор $\dot{\pi} = (V, \Omega_\psi, \Omega_\alpha)^T$, где $V = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi$ – проекция скорости точки A на ось x_1 , $\Omega_\psi = \dot{\psi}$, $\Omega_\alpha = \dot{\alpha}$. При этом, с учетом (1.2), (1.3), связь между обобщенными скоростями и псевдоскоростями удобно записать в матричном виде

$$\dot{q} = H \dot{\pi} \quad (1.4)$$

$$H^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 & 1/r & 1/r & -\chi/r & -\chi/r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a/r & -a/r & -\chi a/r & \chi a/r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \chi + 1 & \chi + 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $m_1, m_2 = m_3, m_4 = m_5$ соответственно массы корпуса, колеса, ротора, через J_1 – тензор инерции корпуса в осях $x_b y_b z_b$, через $J_2 = J_3, J_4 = J_5$ – тензоры инерции колеса и ротора в главных центральных осях инерции колеса и ротора, которые коллинеарны осям $x_1 y_1 z_1$:

$$J_1 = m_1 \begin{pmatrix} \rho_{1x}^2 & -\rho_{xy} & -\rho_{xz} \\ -\rho_{xy} & \rho_{1y}^2 & -\rho_{yz} \\ -\rho_{xz} & -\rho_{yz} & \rho_{1z}^2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = m_2 \begin{pmatrix} \rho_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^2 \end{pmatrix}, \quad J_4 = m_4 \begin{pmatrix} \rho_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{4y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_4^2 \end{pmatrix}$$

Подсчитаем энергию ускорений (функцию Апделя) рассматриваемой механической системы:

$$S = 1/2 \ddot{\pi}^T \mathbf{A}_3 \ddot{\pi} + \dot{\pi}^T \mathbf{B}_3 + S_0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} + a_{13c} \cos \alpha \\ 0 & a_{22} + a_{14} \sin^2 \alpha + a_{24} \sin 2\alpha & a_{34} \sin \alpha - a_{44} \cos \alpha \\ a_{13} + a_{13c} \cos \alpha & a_{34} \sin \alpha - a_{44} \cos \alpha & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} -a_{13}(\Omega_\alpha^2 + \Omega_\psi^2) \\ a_{13} \sin \alpha V \Omega_\psi + (a_{34} \cos \alpha + a_{44} \sin \alpha) \Omega_\alpha^2 + (2a_{24} \cos 2\alpha + a_{14} \sin 2\alpha) \Omega_\psi \Omega_\alpha \\ -(a_{24} \cos 2\alpha + a_{14} \sin \alpha \cos \alpha) \Omega_\psi^2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Здесь \mathbf{A}_3 – симметричная положительно-определенная матрица коэффициентов инерции, элементы вектор-столбца \mathbf{B}_3 являются квадратичными формами псевдоскоростей, S_0 – функция, не зависящая от псевдоускорений $\ddot{\pi} = (\dot{V}, \dot{\Omega}_\psi, \dot{\Omega}_\alpha)^T$. Кроме того, в (1.6), (1.7) введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + 2m_2 \left(1 + \frac{\rho_{2y}^2}{r^2} \right) + 2m_4 \left(1 + \chi^2 \frac{\rho_{4y}^2}{r^2} \right) \\ a_{22} &= m_1 \rho_{1z}^2 + 2m_2 \left(\rho_2^2 + a^2 \left(1 + \frac{\rho_{2y}^2}{r^2} \right) \right) + 2m_4 \left(a^2 + \rho_4^2 + \frac{a^2 \chi^2 \rho_{4y}^2}{r^2} \right) \\ a_{33} &= m_1 (b^2 + \rho_{1y}^2) + 2m_4 (r_1^2 + \chi^2 \rho_{4y}^2) \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)^2, \quad a_{13} = -2m_4 \chi (\chi + 1) \frac{\rho_{4y}^2}{r} \\ a_{c13} &= m_1 b + 2m_4 (r_1 + r_2), \quad a_{14} = m_1 (b^2 + \rho_{1x}^2 - \rho_{1z}^2) + 2m_4 r_1^2 \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)^2 \\ a_{24} &= m_1 \rho_{xz}, \quad a_{34} = m_1 \rho_{xy}, \quad a_{44} = m_1 \rho_{yz} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Дифференцируя энергию ускорений (1.5) по вектору псевдоускорений $\ddot{\pi}$, получим уравнения Апделя, которые в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{A}_3 \ddot{\pi} + \mathbf{B}_3 = \mathbf{Q} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\chi \frac{M_R + M_L}{r}, \chi \frac{a(M_R - M_L)}{r}, a_{c13} g \sin \alpha - \chi(M_R + M_L) \right)^T$$

Здесь \mathbf{Q} – вектор обобщенных сил, M_R и M_L – моменты, развиваемые соответственно электродвигателями 4 и 5 правого и левого колес аппарата. При этом на маятник действует момент пары сил, равный $-\chi(M_R + M_L)$, и коллинеарный оси вращения колес $Ay_1 = Ay_b$.

Заметим, что первое скалярное уравнение в (1.9) описывает изменение количества движения первого тела системы вдоль оси x_1 под действием горизонтальных сил реакций, второе и третье уравнение в (1.9) – изменение момента количества движения всей системы относительно осей z_1, y_1 соответственно.

Будем считать, что правый и левый двигатели одинаковы, и моменты на валу двигателя определим как

$$M_{R,L} = C_U U_{R,L} - C_V(\phi_{4,5} - \Omega_\alpha) \quad (1.10)$$

Здесь $U_{R,L}$ – напряжения на правом и левом двигателе соответственно, C_U, C_V – постоянные коэффициенты, определяемые паспортными характеристиками двигателя [2]. Подаваемые на двигатели напряжения $U_{R,L}$ ограничены по абсолютной величине

$$|U_{R,L}(t)| \leq U_0 \quad (U_0 = \text{const}) \quad (1.11)$$

Уравнения (1.4), (1.9) образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений одиннадцатого порядка для одиннадцати неизвестных $x, y, \psi, \alpha, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, V, \Omega_\psi, \Omega_\alpha$. В скалярной форме эта система после подстановки (1.10) в (1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \psi; \quad \dot{y} = V \sin \psi; \quad \dot{\psi} = \Omega_\psi; \quad \dot{\alpha} = \Omega_\alpha; \quad \phi_2 = \frac{1}{r}(V + a\Omega_\psi); \quad \phi_3 = \frac{1}{r}(V - a\Omega_\psi) \\ \phi_4 &= -\frac{\chi}{r}(V + a\Omega_\psi) + (\chi + 1)\Omega_\alpha; \quad \phi_5 = -\frac{\chi}{r}(V - a\Omega_\psi) + (\chi + 1)\Omega_\alpha \\ a_{11}\dot{V} + (a_{13} + a_{13c} \cos \alpha)\dot{\Omega}_\alpha - a_{13c} \sin \alpha(\Omega_\alpha^2 + \Omega_\psi^2) + \frac{2C_V}{r^2}\chi^2(V - r\Omega_\alpha) &= \frac{C_U}{r}\chi(U_R + U_L) \\ (a_{22} + a_{14} \sin^2 \alpha + a_{24} \sin 2\alpha)\dot{\Omega}_\psi + (a_{34} \sin \alpha - a_{44} \cos \alpha)\dot{\Omega}_\alpha + a_{13c} \sin \alpha V \Omega_\psi + \\ + (a_{14} \sin 2\alpha + 2a_{24} \cos 2\alpha)\Omega_\alpha \Omega_\psi + (a_{44} \sin \alpha + a_{34} \cos \alpha)\Omega_\alpha^2 + \frac{2C_V a^2}{r^2}\chi^2 \Omega_\psi &= \\ = \frac{C_U a}{r}\chi(U_R - U_L) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} (a_{13} + a_{13c} \cos \alpha)\dot{V} + (a_{34} \sin \alpha - a_{44} \cos \alpha)\dot{\Omega}_\psi + a_{33}\dot{\Omega}_\alpha - (a_{14} \sin \alpha \cos \alpha + a_{24} \cos 2\alpha)\Omega_\psi^2 - \\ - \frac{2C_V}{r}\chi^2(V - r\Omega_\alpha) - a_{13}g \sin \alpha = -C_U \chi(U_R + U_L) \end{aligned}$$

Для приведения уравнений (1.12) к безразмерному виду введем безразмерные переменные и безразмерное время τ по формулам $v = V/V^*$, $\omega_\psi = t^* \Omega_\psi$, $\omega_\alpha = t^* \Omega_\alpha$, $u_R = U_R/U^*$, $u_L = U_L/U^*$, $\tau = t/t^*$, где $V^* = \sqrt{gr}$, $U^* = a_{11}gr/(\chi C_U)$, $t^* = \sqrt{r/g}$. Разделив каждое из уравнений (1.12) на множитель, имеющий размерность соответствующего уравнения, получаем систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} x' &= v \cos \psi; \quad y' = v \sin \psi; \quad \psi' = \omega_\psi; \quad \alpha' = \omega_\alpha \\ v' + (j_0 + j_1 \cos \alpha)\omega_\alpha' - j_1 \sin \alpha(\omega_\alpha^2 + \omega_\psi^2) + p v - p \omega_\alpha &= u_R + u_L \\ (j_2 + j_4 \sin^2 \alpha + j_5 \sin 2\alpha)\omega_\psi' + (j_6 \sin \alpha - j_7 \cos \alpha)\omega_\alpha' + j_1 \sin \alpha v \omega_\psi + \\ + (j_4 \sin 2\alpha + 2j_5 \cos 2\alpha)\omega_\alpha \omega_\psi + (j_7 \sin \alpha + j_6 \cos \alpha)\omega_\alpha^2 + l^2 p \omega_\psi &= l(u_R - u_L) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$(j_0 + j_1 \cos \alpha) v' + (j_6 \sin \alpha - j_7 \cos \alpha) \omega_\psi' + j_3 \omega_\alpha' - (j_4 \cos \alpha \sin \alpha + j_5 \cos 2\alpha) \omega_\psi^2 + p(\omega_\alpha - v) - j_1 \sin \alpha = -u_R - u_L$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ , и введены следующие обозначения для безразмерных комплексов

$$j_0 = \frac{a_{13}}{a_{11}r}, \quad j_1 = \frac{a_{13c}}{a_{11}r}, \quad j_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}r^2}, \quad j_3 = \frac{a_{33}}{a_{11}r^2}, \quad j_4 = \frac{a_{14}}{a_{11}r^2}$$

$$j_5 = \frac{a_{24}}{a_{11}r^2}, \quad j_6 = \frac{a_{34}}{a_{11}r^2}, \quad j_7 = \frac{a_{44}}{a_{11}r^2}, \quad p = \frac{2C_V \chi^2}{a_{11}r \sqrt{gr}}, \quad l = \frac{a}{r}$$
(1.14)

Кинематические уравнения для углов поворота колес φ_2, φ_3 и углов поворотов роторов φ_4, φ_5 электродвигателей в (1.13) не выписаны, так как эти углы являются циклическими переменными и для дальнейших построений оказываются несущественными.

Ограничение (1.11) в безразмерных переменных трансформируется в неравенство

$$|u_{R,L}| \leq u_0 = U_0/U^* \quad (1.15)$$

2. Линеаризация уравнений движения и условия управляемости аппарата. При $\rho_{xz} = 0, \rho_{yz} = 0$ ($j_5 = 0, j_7 = 0$), т.е. в случае, когда ось Az является главной осью инерции корпуса, и при постоянных напряжениях, подаваемых на двигатели

$$u_R = u_R^0 = \frac{p}{2}(v_0 + l\omega_0), \quad u_L = u_L^0 = \frac{p}{2}(v_0 - l\omega_0)$$

система дифференциальных уравнений (1.13) имеет стационарное решение

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau + \psi_0), \quad y = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau + \psi_0), \quad \psi = \omega_0 \tau + \psi_0, \quad \alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$v = v_0, \quad \omega_\alpha = 0, \quad \omega_\psi = \omega_0$$

При этом стационарные значения переменных в (2.1) связаны с напряжениями соотношениями

$$v_0 = \frac{1}{p}(u_R^0 + u_L^0), \quad \omega_0 = \frac{1}{lp}(u_R^0 - u_L^0) \quad (2.2)$$

Решение (2.1) отвечает вертикальному (неустойчивому) положению маятника и равномерному движению точки A с постоянной скоростью v_0 по окружности радиуса v_0/ω_0 .

При равенстве напряжений $u_R^0 = u_L^0$ угловая скорость ω_0 согласно (2.2) обращается в нуль, и движение точки A становится прямолинейным.

Рассмотрим задачу стабилизации системы в окрестности стационарного решения (2.1) в предположении, что в начале процесса стабилизации маятник уже находится в некоторой окрестности неустойчивого вертикального положения $\alpha = 0$.

При линеаризации уравнений движения (1.13) аппарата в окрестности решения (2.1) сделаем замену

$$u_R = \frac{u_s + u_d}{2}, \quad u_L = \frac{u_s - u_d}{2} \quad (2.3)$$

где u_s и u_d — соответственно сумма и разность напряжений, подаваемых на двигатели. При этом для получения линеаризованных уравнений в виде системы дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами перейдем в (1.13) к полярным координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, где полярные координаты ρ , θ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\rho' = v \cos(\psi - \theta), \quad \theta' = \frac{v}{\rho} \sin(\psi - \theta) \quad (2.4)$$

и на стационарном движении (2.1) принимать значения

$$\rho = v_0/\omega_0, \quad \theta = \omega_0 \tau + \psi_0 - \pi/2 \quad (2.5)$$

Уравнения движения (1.13), (2.4), линеаризованные в окрестности (2.1), (2.5) при $j_5 = j_7 = 0$, запишем в виде:

$$\xi_7' = A_7 \xi_7 + B_7 u \quad (2.6)$$

$$\xi_7 = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_d \end{pmatrix}; \quad A_7 = \begin{pmatrix} A_s & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ A_{12} & A_d \end{pmatrix}; \quad B_7 = \begin{pmatrix} B_s & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & B_d \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} u_s \\ u_d \end{pmatrix}$$

$$\xi_s = (\Delta \alpha \ \Delta v \ \Delta \omega_\alpha)^T, \quad \xi_d = (\Delta \rho \ \Delta \theta \ \Delta \psi \ \Delta \omega_\psi)^T$$

$$A_s = \frac{1}{j_8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j_8 \\ -j_1 j_9 - \omega_0^2 (j_4 j_9 - j_1 j_3) & -(j_3 + j_9) p & (j_3 + j_9) p \\ j_1 + \omega_0^2 (j_4 - j_1 j_9) & (1 + j_9) p & -(1 + j_9) p \end{pmatrix}; \quad B_s = \frac{1}{j_8} \begin{pmatrix} 0 \\ j_3 + j_9 \\ -1 - j_9 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \frac{\omega_0}{j_2 v_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -j_1 v_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_d = \frac{1}{j_2 v_0} \begin{pmatrix} 0 & j_2 v_0^2 & -j_2 v_0^2 & 0 \\ -j_2 \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_2 v_0 \\ 0 & 0 & 0 & -p l^2 v_0 \end{pmatrix}; \quad B_d = \frac{1}{j_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь вектор ξ_7 составлен из отклонений фазовых переменных от стационарного движения (2.1), $j_9 = j_0 + j_1$, величина $j_8 = j_3 - j_9^2$ пропорциональна определителю положительно-определенной матрицы коэффициентов инерции (1.6), подсчитанному при $j_5 = j_7 = 0$ и $\alpha = 0$. Поэтому параметр $j_8 > 0$, что можно показать и непосредственно, пользуясь выражениями (1.14) для безразмерных параметров и формулами (1.8).

Из-за наличия нулевого верхнего "угла" в матрице A_7 первые три уравнения в (2.6) отделяются от остальных, при этом возникает система линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с одним скалярным управлением u_s :

$$\xi_s' = A_s \xi_s + B_s u_s \quad (2.7)$$

Если выбором управления u_s в (2.7) добиться асимптотической устойчивости тривиального решения, то в управлении для вектора ξ_d член $A_{12} \xi_s$ будет представлять собой затухающее возмущение, и для стабилизации бокового движения аппарата достаточно рассмотреть систему четвертого порядка с одним скалярным управлением u_d :

$$\xi_d' = A_d \xi_d + B_d u_d \quad (2.8)$$

Заметим, что при $\omega_0 = 0$ система (2.7), которую далее будем называть системой продольного движения, с точностью до обозначений совпадает с системой (3.4) работы [2], где построена ее область управляемости и проведен синтез закона управления. Из критерия Калмана [7] следует, что система (2.7) вполне управляема тогда и только тогда, когда

$$\det(\mathbf{B}_s, \mathbf{A}_s \mathbf{B}_s, \mathbf{A}_s^2 \mathbf{B}_s) = -j_8^{-3} (1 + j_9)^2 [j_1 + (j_1 + j_4)\omega_0^2] \neq 0 \quad (2.9)$$

Так как для рассматриваемой конструкции центры масс маятника и роторов электродвигателей C_1, C_3, C_4 находятся выше оси вращения $C_2 C_3$ колес, т.е. $b > 0$, то, воспользовавшись обозначениями (1.14) и (1.8), можно убедиться, что $j_1 > 0$.

Анализ выражения $1 + j_9$ показывает, что если

$$\rho_{4y} \chi \leq \sqrt{r(r_1(1 + \chi) + r\chi)} \quad (2.10)$$

то при любых значениях параметров системы $1 + j_9 > 0$. Если же условие (2.10) не выполнено, то при

$$m_4 = \frac{\chi m_1 r(b + r) + 2m_2(r^2 + \rho_{2y}^2)}{2 \chi^2 \rho_{4y}^2 - r(r_1(1 + \chi) + r\chi)} \quad (2.11)$$

выражение $1 + j_9$ обращается в нуль и согласно (2.9) система становится неуправляемой.

Анализ коэффициента $j_1 + j_4$, стоящего перед ω_0^2 во второй скобке в (2.8), показывает, что если радиус инерции корпуса относительно вертикальной оси удовлетворяет неравенству

$$\rho_{1z} < \sqrt{\rho_{1x}^2 + b(b + r)} \quad (2.12)$$

то $j_1 + j_4 > 0$, и последняя скобка в условии управляемости (2.9) будет положительна при любых угловых скоростях аппарата ω_0 . Если же неравенство (2.12) не выполнено, и, кроме того

$$m_1 > 2m_4 \frac{r_1(1 + \chi)(r_1(1 + \chi) + r\chi)}{\chi^2(\rho_{1z}^2 - \rho_{1x}^2 + b(b + r))} \quad (2.13)$$

то $j_4 + j_1 < 0$, и при угловой скорости $\omega_0^2 = -j_1/(j_4 + j_1)$ аппарат становится неуправляемым.

Из критерия Калмана [7] следует, что система (2.8) вполне управляема тогда и только тогда, когда

$$\det(\mathbf{B}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d, \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d, \mathbf{A}_d^3 \mathbf{B}_d) = -j_2^{-4} l^4 v_0 \omega_0^2 \neq 0 \quad (2.14)$$

и, следовательно, условие управляемости выполняется для любых стационарных движений (2.1).

3. Собственные значения разомкнутой системы. Выясним расположение на комплексной плоскости собственных значений разомкнутой системы, получающейся из (2.6) при $\mathbf{u} = 0$, т.е. собственных значений матрицы \mathbf{A}_7 . В силу наличия нулевого угла матрицы \mathbf{A}_7 для этого достаточно найти собственные значения уравнений продольного движения (2.7) при $u_s = 0$ и уравнений бокового движения (2.8) при $u_d = 0$. Характеристическое уравнение системы третьего порядка (2.7) имеет вид (λ – спектральный параметр):

$$\begin{aligned} F_s(\lambda) &= 0, \quad F_s(\lambda) = a_{1s} + a_{2s}\lambda + a_{3s}\lambda^2 + \lambda^3 \\ a_{1s} &= -p(j_1 + (j_1 + j_4)\omega_0^2)/j_8, \quad a_{2s} = -(j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2)/j_8 \\ a_{3s} &= p(1 + j_3 + 2j_9)/j_8 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае, когда $C_V = 0$ (т.е. противо-ЭДС отсутствует), то согласно соотношению (1.14) параметр $p = 0$. При этом уравнение (3.1) будет иметь один нулевой корень. Для определенности при анализе корней уравнения (3.1) предположим, что выполнено условие (2.12) и, кроме того

$$j_4 - j_1 j_9 > 0 \quad (3.2)$$

Условие (3.2) выполняется, например, для аппаратов при достаточно большой массе корпуса и $\rho_{1x} > \rho_{1z}$. В этом случае при $p = 0$ уравнение (3.1) имеет два ненулевых действительных корня, различающихся только знаками, и один нулевой корень:

$$\lambda_1 = \sqrt{(j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2)/j_8}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\sqrt{(j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2)/j_8} \quad (3.3)$$

т.е. спектр разомкнутой системы при $p = 0$ симметричен относительно мнимой оси. Это естественно, поскольку при $C_V = 0$ разомкнутая система консервативна. При "добавлении" противо-ЭДС ($C_V = 0, p > 0$) нулевое собственное значение сдвигается влево, два другие также сдвигаются, но остаются положительным и отрицательным при всех значениях $p > 0$. Это утверждение справедливо, по крайней мере, при $\omega_0^2 < p^2(1 + j_9)/j_1$ поскольку в этом случае функция $F(\lambda)$ трижды меняет знак при изменении ее аргумента λ от $-\infty$ до $+\infty$. Два раза ее график пересекает отрицательную полуось λ и один раз положительную. Действительно

$$F_s(-\infty) = -\infty < 0, \quad F_s(-p) = p(j_9 + 1)(p^2(j_9 + 1) - j_1\omega_0^2)/j_8 > 0$$

$$F_s(0) = -p(j_1 + (j_1 + j_4)\omega_0^2)/j_8 < 0, \quad F_s(+\infty) = +\infty > 0$$

Следовательно, характеристическое уравнение (3.1) имеет один положительный действительный корень $\lambda_1 > 0$ и рассматриваемая система в отсутствие управления, т.е. в разомкнутом состоянии, неустойчива.

Если параметр p (коэффициент C_V) мал, то для приближенного вычисления собственных значений λ_i ($i = 1, 2, 3$) можно воспользоваться выражениями (3.3), которые справедливы при $p = 0$ ($C_V = 0$). В линейном приближении по величине p (по величине C_V) выражения для λ_i ($i = 1, 2, 3$) приобретают вид

$$\lambda_{1,3} \approx \pm \sqrt{\frac{j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2}{j_8}} - \frac{p(1 + j_3 + 2j_9)}{2j_8} + \frac{p(j_1 + (j_1 + j_4)\omega_0^2)}{2(j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2)}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{p(j_1 + (j_1 + j_4)\omega_0^2)}{j_1 + (j_4 - j_1 j_9)\omega_0^2}$$

Характеристическое уравнение для системы (2.8) при $u_d = 0$ имеет вид

$$F_d(\lambda) = 0, \quad F_d(\lambda) = \lambda(pl^2/j_2 + \lambda)(\omega_0^2 + \lambda^2) \quad (3.4)$$

и, следовательно, уравнения бокового движения имеют один нулевой, один отрицательный $-pl^2/j_2$ и два чисто мнимых корня $\pm i\omega_0$.

4. Алгоритмы управления продольным движением аппарата. Сделаем в (2.7) линейное преобразование переменных с постоянной невырожденной матрицей S_s :

$$\xi_s = S_s \eta_s, \quad \eta_s = S_s^{-1} \xi_s \quad (4.1)$$

так, что новая переменная η_3 удовлетворяет уравнению

$$\eta'_s = S_s^{-1} A_s S_s \eta_s + e_3 u_s \quad (4.2)$$

$$S_s = \frac{1}{j_8} \begin{pmatrix} 0 & -1 - j_9 & 0 \\ -j_1 - (j_1 + j_4)\omega_0^2 & 0 & j_3 + j_9 \\ 0 & 0 & -1 - j_9 \end{pmatrix}, \quad S_s^{-1} A_s S_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{1s} & -a_{2s} & -a_{3s} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = S_s^{-1} B_s = (0 \ 0 \ 1)^T, \quad \eta_s = (\eta_{1s} \ \eta_{2s} \ \eta_{3s})^T$$

Тем самым, система (2.7) сводится к одному скалярному уравнению

$$\eta_{1s}^{(3)} + a_{3s} \eta_{1s}'' + a_{2s} \eta_{1s}' + a_{1s} \eta_{1s} = u_s \quad (4.3)$$

$$\eta_{1s} = \frac{j_8((1 + j_9)\Delta v + (j_3 + j_9)\Delta\omega_\alpha)}{(1 + j_9)(j_1 + (j_1 - j_4)\omega_0^2)}$$

Скалярное уравнение (4.3) можно записать в операторном виде

$$(D - \lambda_1) F_2(D) \eta_{1s} = u_s \quad (4.4)$$

где $D = d/dt$ – оператор дифференцирования по времени; λ_1 – положительный корень уравнения (3.1); $F_2(\lambda) = F_s(\lambda)/(\lambda - \lambda_1)$ – полином второй степени, все корни которого находятся в левой полуплоскости комплексного переменного λ . При известном значении λ_1 коэффициенты полинома $F_2(\lambda) = b_{1s} + b_{2s}\lambda + \lambda^2$ определяются следующими соотношениями

$$b_{1s} = a_{1s}/\lambda_1, \quad b_{2s} = a_{3s} + \lambda_1 \quad (4.5)$$

Поэтому, если ввести вектор-строку $K_s = (b_{1s} \ b_{2s} \ 1)$ и новую скалярную переменную

$$\begin{aligned} \zeta &= F_2(D) \eta_{1s} = b_{1s} \eta_{1s} + b_{2s} D \eta_{1s} + D^2 \eta_{1s} = b_{1s} \eta_{1s} + b_{2s} \eta_{2s} + \eta_{3s} = \\ &= K_s \eta_s = K_s S_s^{-1} \xi_s \end{aligned} \quad (4.6)$$

то уравнение (4.4) можно рассматривать как скалярное дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной ζ :

$$(D - \lambda_1) \zeta = u_s \quad (4.7)$$

Согласно (1.15), (2.3) напряжение u_s в (4.7), подаваемое на обмотки роторов электродвигателей, ограничено по абсолютной величине

$$2u_{01} \leq u_s \leq 2u_{02} \quad (u_{01}, u_{02} = \text{const}) \quad (4.8)$$

и область управляемости системы определяется неравенством

$$2u_{01}/\lambda_1 \leq \zeta \leq 2u_{02}/\lambda_1 \quad (4.9)$$

Если возвратиться к исходным переменным, то получится неравенство

$$2u_{01}/\lambda_1 \leq K_s S_s^{-1} \xi_s < 2u_{02}/\lambda_1 \quad (4.10)$$

Таким образом, максимально возможная область притяжения в трехмерном фазовом пространстве $\xi_s = (\Delta\alpha \ \Delta v \ \Delta\omega_\alpha)^T$ есть слой, определяемый неравенством (4.10) и заключенный между двумя параллельными плоскостями.

Если в начальный момент отклонения скоростей от стационарного движения (2.1) равны нулю, т.е. $\Delta v(0) = 0$, $\Delta \omega_\alpha(0) = 0$, то из неравенства (4.10) получается следующее значение для максимально допустимого отклонения маятника от вертикали

$$u_{01} \left| \frac{2(1+j_9)}{\lambda_1(p(1+j_3+2j_9) + \lambda_1(j_3-j_9^2))} \right| < \Delta\alpha(0) < u_{02} \left| \frac{2(1+j_9)}{\lambda_1(p(1+j_3+2j_9) + \lambda_1(j_3-j_9^2))} \right| \quad (4.11)$$

Заметим, что корень λ_1 уравнения (3.1), входящий в (4.11), зависит от угловой скорости ω_0 стационарного движения (2.1) и, следовательно, если при росте ω_0 корень λ_1 тоже возрастает, то величина области притяжения будет уменьшаться. Условие (4.11) позволяет проводить целенаправленный выбор параметров аппарата и системы обратной связи, обеспечивающей максимальную область притяжения стационарного решения (2.1).

В системе (4.7) при $u_s = 0$ координата ζ “неустойчива”. Подавить неустойчивость можно с помощью линейной обратной связи вида

$$u_s = -\gamma\zeta \quad (4.12)$$

где переменная ζ определяется соотношением (4.6), при условии, что постоянный коэффициент усиления γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma > \lambda_1 \quad (4.13)$$

Таким образом, построенная обратная связь (4.12) имеет вид

$$u_s = -\gamma \mathbf{K}_s \mathbf{S}_s^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta v \\ \Delta\omega_\alpha \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Область притяжения V системы (4.7) совпадает со всей областью управляемости Q . Тем самым обратная связь (4.14) (с насыщением) реализует максимально возможную область притяжения и является в этом смысле оптимальной. Однако, так как остальные собственные значения системы (2.7) не изменяются, то переходные процессы могут протекать достаточно долго. Для улучшения качества переходных процессов обратную связь в уравнении (4.3) можно выбрать в виде

$$u_s = (a_{1s} - a_{1s}^*)\eta_{1s} + (a_{2s} - a_{2s}^*)\eta_{2s} + (a_{3s} - a_{3s}^*)\eta_{3s} \quad (4.15)$$

где a_{1s}^* , a_{2s}^* , a_{3s}^* – коэффициенты “желаемого” характеристического уравнения

$$F_s^*(\lambda) = a_{1s}^* + a_{2s}^*\lambda + a_{3s}^*\lambda^2 + \lambda^3 \quad (4.16)$$

В частности, если $a_{1s}^* = \lambda_0^3$, $a_{2s}^* = 3\lambda_0^2$, $a_{3s}^* = 3\lambda_0$, то система (2.7) с обратной связью (4.15) будет иметь трехкратное собственное значение $-\lambda_0$.

Элементы вектор-строки

$$\mathbf{K}_{sa} = \mathbf{k}_{sa} \mathbf{S}_s^{-1} \quad (4.17)$$

где $\mathbf{k}_{sa} = (a_{1s} - \lambda_0^3, a_{2s} - 3\lambda_0^2, a_{3s} - 3\lambda_0)$, определяют постоянные, зависящие от ω_0 коэффициенты обратной связи, обеспечивающей требуемое затухание переходных процессов в

линейной системе. При этом, разумеется, область притяжения неустойчивого стационарного движения уменьшается. Соответствующее управление запишем в виде

$$u_s = \mathbf{K}_{s_d} \begin{pmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta v \\ \Delta \omega_\alpha \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

5. Алгоритмы управления боковым движением. Для выбора закона управления, стабилизирующего боковое движение аппарата в окрестности (2.1), систему (2.8) также приведем к одному скалярному уравнению при помощи замены переменных с постоянной невырожденной матрицей \mathbf{S}_d :

$$\xi_d = \mathbf{S}_d \eta_d, \quad \eta_d = \mathbf{S}_d^{-1} \xi_d \quad (5.1)$$

где новая переменная η_d удовлетворяет уравнению

$$\eta_d' = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{S}_d \eta_d + \mathbf{e}_4 u_d \quad (5.2)$$

$$\mathbf{S}_d = \frac{l}{j_2} \begin{pmatrix} 0 & -v_0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}_{22} \mathbf{S}_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{2d} & -a_{3d} & -a_{4d} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B}_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad \eta_d = (\eta_{1d} \ \eta_{2d} \ \eta_{3d} \ \eta_{4d})^T$$

$$a_{2d} = l^2 p \omega_0^2 / j_2, \quad a_{3d} = \omega_0^2, \quad a_{4d} = l^2 p / j_2$$

Таким образом, скалярное уравнение для переменной $\eta_{1d} = j_2 \Delta \theta / (l \omega_0^2)$ имеет вид

$$\eta_{1d}^{(4)} + a_{4d} \eta_{1d}^{(3)} + a_{3d} \eta_{1d}'' + a_{2d} \eta_{1d}' = u_d \quad (5.3)$$

Аналогично (4.15) обратную связь в уравнении (5.3) можно выбрать в виде

$$u_d = -a_{1d}^* \eta_{1d} + (a_{2d} - a_{2d}^*) \eta_{2d} + (a_{3d} - a_{3d}^*) \eta_{3d} + (a_{4d} - a_{4d}^*) \eta_{4d} \quad (5.4)$$

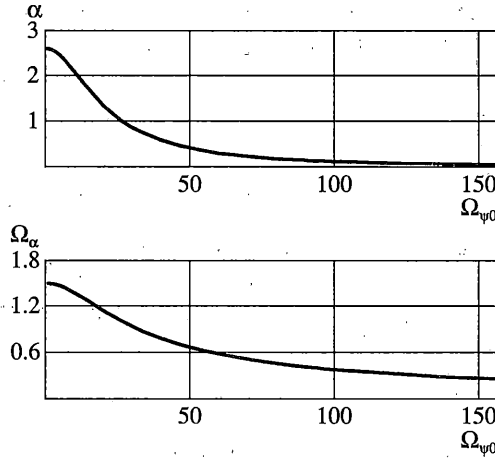
где a_{1s}^* , a_{2s}^* , a_{3s}^* – коэффициенты “желаемого” характеристического уравнения

$$F_d^*(\lambda) = a_{1d}^* + a_{2d}^* \lambda + a_{3d}^* \lambda^2 + a_{4d}^* \lambda^3 + \lambda^4 \quad (5.5)$$

В частности, если $a_{1d}^* = \lambda_0^4$, $a_{2d}^* = 4\lambda_0^3$, $a_{3d}^* = 6\lambda_0^2$, $a_{4d}^* = 4\lambda_0$, то система (2.8) с обратной связью (5.4) будет иметь четырехкратное собственное значение $-\lambda_0$.

Элементы вектор-строки

$$\mathbf{K}_{da} = \mathbf{k}_{da} \mathbf{S}_d^{-1} \quad (5.6)$$



Фиг. 2

где $\mathbf{K}_{da} = (-\lambda_0^4 a_{2d} - 4\lambda_0^3 a_{3d} - 6\lambda_0^2 a_{4d} - 4\lambda_0)$, определяют постоянные коэффициенты обратной связи, обеспечивающей требуемое затухание переходных процессов в линейной системе. Соответствующее управление запишем в виде

$$u_d = \mathbf{K}_{da} \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \\ \Delta\omega_\psi \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

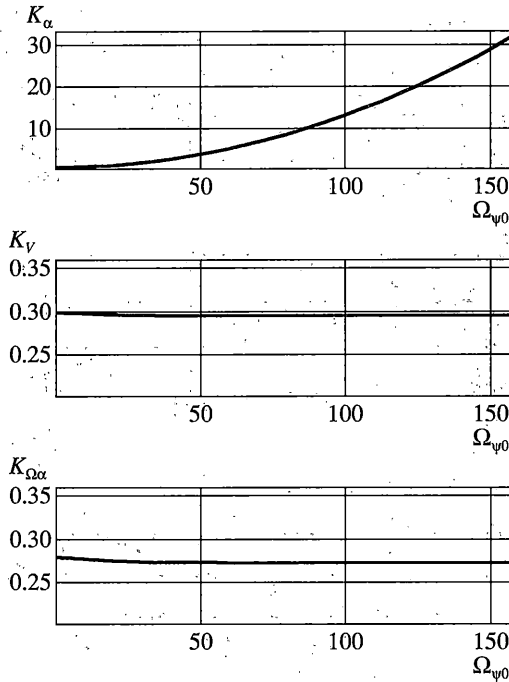
Построенные управления (4.14), (5.7) или (4.18), (5.7) решают задачу стабилизации стационарного движения системы (2.1).

6. Результаты численных экспериментов. Для исследования движения аппарата была написана программа в среде “Mathematica”, в которой автоматизирован вывод уравнений движения (1.13) и нахождение коэффициентов управления (4.14), (4.18), (5.7). Численные эксперименты с полными нелинейными уравнениями (1.13), в которых напряжения на двигателях были заданы в виде кусочно-линейных функций

$$u_R = \begin{cases} -u_0 & \text{при } u_s + u_d \leq -2u_0 \\ (u_s + u_d)/2 & \text{при } -2u_0 \leq u_s + u_d \leq 2u_0 \\ u_0 & \text{при } u_s + u_d \geq 2u_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$u_L = \begin{cases} -u_0 & \text{при } u_s - u_d \leq -2u_0 \\ (u_s - u_d)/2 & \text{при } -2u_0 \leq u_s - u_d \leq 2u_0 \\ u_0 & \text{при } u_s - u_d \geq 2u_0 \end{cases}$$

Для численного исследования были взяты следующие параметры аппарата $m_1 = 0.253$ кг, $m_2 = 0.028$ кг, $m_4 = 0.016$ кг, $r = 0.021$ м, $r_1 = 0.0138$ м, $b = 0.025$ м, $a = 0.03$ м,



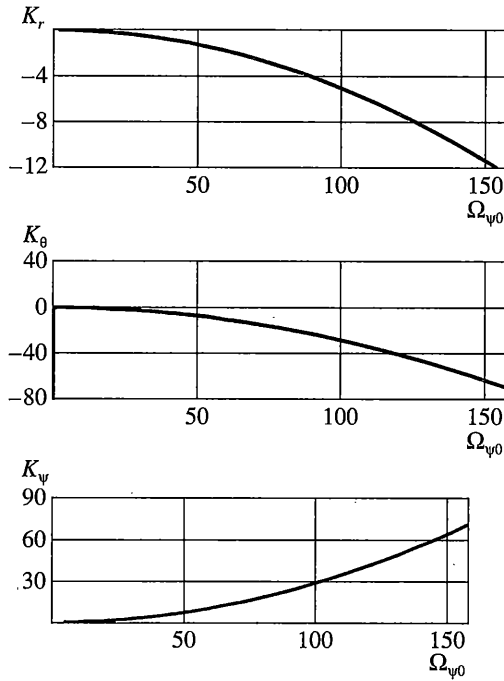
Фиг. 3

$a = 0.025$ м, $\chi = 6.6$, $\rho_{x1} = 0.0239$ м, $\rho_{y1} = 0.0246$ м, $\rho_{z1} = 0.0259$ м, $\rho_{xy} = 0.23 \cdot 10^{-4}$ м², $\rho_{xz} = \rho_{yz} = 0$, $\rho_2 = 0.01$ м, $\rho_{y2} = 0.016$ м, $\rho_4 = 0.0093$ м, $\rho_{y4} = 0.011$ м, $C_U = 0.00353$, $C_V = 0.245 \cdot 10^{-4}$, $g = 9.8$ м/с², $U_{\max} = 7.2$ В.

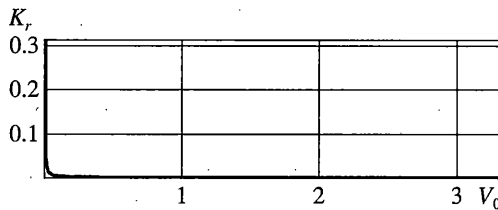
На фиг. 2 для различных значений вертикальной составляющей угловой скорости платформы $\Omega_{\psi 0}$ построены графики координат точек пересечения границ области притяжения установившегося движения (2.1) с осями координат пространства фазовых переменных α, V в диапазоне угловой скорости $\Omega_{\psi 0}$ от нуля до максимального значения, равного 157.6 радиан в секунду. Из этих графиков видно уменьшение области притяжения с ростом $\Omega_{\psi 0}$.

На фиг. 3–6 представлены зависимости коэффициентов обратной связи от угловой скорости платформы $\Omega_{\psi 0}$ и линейной скорости продольного движения V_0 . Графики коэффициентов управления (4.18) построены на фиг. 3–5 при значении λ_0 равном 0.1. Компоненты вектора \mathbf{K}_{sa} из (4.17) на фиг. 3–6 обозначены через $\mathbf{K}_{sa} = (K_\alpha, K_V, K_{\Omega\alpha})$. Компоненты вектора \mathbf{K}_{da} из (5.7) на фиг. 4, 5 обозначены через $\mathbf{K}_{da} = (K_r, K_\theta, K_\psi, K_{\Omega\psi})$. На фиг. 6 представлены зависимости коэффициентов управления (4.14) от угловой скорости платформы $\Omega_{\psi 0}$.

Графики на фиг. 7–16 иллюстрируют характер изменения во времени фазовых переменных, найденных численным интегрированием полных уравнений движения (1.13) при кусочно-линейном управлении (6.1) в окрестности стационарного решения (2.1) с использованием обратной связи (4.18) (левые графики) и (4.14) (правые графики). На фиг. 7–12 построены переходные процессы, возникающие при стабилизации курса и вертикального положения маятника. На фиг. 13 приведены траектории движения центра колесной пары, на фиг. 14 построены напряжения, подаваемые на двигатели. Гра-



Фиг. 4



Фиг. 5

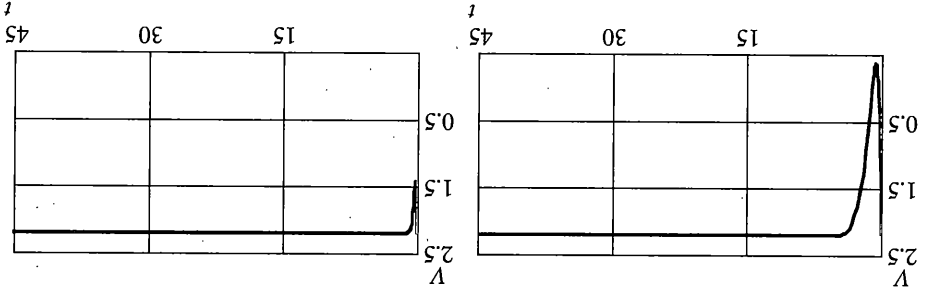
фики вертикальных составляющих реакций между опорной плоскостью и колесами представлены на фиг. 15 и 16. Положительные значения указанных реакций подтверждают справедливость сделанного выше допущения о том, что во все время движения не происходит отрыва колес аппарата от плоскости Oxy .

При моделировании скорость продольного движения и радиус окружности в (2.1) были выбраны соответственно 1 м/с и 0.5 м. Начальные условия для обоих алгоритмов управления (приведены к размерным величинам) задавались одинаковыми:

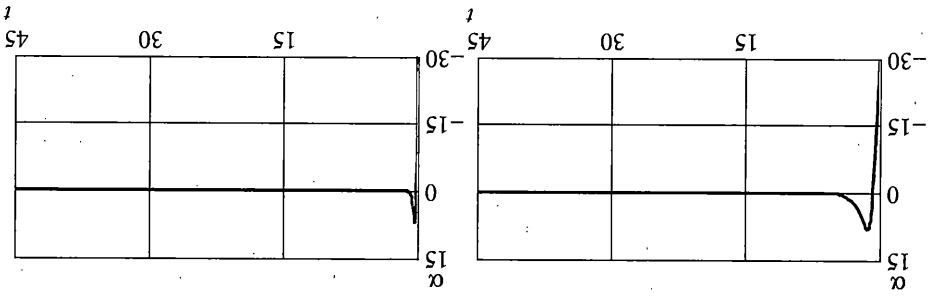
$$\begin{aligned} R(0) &= 0.485 \text{ м}, & \theta(0) &= 0.002 \text{ рад}, & \psi(0) &= 1.57 \text{ рад} \\ \alpha(0) &= -30^\circ, & V(0) &= 1 \text{ м/с}, & \Omega_\psi(0) &= 2 \text{ рад/с}, & \Omega_\alpha(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Время моделирования – 45 секунд.

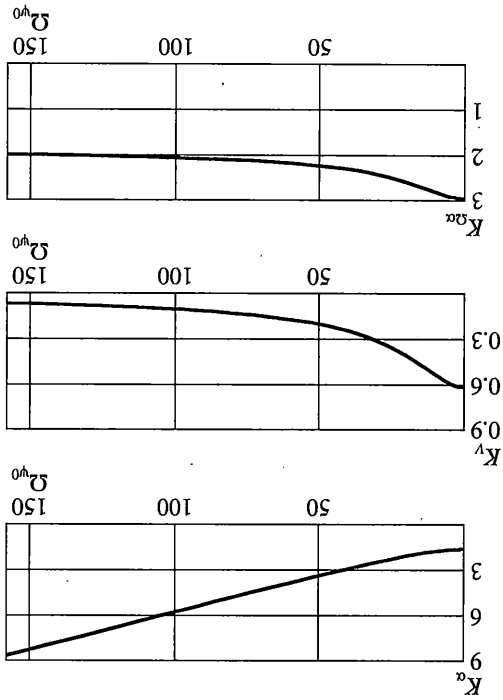
Фиг. 8

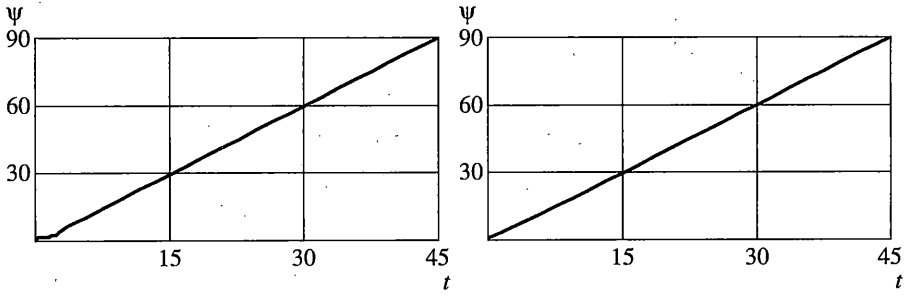


Фиг. 7

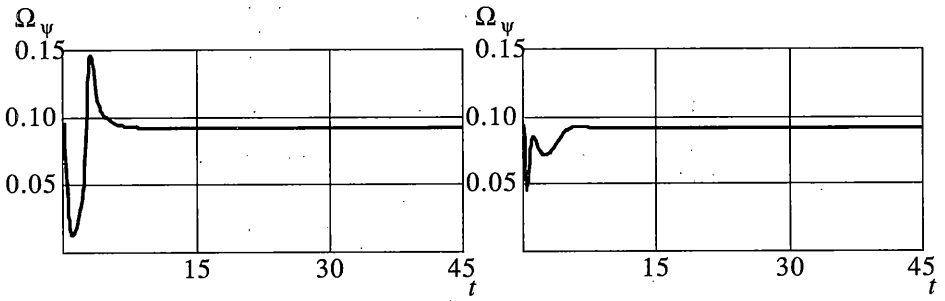


Фиг. 6

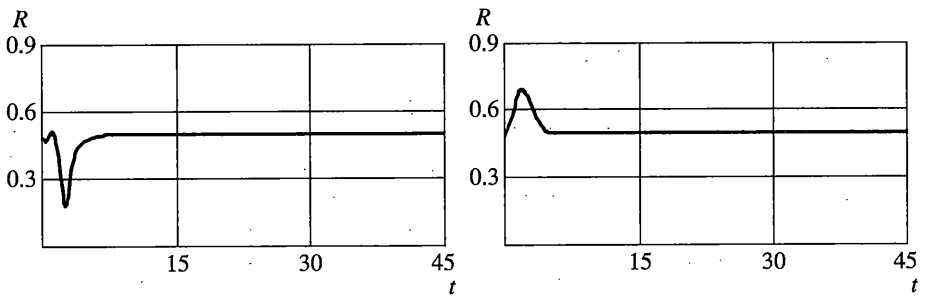




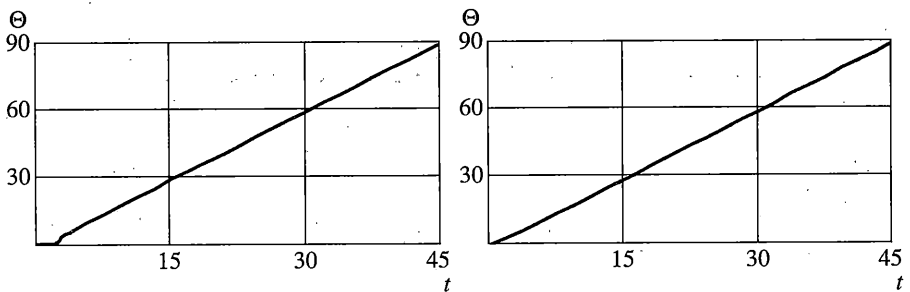
Фиг. 9



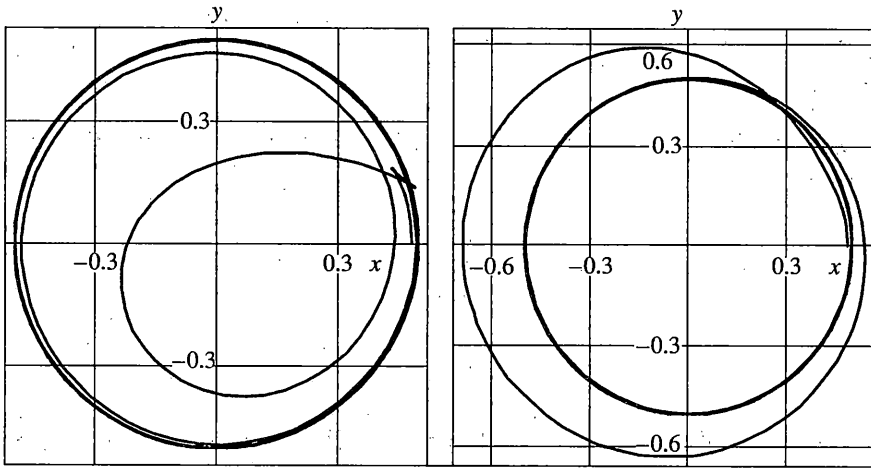
Фиг. 10



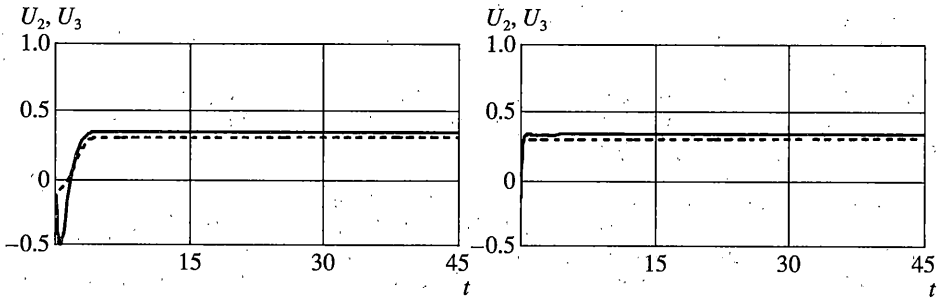
Фиг. 11



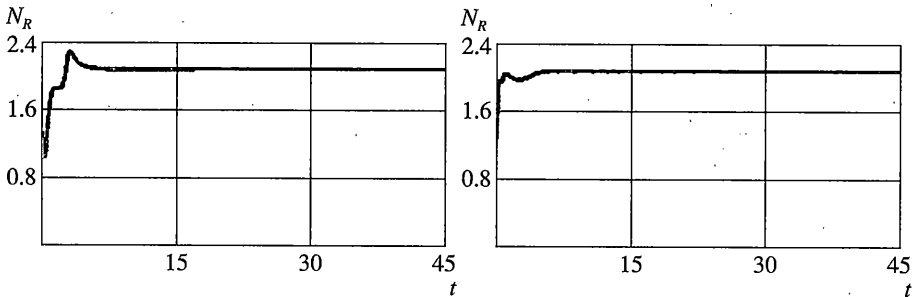
Фиг. 12



Фиг. 13

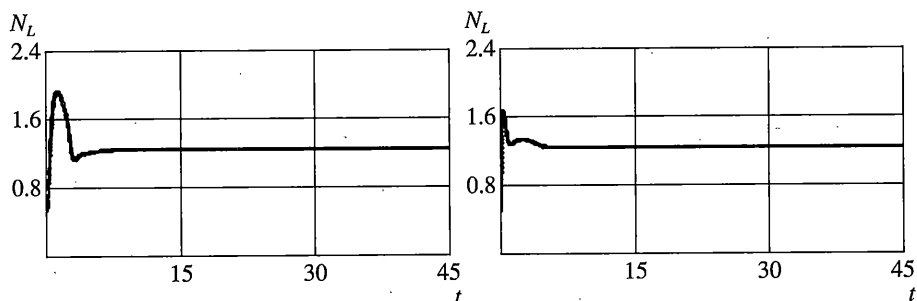


Фиг. 14



Фиг. 15

Проведенный выше анализ показал существенную зависимость колебаний маятника и движения центра колесной пары. Предложенные алгоритмы решают задачу стабилизации аппарата в окрестности (2.1).



Фиг. 16

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00517).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grasser F., D'Arrigo A., Colombi S., Rufer A.C. JOE: A mobile, inverted pendulum // IEEE Trans. Industrial Electronics. 2002. V. 49. № 1. P. 107–114.
2. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
3. Pathak K., Franch J., Agrawal S.K. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization // IEEE Trans. Robotics. 2005. V. 21. № 3. P. 505–513.
4. <http://leiwwww.epfl.ch/joe/joerelatives.html>
5. <http://www.segway.com>
6. Nguyen H.G., Kogut G., Barua R., Burmeister A., Pezeshkian N., Powell D., Farrington N., Wimmer M., Cicchetto B., Heng C., Ramirez V. A segway RMP-based robotic transport system // SPIE Proc. 5609: Mobile Robots XVII, Philadelphia, PA, 2004.
7. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in Mathematical System Theory. New York etc.: Mc Graw-Hill, 1969 = Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.08.2006