МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2006

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. М. ДЕЛЬФУР

ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В ранее опубликованных работах было развито полностью внутреннее дифференциальное исчисление на подмногообразиях из $C^{1,1}$ коразмерности 1 в $\mathbb{R}^N$, основанное на объединении тангенциальных производных и ориентированного расстояния. Возможности такого подхода были проиллюстрированы на примерах исследования ряда линейных моделей тонких оболочек с помощью конечных разложений по нормальной к срединной поверхности переменной. В данной статье исследуется асимптотическое поведение трех моделей при произвольном определяющем соотношении. При заданной срединной поверхности с липшицевой границей из $C^{1,1}$-подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$ показывается, что решения внутренних линейных моделей $P(1, 1)$, $P(2_n, 1)$, $P(2, 1)$ тонкой оболочки сходятся к решениям асимптотических моделей оболочки, определяемых системой двух связанных вариационных уравнений. Первое представляет собой асимптотическую $P(1, 0)$-модель и приводит к общепринятому классическому уравнению безмоментной оболочки и к членам Лява–Кирхгоффа. Второе – обобщенное уравнение изгиба. В случае преобладающих изгибных деформаций и при специальном определяющем соотношении, содержащем два коэффициента Ляме, квадратичный член второго уравнения асимптотических моделей $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$ является классическим уравнением изгиба. Отметим, что модель Нагди является приближением редуцированной $P(2, 1)$-модели, а модель Койтера является проекцией модели Нагди. Дается подробный анализ всех трех асимптотических моделей: существование решений и их пространства, декомпозиция уравнений и построение соответствующих эффективных определяющих соотношений. Исследуется сильная/слабая сходимость в естественных пространствах и нормах при некотором допущении относительно асимптотики константы непрерывности в правой части для случаев оболочек, не имеющих границы, а также оболочек с однородными граничными условиями второго рода (фактор-пространство) либо однородными граничными условиями первого рода на части границы.

1. Внутренняя дифференциальная геометрия и ориентированное расстояние. Ориентированное расстояние (т.е. расстояние, имеющее знак) позволяет использовать описание множеств уровня для произвольного множества в евклидовом пространстве. При этом нулевой уровень соответствует границе этого множества. В гладком случае граница является гладким подмногообразием коразмерности 1, а соответствующие внутренние геометрические объекты получаются из производных ориентированного расстояния в малой окрестности границы. В частности градиент ориентированного расстояния совпадает с направлением нормали, а собственные значения ее гессиана – главные кривизны границы плюс ноль (см., например, [47, 31]). Термин ориентированное подчеркивает тот факт, что ориентированное расстояние задает ориентацию нормали к границе. Кроме того, проекцию точки на подмногообразие можно явным образом выразить через градиент квадрата расстояния. Эти вопросы исследовались с различными целями и в различных контекстах (см., например, замечательную работу Г. Федерера [45], опубликованную в 1959 г., где обобщена формула Штейнера–Минковского на случай множеств с положительной достижимостью). Помимо этого были систематически исследованы расстояние и ориентированное расстояние и определены топологии на классах эквивалентности множеств для описания компактных семейств классов эквивалентности и непрерывности функционалов формы (см. [31, 36]). В негладком случае естественно рассматривать множества, для которых матрица вторых производных является матрицей ограниченных мер.

Важной составляющей теории тонких оболочек является дифференциальное исчисление на срединной поверхности. Оно осуществляется с помощью параметризации подмногообразия локальными отображениями и введения ковариантных/контравариантных координат и производных, а также символов Кристоффеля. Можно обойтись и без локальных отображений, если перейти к более абстрактному, но фундаментальному понятию тангенциальных производных, которые определяются посредством продолжения функций (или вектор-функций), заданных на подмногообразии, в малую окрестность этого подмногообразия. Касательный градиент определяется ортогональным проектированием градиента продолженной функции на касательную к подмногообразию плоскость (см., например, [35, 39, 33]). Такое проектирование не зависит от выбора продолжения. Касательный градиент является внутренним объектом и не зависит от выбора локальных базисов в рассматриваемом подмногообразии и окружающем его евклидовом пространстве. Это понятие является фундаментальным, однако соответствующий математический аппарат может оказаться довольно громоздким и требующим высокой квалификации. Главная идея, которая сделала аппарат тангенциального исчисления работоспособным, состоит в том, что среди всех продолжений следует выбирать каноническое, которое получается композицией с проектированием на подмногообразие ([35, 39, 33]). Все вычисления производятся в окружающем рассматриваемое подмногообразие евклидовом пространстве, а конечное выражение получается наложением некоторого ограничения на подмногообразие. При таком подходе дифференциальное исчисление на подмногообразии оказывается столь же простым, как и в соответствующем евклидовом пространстве. В конечные выражения эффект искривленности подмногообразия попадает естественным образом через производные проекции, а следовательно производные соответствующего ориентированного расстояния.

2. Обзор статьи. В рамках указанного подхода в работах [32, 33, 34] были рассмотрены простейшие модели тонких оболочек, причем особого внимания их асимптотикам не уделялось и четких связей с другими известными моделями не выявлялось. В работах [35, 39] были установлены прямые связи между ковариантно-контравариантным исчислением и рассматриваемыми внутренними производными. Во многих случаях были объединены основные элементы функционального анализа с классическими неравенствами и тождествами (Корн, Пуанкаре и т.д.) и получены новые доказательства в терминах внутренней геометрии. Конечно же, такой подход со всеми вспомогательными инструментами можно приложить к любым типам (внутренним или смешанным) тонкооболочечных приближений, а классические модели можно переформулировать в естественных обозначениях. Например, смешанные аппроксимации для пластин в [3] можно легко обобщить на случай оболочек.

В настоящей работе оболочка рассматривается как область толщины $2h$ со срединной поверхностью ω, имеющей липшицеву границу γ из подмногообразия $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, которая принадлежит классу $C^{1,1}$. Это основное предположение будет использоваться на протяжении всей статьи в тонкооболочечной и асимптотических моделях оболочек.

Рассматриваемый внутренний подход позволяет обобщить классические результаты для подмногообразий из $C^{2,1}$ или C^3 на случай $C^{1,1}$. Ранее автором рассматривались линейные модели $P(k, l)$ [34, 35, 39]. Запись $P(k, l)$ означает, что для вектора перемещений рассматривается полиномиальное приближение степени k по переменной z, отсчитываемой по нормали к Г, а для результирующего тензора линейных деформаций используется полиномиальное приближение степени l. Такие модели получаются из бесконечных разложений для вектора перемещений и тензора линейных деформаций. Промежуточная модель $P(k_n, l)$ означает полиномиальное приближение степени k для нормальной составляющей вектора перемещений и степени $k - 1$ для его тангенциальной составляющей.

Данные лекционные заметки содержат оригинальные результаты и построения и публикуются впервые. Эти заметки имеют две основные цели. Во-первых, они обобщают и консолидируют результаты, опубликованные в [40, 41], по сходимости решений внутренних линейных моделей $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$ к асимптотическим моделям оболочки, состоящим из двух связанных вариационных уравнений. Во-вторых, предлагается модель $P(2, 1)$ и исследуется ее сходимость к соответствующей асимптотической модели. Модель $P(2, 1)$ – не просто улучшенная версия первых двух моделей, у нее совершенно иная математическая структура, и есть веские основания полагать, что она является наиболее адекватной из этих трех моделей. Например, при очень малой толщине оболочки последняя модель совпадает с моделью Нагди[1] и к тому же оставляет неизменным пространство решений. При этом соответствующая асимптотическая модель приводит как к общепринятому уравнению безмоментной оболочки, так и к уравнению преобладающего изгиба[2] оболочки с правильными коэффициентами. Для липшицевой области на срединной поверхности из класса $C^{1,1}$ справедлива также модель Койтера. Однако она не вытекает непосредственно из модели Нагди, а получается проектированием решения уравнения Нагди на подпространство решения, удовлетворяющее условию Лява–Кирхгоффа.

Все три модели будут рассматриваться параллельно, будут обсуждаться и сравниваться их математические структуры, а также соответствующие им асимптотические модели, описываемые системой двух связанных вариационных уравнений. Первое уравнение – асимптотика модели $P(1, 0)$. Оно одно и то же для всех трех моделей. Из него вытекают общепринятое уравнение безмоментной оболочки и члены Лява–Кирхгоффа. Вопросы сходимости для обобщенной мембранной энергии[3] в органически связанных фактор-пространствах были изучены в [40]. Насколько известно авторам, второе уравнение является новым для оболочек. Оно обобщает результаты, полученные в специальных случаях, таких как случай преобладающего изгиба, в котором обобщенная мембранная энергия полагается нулевой для пластин. Оно содержит новый член, зависящий от первого уравнения, который пропорционален средней кривизне и мембранной энергии. Это слагаемое обращается в нуль в изгибном случае и в случае пластины. Кроме того, в правую часть второго уравнения явно входят в качестве сомножителей средняя и гауссова кривизны. Дается полный анализ всех трех асимптотических моделей для случая, когда определяющее соотношение и правая часть заданы в общем виде: указываются пространства решения, доказываются теоремы существования, производится расщепление уравнений на систему мембранного и изгибного уравнений, выполняется построение соответствующих эффективных

[1] В соответствии с терминологией [4].

[2] Термин “уравнения доминирующего изгиба” (bending dominated equations) здесь и далее означает уравнения с асимптотически главными членами, соответствующими изгибу.

[3] Термины “мембранная теория” и “мембранная энергия” здесь и далее означают безмоментную теорию оболочек и энергию, подсчитанную в рамках этой теории.

определяющих соотношений. Далее уравнение мембранной оболочки расщепляется с помощью второй фундаментальной формы. Насколько известно авторам, такое разложение является новым, однако оно неявно присутствовало, например, в одном из доказательств в [23, 24].

В случае изгиба для специального определяющего соотношения, зависящего от двух коэффициентов Ляме, второе уравнение асимптотических моделей $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$ приводит к уравнению [21, 22, 19], которое получается в результате асимптотического анализа трехмерной задачи. В модели $P(1, 1)$ второе уравнение аналогично, а отличие заключается только в одном из коэффициентов при квадратичных членах.

Доказываются сильная сходимость для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$ и слабая сходимость для модели $P(2, 1)$ во внутренних пространствах и нормах, соответствующих асимптотическим моделям, при некотором допущении относительно асимптотики константы непрерывности в правой части N-мерного уравнения линейной теории упругости (в практических случаях $N = 3$) при стремлении толщины оболочки h к нулю. При этом не делается никаких априорных допущений о тензоре напряжений и самой оболочке. По существу получаются явные выражения для нормальных напряжений через векторы усилий. Эти выражения показывают, что случаи нулевых нормальных напряжений и плоских нормальных напряжений являются следствием простых допущений об усилиях, а не о самой оболочке. Сходимость имеет место для оболочек, не имеющих границы, а также оболочек с липшицевой границей γ при однородных граничных условиях второго рода (фактор-пространство относительно перемещений тела как жесткого целого) либо однородном граничном условии первого рода на части γ_0 границы γ. При выводе результатов не используются замены переменных для нормализации толщины оболочки и приемы Г-сходимости. Однако очевидно, что конечные математические результаты должны быть точно такими же, как и при другом выборе математического аппарата.

Вопросы сходимости решений моделей $P(1, 1)$, $P(2_n, 1)$, $P(2, 1)$ к решениям асимптотической модели являются сложным моментом в исследовании сходимости решений N-мерной модели к решениям асимптотической модели оболочки (см., например, [23, 15, 16, 19, 21, 22]). Другой проблемой является интерполяция результатов. Вопросы исследования пластин хорошо изложены в работе [53] (1959 г.), а также в [43, 13, 3]. В своей работе [42] (1980 г.) Ph. Destuynder установил, что сходимость решения трехмерной задачи к решению асимптотической задачи имеет порядок $h^{1/2}$. Такая же скорость сходимости была получена для смешанных постановок типа Хеллинджера–Рейснера в [3]. Несколько более высокая скорость сходимости получена в [9] (стр. 80–86). В работе [52] (1996 г.) указана скорость сходимости порядка $h^{1/6}$ для оболочек с однородными граничными условиями первого рода на всей боковой поверхности $\Sigma_h(\omega)$, где срединная поверхность $\omega \subset \Gamma$ является равномерно эллиптической с границей $\gamma \in C^5$ из подмногообразия $\Gamma \in C^3$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.

О методе Г-сходимости можно узнать из пионерской работы Acerbi и др. [1] по упругой струне. Строгое математическое обоснование Г-сходимости приводится в работах [48, 49] для асимптотической нелинейной мембранной модели, где авторы успешно рассматривают цилиндр и произвольную срединную поверхность в качестве начальной конфигурации и обосновывают первую из нелинейных мембранных моделей, предложенную впервые, по-видимому, в статье [46]. Об применении Г-сходимости и асимптотического анализа тонких линейных пластин см. в [8].

3. Обозначения и вводный материал. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ и двойное скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ матриц и тензоров размерности $N \times N$ определяются формулами

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \quad A \cdot\cdot B = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} B_{ij}$$

Запись$^*A$ обозначает транспонированную матрицу A. Пусть задана область $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \varnothing$, и ее граница $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega \neq \varnothing$. Тогда расстояние и ориентированное расстояние определяются соответственно формулами

$$d_\Omega(x) \overset{\text{def}}{=} \inf_{y \in \Omega} |y - x|, \quad b_\Omega(x) = d_\Omega(x) - d_{\mathbb{R}^N - \Omega}(x)$$

Если Ω – область из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$, то $b = b_\Omega$ также принадлежит классу $C^{1,1}$ в окрестности любой точки границы Γ. Справедливо и обратное. Градиент ∇b совпадает с внешней единичной нормалью n к границе на Γ. Проекция p на Γ и ортогональная проекция P на касательную плоскость $T_x\Gamma$ задаются соотношениями

$$p(x) \overset{\text{def}}{=} x - b(x)\nabla b(x), \quad P(x) \overset{\text{def}}{=} I - \nabla b(x)^*\nabla b(x)$$

где $^*V$ обозначает вектор-строку – транспонированный вектор-столбец $V \in \mathbb{R}^N$. Для заданного $h > 0$ и открытой области $\omega \subset \Gamma$ оболочка представляет собой открытую область $S_h(\omega) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h, p(x) \in \omega\}$ в $\mathbb{R}^N$. Если $\omega = \Gamma$, то оболочка не имеет границы; в противном случае обозначим через γ (относительную) границу области ω из Γ, а через

$$\Sigma_h(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h, p(x) \in \gamma\}$$

ее боковую поверхность. При $b \in C^{1,1}(\overline{S_h(\omega)})^4$, $|z| < h$, $X \in \omega$, введем определения

$$T_z(X) \overset{\text{def}}{=} X + z\nabla b(X), \quad j_z \overset{\text{def}}{=} \det DT_z(X) = \det[I + zD^2 b(X)] = \sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i(X) z^i$$

где κ_i – коэффициенты полинома j_z степени $N - 1$ по z. При $n \geq 0$ определим также следующие функции переменной $X \in \omega$ и их средние:

$$\alpha_n(h) \overset{\text{def}}{=} \int_{-h}^{h} j_z z^n dz = \sum_{j=n}^{n+N-1} [1 - (-1)^{j+1}] \frac{h^{j+1}}{j+1} \kappa_{j-n}$$
$$\bar{\alpha}_n(h) \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha_n(h)}{2h} \tag{3.1}$$

Функции $\alpha_n(h)$ являются полиномами нечетных степеней по h. При $h \to 0$ имеем

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h) - 1}{h^2} \to \frac{1}{3}\kappa_2, \quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} \to \frac{1}{3}\kappa_1, \quad \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^4} \to \frac{1}{5}\kappa_1$$

При $N = 3$ величина $\kappa_1 = \Delta b$ есть удвоенная средняя кривизна, а κ_2 – гауссова кривизна. Пусть $v : \omega \to \mathbb{R}^N$ – векторная функция. Обозначим через $v_n = v \cdot n$ ее нормальную составляющую, а через $v_\Gamma = Pv$ – ее тангенциальную составляющую вдоль Γ. Аналогично будет удобно ввести обозначения для разложения матричной или тензорной функции τ (для матриц или тензоров размерности $N \times N$), определенной на ω, на касательную и нормальную к Γ составляющие

---

[4] При заданном натуральном $k \geq 1$ и заданном ограниченном открытом подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $C^{k,1}(\bar{\Omega})$ пространство вещественных функций f, определенных на Ω, такое, что функция f и все ее производные до порядка k включительно являются ограниченными равномерно непрерывными по Липшицу функциями в Ω.

$$\tau^P \overset{\text{def}}{=} P\tau P, \quad \tau_{nn} \overset{\text{def}}{=} \tau n \cdot n, \quad \tau^n \overset{\text{def}}{=} \tau - \tau_{nn} n^* n$$

$$\tau = \tau^P + (P\tau n)^* n + n^*(P\tau n) + \tau_{nn} n^* n = \tau^n + \tau_{nn} n^* n$$

а также обозначения для пространств симметрических матриц

$$\mathrm{Sym}_N \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) : {}^*\tau = \tau\}, \quad \mathrm{Sym}_N^n \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in \mathrm{Sym}_N : \tau_{nn} = 0\}$$

$$\mathrm{Sym}_N^P \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in \mathrm{Sym}_N : \tau n = 0\} \Rightarrow \forall \tau \in \mathrm{Sym}_N, \quad \tau^P \in \mathrm{Sym}_N^P, \quad \tau^n \in \mathrm{Sym}_N^n$$

Подробнее о тангенциальном исчислении и необходимых материалах по функциональному анализу можно узнать в [35, 39].

4. Модели $P(1, 1)$, $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$. Сначала будет рассмотрена оболочка, не имеющая границы, или ограниченная оболочка с однородными граничными условиями второго рода. Далее в разд. 4.5 будут приведены итоговые результаты для оболочки с однородными граничными условиями первого рода на части γ_0 границы γ. Все построения, доказательства и результаты во втором случае будут совершенно идентичны первому случаю с очевидными изменениями.

Допущение 4.1. Определяющее соотношение – линейное взаимно однозначное отображение $C : \mathrm{Sym}_N \to \mathrm{Sym}_N$, для которого существует такая константа $\alpha > 0$, что $C^{-1}\tau \cdot\cdot\, \tau \geq \alpha\tau \cdot\cdot\, \tau$ при всех $\tau \in \mathrm{Sym}_N$.

Например, для коэффициентов Ляме $\mu > 0$ и $\lambda \geq 0$ специальное определяющее соотношение $C^{-1}\tau = 2\mu\tau + \lambda \operatorname{tr}\tau I$ удовлетворяет допущению 4.1 при $\alpha = 2\mu$.

Если задано такое отображение C, то N-мерное вариационное уравнение линейной теории упругости

$$\exists V(h) \in H^1(S_h(\omega))^N \text{ такая что } \forall V \in H^1(S_h(\omega))^N$$

$$\int\limits_{S_h(\omega)} C^{-1}\varepsilon(V(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon(V) - F \cdot V - G \cdot DV\nabla b dx = 0 \tag{4.1}$$

имеет смысл как вариационное уравнение в $H^1(S_h(\omega))^N/\ker\varepsilon$ для вектор-функций F и G из $L^2(S_h(\omega))^N$, таких что выполняется условие

$$\forall V \in \ker\varepsilon, \quad \int\limits_{S_h(\omega)} F \cdot V + G \cdot DV\nabla b dx = 0, \quad \varepsilon(V) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(DV + {}^*DV) \tag{4.2}$$

Из этого условия следует существование константы $c(h) = c(S_h(\omega)) > 0$, такой что

$$\forall V \in H^1(S_h(\omega))^N, \quad \left| \int\limits_{S_h(\omega)} F \cdot V + G \cdot DV\nabla b dx \right| \leq c(h) \|\varepsilon(V)\|_{L^2(S_h(\omega))} \tag{4.3}$$

4.1. Уравнение линейной теории упругости в локальных координатах. Вариационное уравнение всегда можно выразить через соответствующие локальные координаты в малой ортогональной окрестности области ω реперного подмногообразия из $C^{1,1}$. Для симметричных оболочек в качестве реперного подмногообразия обычно берется срединная поверхность. Сначала введем преобразование между глобальными и локальными координатами, а также опишем пространства Соболева и результат аппроксимации в локальных координатах. Анализ для постоянной толщины легко обобщается на случай переменной толщины h.

Теорема 4.1 Пусть Γ – граница некоторой области класса $C^{1,1}$ из $\mathbb{R}^N$, а ω – ограниченная открытая область с липшицевой границей $\gamma \subset \Gamma$.

1. Отображение[5]

$$T : \overline{\omega} \times [-h, h] \to \overline{S_h(\omega)}, \quad T(X, z) = X + z\nabla b(X)$$

и обратное к нему $T^{-1}(x) = (p(x), b(x))$ являются липшицевыми.

2. Отображение

$$F \mapsto f = F \circ T : H_n^1(S_h(\omega))^N \to H^1(-h, h; L^2(\omega)^N) \tag{4.4}$$

является непрерывным линейным взаимно однозначным соответствием для пространства

$$H_n^1(S_h(\omega))^N \overset{\text{def}}{=} \{F \in L^2(S_h(\omega))^N : DF\nabla b \in L^2(S_h(\omega))^N\} \tag{4.5}$$

3. Отображение[6]

$$F \mapsto f = F \circ T : H^1(S_h(\omega))^N \to H^1(-h, h; L^2(\omega)^N) \cap L^2(-h, h; H^1(\omega)^N)$$

является непрерывным линейным взаимно однозначным соответствием. При этом

$$(DF\nabla b) \circ T = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (DFP) \circ T = D_\Gamma f[I + zD^2 b]^{-1} \tag{4.6}$$

$$DF \circ T = \frac{\partial f}{\partial z} * n + D_\Gamma f[I + zD^2 b]^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} * n + D_\Gamma f\right][I + zD^2 b]^{-1} \tag{4.7}$$

По существу

$$H^1(\omega \times]-h, h[)^N = H^1(-h, h; L^2(\omega)^N) \cap L^2(-h, h; H^1(\omega)^N) \tag{4.8}$$

4. При заданных $F \in H_n^1(S_h(\omega))^N$ и $f = F \circ T$ отображение

$$F \mapsto f(\cdot, 0) : H_n^1(S_h(\omega))^N \to L^2(\omega)^N \tag{4.9}$$

является вполне определенным, линейным и непрерывным, и существует константа c, не зависящая от h, такая что при $h \to 0$ справедливы неравенства

$$\|f - f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)} \le ch\|DF\nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))} \tag{4.10}$$

$$\|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega)} \le \frac{c}{h^{1/2}}[\|F\|_{L^2(S_h(\omega))} + h\|DF\nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}] \tag{4.11}$$

---

[5] По существу отображение T задает систему криволинейных координат в окрестности ω, ориентированных вдоль Γ и по нормали $n(x)$ к Γ в каждой точке x области ω.

[6] Пространство Соболева $H^1(\omega)$ можно определить полностью внутренним образом с помощью проекции p на $C^{1,1}$-подмногообразие Γ, выраженной через функцию b, как в [30].

и при всех $V \in H_n^1(S_h(\omega))^N$ и $v = V \circ T$:

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)} F \cdot V dx - \int\limits_{\omega} f(\cdot,0)\cdot v(\cdot,0) d\Gamma\right| \leq$$
$$\leq c\|F\|_{H_n^1(S_h(\omega))}[\|V\|_{L^2(S_h(\omega))} + \|DV\nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}] \tag{4.12}$$

5. Для заданных F и G из $H_n^1(S_h(\omega))^N$, $f = F \circ T$, $g = G \circ T$ и при всех $V \in H_n^1(S_h(\omega))^N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)} F \cdot V + G \cdot DV\nabla b - f(\cdot,0)\circ p \cdot V - g(\cdot,0)\circ p \cdot DV\nabla b dx\right| \leq$$
$$\leq c[\|F\|_{H_n^1(S_h(\omega))}\|V\|_{L^2(S_h(\omega))} + \|G\|_{H_n^1(S_h(\omega))}\|DV\nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}] \tag{4.13}$$

Доказательство.

1. Смотри [35, 39].

2. При $F \in C^1(S_h(\omega))^N$ имеем

$$f(X,z) \stackrel{\text{def}}{=} F(X + z\nabla b(X)) = F \circ T(X,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(X,z) = DF(X + z\nabla b(X))\nabla b(X) = [(DF\nabla b)\circ T](X,z)$$

поскольку $\nabla b = \nabla b \circ T$. При $f \in C^1(-h, h \times \omega)^N$ и $F(x) = f(p(x), b(x))$:

$$DF = D_\Gamma f \circ T^{-1}P + \frac{\partial v}{\partial z}\circ T^{-1} * \nabla b \Rightarrow DF\nabla b = \frac{\partial f}{\partial z}\circ T^{-1}$$

В силу непрерывности и плотности то же самое распространяется и на непрерывное взаимно однозначное линейное отображение (4.4).

3. Из п. 2 следует

$$\frac{\partial f}{\partial z}(X,z) = (DV\nabla b)\circ T(X,z)$$

По определению, вспоминая, что $P = P \circ T$, имеем

$$D_\Gamma f(X,z) = D\{F(p + z\nabla b \circ p)\}|_\omega$$

$$\partial_j\{F_i(p + z\nabla b \circ p)\} = \partial_j\{F_i(p + z\nabla b)\} = \partial_l F_i(p + z\nabla b)[\partial_j p_l + z\partial^2_{lj} b] =$$
$$= \{DF\}_{il}(p + z\nabla b)[Dp_{lj} + z\{D^2 b\}_{lj}]$$

$$D\{F(p + z\nabla b \circ p)\}_{ij} = \{DF\}_{il}(p + z\nabla b)[Dp + zD^2 b]_{lj}$$

$$D_\Gamma f = DF \circ T[P + zD^2 b] = (DFP)\circ T[I + zD^2 b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}\circ T^{-1} = DF\nabla b, \quad (D_\Gamma f[I + zD^2 b]^{-1})\circ T^{-1} = DFP$$

и из последних двух условий следует, что $DF \in L^2(S_h(\omega))^{N\times N}$.

4. Из п. 2 при $F \in H_n^1(S_h(\omega))^N$ имеем $f = F \circ T \in H^1(-h, h; L^2(\omega)^N)$, и тогда $f(\cdot, 0)$ имеет смысл элемента из $L^2(\omega)^N$. Следовательно, можно оценить норму

$$\int_\omega \int_{-h}^{h} |f(X, z) - f(X, 0)|^2 dz d\Gamma = \int_\omega \int_{-h}^{h} \left| \int_0^z \frac{\partial f}{\partial \zeta}(X, \zeta) d\zeta \right|^2 dz d\Gamma \le$$

$$\le \int_\omega \int_{-h}^{h} \left| (2h)^{1/2} \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(X, \cdot) \right\|_{L^2(-h, h)} \right|^2 dz d\Gamma = H_{N-1}(\omega)(2h)^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)}$$

что доказывает неравенство (4.10) (H_{N-1} – $(N-1)$-мера Хаусдорфа). В частности

$$\|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)} \le \|f\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)} + \|f - f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)}$$

откуда следует неравенство (4.11), если использовать тот факт, что

$$\|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega \times]-h, h[)} = (2h)^{1/2} \|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega)}$$

Таким образом, из п. 2 получаем неравенства (4.10) и (4.11). Переходя к локальным координатам, имеем

$$\int_{S_h(\omega)} F \cdot V dx - 2h \int_\omega f(\cdot, 0) \cdot \upsilon(\cdot, 0) d\Gamma =$$

$$= \int_\omega \int_{-h}^{h} (j_z - 1) f(\cdot, 0) \cdot \upsilon(\cdot, 0) + j_z \{[f - f(\cdot, 0)] \cdot \upsilon + f(\cdot, 0) \cdot [\upsilon - \upsilon(\cdot, 0)]\} dz d\Gamma$$

Получаем следующую оценку при $h \to 0$:

$$\left| \int_\omega \int_{-h}^{h} j_z f \cdot \upsilon - f(\cdot, 0) \cdot \upsilon(\cdot, 0) dz d\Gamma \right| \le \int_\omega (\alpha_0(h) - 2h) |f(\cdot, 0)| |\upsilon(\cdot, 0)| d\Gamma +$$

$$+ 2 \int_\omega \int_{-h}^{h} |f - f(\cdot, 0)| |\upsilon| + |f(\cdot, 0)| |\upsilon - \upsilon(\cdot, 0)| dz d\Gamma \le c h^3 \|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega)} \|\upsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega)} +$$

$$+ 2\{\|f - f(\cdot, 0)\|_{L^2} \|\upsilon\|_{L^2} + \|f(\cdot, 0)\|_{L^2} \|\upsilon - \upsilon(\cdot, 0)\|_{L^2}\} \le$$

$$\le c h^2 \{\|F\|_{L^2(S_h(\omega))} + h \|DF \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}\} \{\|V\|_{L^2(S_h(\omega))} + h \|DV \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}\} +$$

$$+ 2ch \|DF \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))} \|V\|_{L^2(S_h(\omega))} + 2c \{\|F\|_{L^2(S_h(\omega))} + h \|DF \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}\} ch \|DV \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))} \le$$

$$\le c' h \|F\|_{H_n^1(S_h(\omega))} \{\|V\|_{L^2(S_h(\omega))} + \|DV \nabla b\|_{L^2(S_h(\omega))}\}$$

Отсюда следует неравенство (4.12).

5. Утверждение п. 5 с очевидностью вытекает из п. 4.

С помощью декомпозиции Федерера меры Лебега по множествам уровня функции b уравнение (4.1) можно преобразовать к виду

$$\exists \upsilon(h) \in H^1(-h, h; L^2(\omega)^N) \cap L^2(-h, h; H^1(\omega)^N)$$

такая что $\forall \upsilon \in H^1(-h, h; L^2(\omega)^N) \cap L^2(-h, h; H^1(\omega)^N)$

$$\int_\omega d\Gamma \int_{-h}^{h} dz j_z C^{-1} \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial v(h)}{\partial z}{*n} + D_\Gamma v(h)\right][I + zD^2 b]^{-1} + \right.$$

$$+ [I + zD^2 b]^{-1*}\left[\frac{\partial v(h)}{\partial z}{*n} + D_\Gamma v(h)\right]\right\} \cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial v}{\partial z}{*n} + D_\Gamma v\right][I + zD^2 b]^{-1} + [I + zD^2 b]^{-1*}\left[\frac{\partial v}{\partial z}{*n} + D_\Gamma v\right]\right\} = \tag{4.14}$$

$$= \int_\omega d\Gamma \int_{-h}^{h} dz j_z \left\{ f \cdot v + g \cdot \frac{dv}{dz}\right\}$$

при условии

$$\int_\omega d\Gamma \int_{-h}^{h} dz j_z \left\{ f \cdot v + g \cdot \frac{dv}{dz}\right\} = 0, \quad \forall v \in \ker\varepsilon \circ T$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} F \circ T \text{ и } g \stackrel{\text{def}}{=} G \circ T \in L^2(-h, h; L^2(\omega)^N) \tag{4.15}$$

$$\ker\varepsilon \circ T = \{ v : v(X, z) = a + AX + zAn(X),\ \forall a \in \mathbb{R}^N,\ \forall A\colon A + {*A} = 0\} \tag{4.16}$$

где A – матрица размера $N \times N$.

4.2. Разложения в бесконечные ряды. Теперь рассмотрим приближения по переменной z, нормальной к срединной поверхности, в локальных координатах при малых $h > 0$. Допустим, что вектор перемещений можно представить в виде бесконечного ряда

$$v(X, z) = \sum_{i=0}^{\infty} v^i(X) z^i, \quad v^i : \omega \to \mathbb{R}^N$$

Используя преобразование T, получим явное выражение для V в $S_h(\omega)$:

$$V(x) = (v \circ T^{-1})(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (v^i \circ p)(x) b(x)^i$$

С помощью тангенциального исчисления можно выразить $D(v^i \circ p)$ через $D_\Gamma(v^i)$ и производные b (см. [34, 35, 39]). Сделаем следующее

Допущение 4.2. Пусть $\exists \bar{h} > 0$, такое что $b \in C^{1,1}(\overline{S_{\bar h}(\omega)})$ и

$$\exists \beta,\ 0 < \beta < 1, \quad \forall X \in \omega, \quad \bar{h}\|D^2 b(X)\| \le \beta$$

Тогда матрицу $[I + zD^2b]^{-1}$ можно представить в виде бесконечной суммы

$$[I + zD^2 b]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-D^2 b)^i z^i \tag{4.17}$$

Подстановка в выражение для $DV \circ T$ дает

$$DV \circ T_z = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left\{ (i+1)(v^{i+1} * n) + \sum_{k=0}^{i} D_\Gamma(v^k)(-D^2 b)^{i-k} \right\}$$

Тензор линейных деформаций $2\varepsilon(V) = D(V) + {*DV}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \varepsilon(V) \circ T_z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i(v) z^i \\ 2\varepsilon^i(v) \overset{\text{def}}{=} (i+1)[v^{i+1} * n + n * v^{i+1}] + \sum_{k=0}^{i} [D_\Gamma(v^k)(-D^2 b)^{i-k} + (-D^2 b)^{i-k} * D_\Gamma(v^k)] \end{gathered} \tag{4.18}$$

Заметим, что $\varepsilon^i(v) = \varepsilon^i(v^0, \ldots, v^{i+1})$. Используя далее формулу Федерера, вычислим энергию деформаций. Учитывая, что $v(h) = V(h) \circ T$ и $v = V \circ T$, находим первый член

$$\int_{S_h(\omega)} C^{-1} \varepsilon(V(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon(V) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\omega} \alpha_i(h) \sum_{j=0}^{i} C^{-1} \varepsilon^j(v(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon^{i-j}(v) d\Gamma$$

где $\alpha_n(h)$ определены в (3.1) при $n \geq 0$. Допустим, что усилие F имеет вид

$$F = f \circ T^{-1}, \quad f = \sum_{i=0}^{\infty} f^i z^i, \quad f^i \in L^2(\omega)^N, \quad \sum_{i=0}^{\infty} h^{2i} \|f^i\|^2_{L^2(\omega)} < \infty \tag{4.19}$$

$$\Rightarrow \int_{S_h(\omega)} F \cdot V dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\omega} \left\{ \alpha_i(h) \sum_{j=0}^{i} f^{i-j} \cdot v^j dz \right\} d\Gamma \tag{4.20}$$

Допустим также, что G задается аналогичным образом

$$G = g \circ T^{-1}, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} g^i z^i, \quad g^i \in L^2(\omega)^N, \quad \sum_{i=0}^{\infty} h^{2i} \|g^i\|^2_{L^2(\omega)} < \infty \tag{4.21}$$

$$\Rightarrow \int_{S_h(\omega)} G \cdot DV \nabla b dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\omega} \left\{ \alpha_i(h) \sum_{j=0}^{i} (j+1) g^{i-j} \cdot v^{j+1} dz \right\} d\Gamma \tag{4.22}$$

В итоге получаем

$$\begin{gathered} \int_{S_h(\omega)} C^{-1} \varepsilon(V(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon(V) - F \cdot V - G \cdot DV \nabla b dx = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\omega} \alpha_i(h) \sum_{j=0}^{i} \{ C^{-1} \varepsilon^{i-j}(v(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon^j(v) - f^{i-j} \cdot v^j - (j+1) g^{i-j} \cdot v^{j+1} \} d\Gamma \end{gathered} \tag{4.23}$$

Для сокращения записи введем следующие обозначения для сумм в правой части (4.23):

$$B^i_j \overset{\text{def}}{=} C^{-1} \varepsilon^{i-j}(v(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon^j(v) - f^{i-j} \cdot v^j - (j+1) g^{i-j} \cdot v^{j+1}$$

Тогда вариационное уравнение (4.1) можно записать в виде формального ряда по нечетным степеням h:

$$\forall v, \sum_{m=0}^{\infty} 2\frac{h^{2m+1}}{2m+1}\int_{\omega} \sum_{l=0}^{\min\{2m, N-1\}} \kappa_l \sum_{j=0}^{2m-l} B_j^{2m-l} d\Gamma = 0 \tag{4.24}$$

При $N = 3$ последнее уравнение приводится к виду

$$\forall v, \int_{\omega} 2hB_0^0 d\Gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\omega} 2\frac{h^{2m+1}}{2m+1}\left[\sum_{j=0}^{2m} B_j^{2m} + \kappa_1 \sum_{j=0}^{2m-1} B_j^{2m-1} + \kappa_2 \sum_{j=0}^{2m-2} B_j^{2m-2}\right] d\Gamma = 0$$

4.3. Полиномиальные модели и пространства решений. Учитывая приведенные выше бесконечные разложения, перейдем теперь к полиномиальным аппроксимациям $P(k, l)$ порядка k для вектора перемещений $v = V \circ T_z$ и порядка l для тензора линейных деформаций $\varepsilon(V) \circ T_z$. Другим интересным случаем является $P(k_n, l)$-модель, где вектор перемещений $v = V \circ T_z$ аппроксимируется смешанным образом: полиномом степени $k - 1$ для тангенциальной составляющей v_Γ и полиномом степени k для нормальной компоненты v_n. Рассмотрим следующие три модели:

модель $P(1, 1)$:

$$V \circ T_z \simeq v^0 + zv^1, \quad \varepsilon(V) \circ T_z \simeq \varepsilon^0(v^0, v^1) + z\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)$$

модель $P(2_n, 1)$:

$$V \circ T_z \simeq v^0 + zv^1 + z^2 v_n^2 n$$

$$\varepsilon(V) \circ T_z \simeq \varepsilon^0(v^0, v^1) + z\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)$$

модель $P(2, 1)$:

$$V \circ T_z \simeq v^0 + zv^1 + z^2 v^2, \quad \varepsilon(V) \circ T_z \simeq \varepsilon^0(v^0, v^1) + z\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)$$

где выражения для $\varepsilon^i(v)$ получаются из представления (4.18):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0(v^0, v^1) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^0(v) = \frac{1}{2}(v^1 * n + n * v^1) + \varepsilon_\Gamma(v^0) \\ &\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^1(v) = [v^2 * n + n * v^2] + \varepsilon_\Gamma(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma(v^0)D^2 b + D^2 b * D_\Gamma(v^0)] \end{aligned} \tag{4.25}$$

Используя обозначения $v = (v^0, v^1, 0)$, $v = (v^0, v^1, v_n^2 n)$ и $v = (v^0, v^1, v^2)$ соответственно для моделей $P(1, 1)$, $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$, будем одновременно работать с тремя моделями, поскольку соответствующие вариационные уравнения будут иметь одинаковую структуру относительно $\varepsilon^0(v)$ и $\varepsilon^1(v)$. Во всех трех моделях $\varepsilon^0(v) = \varepsilon^0(v^0, v^1)$, а $\varepsilon^1(v)$ будет обозначать $\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)$, $\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)$ и $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)$ соответственно для моделей $P(1, 1)$, $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$.

Согласно [35, 39], для модели $P(1, 1)$ множество жестких перемещений является конечно-мерным подпространством

$$\begin{aligned} K &\stackrel{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1) : (v^0, v^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \varepsilon^0(v^0, v^1) = 0, \varepsilon^1(v^0, v^1, 0) = 0\} = \\ &= \{(v^0, v^1) : v^0(X) = a + AX, \ v^1(X) = An(X), \ \forall a \in \mathbb{R}^N, \ \forall A : A + {}^*A = 0\} \end{aligned}$$

Теорема 4.2. Пусть Γ – граница некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$, а ω – ограниченная открытая область с липшицевой границей γ в Γ. Тогда

1. Для модели $P(2, 1)$:

$$\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1 = \{(v^0, v^1, v^2) : (v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$$
$$\varepsilon^0(v^0, v^1) = 0, \quad \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = 0\} = \{(v^0, v^1, 0) : (v^0, v^1) \in K\}$$

2. Для модели $P(2_n, 1)$:

$$\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1 = \{(v^0, v^1, v_n^2 n) : (v^0, v^1, v_n^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$$
$$\varepsilon^0(v^0, v^1) = 0, \quad \varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n) = 0\} = \{(v^0, v^1, 0) : (v^0, v^1) \in K\}$$

3. Для модели $P(2, 1)$:

$$\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1 = \{(v^0, v^1, v^2) : (v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$$
$$\varepsilon^0(v^0, v^1) = 0, \quad \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = 0\} = \{(v^0, v^1, 0) : (v^0, v^1) \in K\}$$

Доказательство. Вспомним разложение тензора на его тангенциальную и нормальную составляющие по множествам уровня функции b [35, 39]:

$$\varepsilon^i = \varepsilon^{iP} + (P\varepsilon^i n)*n + n*(P\varepsilon^i n) + \varepsilon^i_{nn} n*n, \quad \varepsilon^{iP} = P\varepsilon^i P \tag{4.26}$$

Поскольку $D_\Gamma^P(v) = PD_\Gamma(v)$ и $\varepsilon_\Gamma^P(v) = P\varepsilon_\Gamma(v)P$, непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(v^0, v^1) &= \varepsilon_\Gamma(v^0) + \frac{1}{2}[v^1*n + n*v^1] \\ \varepsilon^{0P}(v^0, v^1) &= \varepsilon_\Gamma^P(v^0) \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$P\varepsilon^0(v^0, v^1)n = \frac{1}{2}[v_\Gamma^1 + *D_\Gamma(v^0)n], \quad \varepsilon^0(v^0, v^1)n \cdot n = v_n^1 \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) &= v^2*n + n*v^2 + \varepsilon_\Gamma(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma(v^0)D^2b + D^2b*D_\Gamma(v^0)] \\ \varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v^2) &= \varepsilon^{1P}(v^0, v^1, 0) \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} P\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n &= v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}[*D_\Gamma(v^1)n - D^2b*D_\Gamma(v^0)n] = \\ &= v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}[\nabla_\Gamma v_n^1 - D^2b(v_\Gamma^1 + *D_\Gamma(v^0)n)] = v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}\nabla_\Gamma v_n^1 - D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1)n = \\ &= v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}\nabla_\Gamma(\varepsilon^0(v^0, v^1)n \cdot n) - D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1)n \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n \cdot n = 2v_n^2 = \varepsilon^1(0, 0, v_n^2 n)n \cdot n \tag{4.31}$$

В силу того, что $\varepsilon^0(v^0, v^1) = 0$, имеем $P\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = v_\Gamma^2$, а в силу $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = 0$ имеем $v_\Gamma^2 = 0$, $v_n^2 = 0$. Таким образом, возвращаемся к случаю модели $P(1, 1)$. Такие же выкладки применяются и для остальных моделей.

В вариационные уравнения, соответствующие трем рассматриваемым моделям, будут входить только операторы ε^0 и ε^1, а решения будут естественным образом принадлежать некоторому фактор-пространству, топология которого будет определяться нормами $\|\varepsilon^0(v)\|$ и $\|\varepsilon^1(v)\|$. Отсюда возникает вопрос о полноте фактор-пространства относительно указанных норм. Для удобства введем тензор

$$e^1(v^0, v^1) \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^1(v^0, v^1, 0) \tag{4.32}$$

По определению $e^1(v^0, v^1)n \cdot n = 0$ и

$$e^1(v^0, v^1) = e^{1P}(v^0, v^1) + e^1(v^0, v^1)n*n + n*(e^1(v^0, v^1)n)$$

Теорема 4.3. Пусть Γ – граница некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$, а ω – ограниченная открытая область с липшицевой границей γ в Γ. Тогда

1. Для модели $P(1, 1)$ норма

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^0\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^1_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

эквивалентна стандартной норме в $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$, норма

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2} \tag{4.33}$$

эквивалентна канонической фактор-норме в пространстве

$$Q \overset{\text{def}}{=} \frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}{K}$$

2. Для модели $P(2_n, 1)$ норма

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2_n n)\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^0\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^1_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

эквивалентна стандартной норме в $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$, а для модели $P(1, 1)$ норма

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2_n n)\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2} \tag{4.34}$$

эквивалентна канонической фактор-норме в пространстве

$$\frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)}{\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1} = \frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}{K} \times L^2(\omega)$$

3. Для модели $P(2, 1)$ норма

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^0\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^1_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^2_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

эквивалентна стандартной норме в $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$. Как и ранее

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2} \tag{4.35}$$

есть норма в фактор-пространстве

$$\frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1} = \frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}{K} \times L^2(\omega)^N$$

которая обычно порождает более слабую топологию, нежели та, которую порождает каноническая норма в фактор-пространстве. Обозначим через E^{01} пополнение[7] этого фактор-пространства по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(v^0, v^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w^0, w^1) + \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(w^0, w^1, w^2) d\Gamma$$

Будем использовать общее обозначение E_{01} для фактор-пространств или их пополнения во всех трех случаях, учитывая указанные выше различия. Верхний индекс 01 указывает, что пространство Гильберта наделяется топологией, порождаемой скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w) + \varepsilon^1(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(w) d\Gamma \tag{4.36}$$

Приведенная теорема играет центральную роль при описании пространств решений. Ниже она будет дополнена теоремами 5.2 и 7.1, которые позволяют описывать подпространства, естественно возникающие при разложении уравнений тонкой оболочки и их асимптотическом анализе.

Доказательство.

1. Следует из [35, 39].

2. Из п. 1 уже известно, что существует такое $c > 0$, что

$$\begin{gathered} \|v^0\|_{H^1(\omega)} + \|v^1\|_{H^1(\omega)} \le \\ \le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|_{L^2(\omega)} + \|v^0\|_{L^2(\omega)} + \|v^1\|_{L^2(\omega)}] \end{gathered} \tag{4.37}$$

а из (4.31) имеем

$$\|v_n^2\|_{L^2(\omega)} = \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n \cdot n\|_{L^2(\omega)}/2$$

Учитывая разложения, тождества (4.30) и равенства (4.29), находим

$$\begin{gathered} \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|^2 = \|\varepsilon^{1P}(v^0, v^1, 0)\|^2 + 2\|P\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)n\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)n \cdot n\|^2 = \\ = \|\varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v_n^2 n)\|^2 + 2\|P\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)n\|^2 \end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} \|v^0\|_{H^1(\omega)} + \|v^1\|_{H^1(\omega)} + \|v_n^2\|_{L^2(\omega)} \le \\ \le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\|_{L^2(\omega)} + \|v^0\|_{L^2(\omega)} + \|v_\Gamma^1\|_{L^2(\omega)}] \end{gathered}$$

[7] Пространство E^{01} полностью описано в п. (ii) теоремы 2.3 работы [27]: v^0 и v_Γ^1 принадлежат $H^1(\omega)^N$, v_n^1 и v_n^2 принадлежат $L^2(\omega)$, а v_Γ^2 принадлежит $H^{-1}(\omega)^N$.

откуда следует эквивалентность норм, поскольку, очевидно, справедливо обратное неравенство. Для фактор-пространства воспользуется тем, что

$$\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\|^2 = \|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1)\|^2 + \|2v_n^2\|^2$$

3. Снова начнем с выраженной неравенством (4.37) эквивалентности норм для модели $P(1, 1)$. Имеем

$$\|v^2\|_{L^2(\omega)} \le \|v_\Gamma^2\|_{L^2(\omega)} + \|v_n^2\|_{L^2(\omega)} \le \|v_\Gamma^2\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)n \cdot n\|_{L^2(\omega)}$$

В силу разложения и тождеств (4.30), (4.29) имеем

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|^2 = \|\varepsilon^{1P}(v^0, v^1, 0)\|^2 + 2\|P\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)n\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)n \cdot n\|^2 = \\ &= \|\varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v^2)\|^2 + 2\|P\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n - v_\Gamma^2\|^2 \\ &\Rightarrow \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\| \le c[\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\| + \|v_\Gamma^1\|] \end{aligned} \tag{4.38}$$

Поэтому из (4.37), (4.3), (4.38) следует

$$\begin{aligned} &\|v^0\|_{H^1(\omega)} + \|v^1\|_{H^1(\omega)} + \|v^2\|_{L^2(\omega)} \le \\ &\le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|_{L^2(\omega)} + \|v^0\|_{L^2(\omega)} + \|v_\Gamma^1\|_{L^2(\omega)} + \|v_\Gamma^2\|_{L^2(\omega)}] \end{aligned}$$

откуда получаем эквивалентность норм, поскольку справедливость обратного неравенства очевидна.

4.4. Вариационное уравнение и разложение полной энергии. С помощью введенных значений запишем вариационную задачу, описывающую три рассматриваемые модели: найти вектор $v_h \in E^{01}$, такой что для всех $v \in E^{01}$ справедливо вариационное уравнение

$$\begin{aligned} &\int_\omega \bar\alpha_0(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + \bar\alpha_1(h)[C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1] + \bar\alpha_2(h)C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 \\ &-F_h^0 \cdot v^0 - F_h^1 \cdot v^1 - F_h^2 \cdot v^2 - G_h^0 \cdot v^1 - G_h^1 \cdot v^2 d\Gamma = 0 \\ &\varepsilon_h^i \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^i(v_h), \quad \varepsilon^i \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^i(v) \end{aligned} \tag{4.39}$$

причем

$$\begin{aligned} &\int_\omega F_h^0 \cdot v^0 + F_h^1 \cdot v^1 + F_h^2 \cdot v^2 d\Gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2h} \int_{S_h(\omega)} F \cdot (v^0 \circ p + bv^1 \circ p + b^2 v^2 \circ p)dx \\ &\int_\omega G_h^0 \cdot v^1 + G_h^1 \cdot v^2 d\Gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2h} \int_{S_h(\omega)} G \cdot D(v^0 \circ p + bv^1 \circ p + b^2 v^2 \circ p)\nabla b dx \end{aligned} \tag{4.40}$$

поскольку $D(v^0 \circ p + bv^1 \circ p + b^2 v^2 \circ p)\nabla b = v^1 \circ p + 2bv^2 \circ p$. В модели $P(1, 1)$ пары векторов (v_h^0, v_h^1) и (v^0, v^1) принадлежат пространству $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$, в модели $P(2_n, 1)$ тройки (v_h^0, v_h^1, v_{hn}^2) и (v^0, v^1, v_n^2) принадлежат $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K \times L^2(\omega)$, а в модели $P(2, 1)$ тройки (v_h^0, v_h^1, v_h^2) и (v^0, v^1, v^2) принадлежат E^{01}.

Пусть во всех трех случаях справедливы допущения 4.1 и 4.2. В случае модели $P(1, 1)$, если F и G из $L^2(S_h(\omega))^N$ удовлетворяют условию

$$\forall v = (v^0, v^1) \in K, \quad \int_\omega F_h^0 \cdot v^0 + (F_h^1 + G_h^0) \cdot v^1 d\Gamma = 0 \tag{4.41}$$

вариационное уравнение (4.39) имеет единственное (с точностью до аддитивных жестких перемещений из K) решение $v_h = (v_h^0, v_h^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$. В модели $P(2_n, 1)$, если F и G из $L^2(S_h(\omega))^N$ удовлетворяют условию

$$\forall v = (v^0, v^1) \in K, \quad \int_\omega F_h^0 \cdot v^0 + (F_h^1 + G_h^0) \cdot v^1 + (F_h^2 + G_h^1)_n v_n^2 d\Gamma = 0 \tag{4.42}$$

вариационное уравнение (4.39) имеет единственное (с точностью до аддитивных жестких перемещений из K) решение $v_h = (v_h^0, v_h^1, v_{hn}^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$. В случае модели $P(2, 1)$, если F и G из $L^2(S_h(\omega))^N$ удовлетворяют условию

$$\begin{gathered}\exists c(h) > 0, \quad \forall v \in E^{01}, \quad \left|\int_\omega F_h^0 \cdot v^0 + (F_h^1 + G_h^0) \cdot v^1 + (F_h^2 + G_h^1) \cdot v^2 d\Gamma\right| \le \\ \le c(h)\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2}\end{gathered} \tag{4.43}$$

вариационное уравнение (4.39) имеет единственное решение $v_h = (v_h^0, v_h^1, v_h^2) \in E^{01}$. Это условие автоматически вытекает из корректности N-мерной задачи.

Поскольку любой тензор можно разложить на тангенциальную и нормальную компоненты по множествам уровня функции b, в доказательстве теоремы 4.2 получаем тождество

$$\|\varepsilon^i(v)\|^2 = \|\varepsilon^{iP}(v)\|^2 + 2\|P\varepsilon^i(v)n\|^2 + \|\varepsilon^i(v)n \cdot n\|^2 \tag{4.44}$$

При $(v^0, v^1) \in H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ имеем

$$\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 = \|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_\Gamma^1 + \nabla_\Gamma v_n^0 - D^2 b v_\Gamma^0\|^2 + \|v_n^1\|^2 \tag{4.45}$$

Первое слагаемое в правой части соответствует мембранной энергии, второе соответствует энергии сдвига, а третье – энергии сжатия. Вторая часть представляет собой обобщенную энергию изгиба $\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2$. При $(v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ имеем

$$\begin{aligned}\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 &= \left\|\varepsilon_\Gamma^P(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2 b + D^2 b^* D_\Gamma^P(v^0)]\right\|^2 + \\ &+ \left\|v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}[\nabla_\Gamma v_n^1 - D^2 b(v_\Gamma^1 + \nabla_\Gamma v_n^0 - D^2 b v_\Gamma^0)]\right\|^2 + \|2v_n^2\|^2 = \\ &= \left\|\varepsilon_\Gamma^P(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2 b + D^2 b^* D_\Gamma^P(v^0)]\right\|^2 + \\ &+ \left\|v_\Gamma^2 + \frac{1}{2}[\nabla_\Gamma(\varepsilon^0(v^0, v^1)n \cdot n) - D^2 b\varepsilon^0(v^0, v^1)n]\right\|^2 + \|2v_n^2\|^2\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое есть норма энергии изгиба, а второе – норма энергии сдвига.

4.5. Граничные условия первого рода. Пусть ω – ограниченная открытая связная область в Γ – границе некоторого множества класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Для N-мерных граничных условий первого рода базисное пространство

$$H^1_{\gamma_0}(S_h(\omega))^N \overset{\text{def}}{=} \{V \in H^1(S_h(\omega))^N : V|_{\Sigma_h(\gamma_0)} = 0\}$$

$$\Sigma_h(\gamma_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |b_\Omega(x)| < h,\ p_{\partial\Omega}(x) \in \gamma_0\}$$

является той частью боковой границы, проекция которой на Γ равна γ_0. В N-мерное случае вариационное уравнение

$$\exists V(h) \in H^1_{\gamma_0}(S_h(\omega))^N \quad \forall V \in H^1_{\gamma_0}(S_h(\omega))^N$$

$$\int\limits_{S_h(\omega)} C^{-1}\varepsilon(V(h)) \cdot\cdot\, \varepsilon(V) - F \cdot\cdot\, V - G \cdot DV\nabla b dx = 0 \tag{4.46}$$

имеет единственное решение в пространстве $H^1_{\gamma_0}(S_h(\omega))^N$ при любых F и G из $L^2(S_h(\omega))^N$. В силу эквивалентности норм уравнение (4.46) эквивалентно следующему условию: $\exists c(h) > 0$:

$$\forall V \in H^1_{\gamma_0}(S_h(\omega))^N, \quad \left|\int\limits_{S_h(\omega)} F : V + G \cdot DV\nabla b dx\right| \le c(h)\|\varepsilon(V)\|_{L^2(S_h(\omega))}$$

Обозначим через $H^1_{\gamma_0}(\omega)$ пространство $\{f \in H^1(\omega) : f|_{\gamma_0} = 0\}$ и вспомним, что пространство

$$W_{\gamma_0} \overset{\text{def}}{=} Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)^N, \quad Q_{\gamma_0} \overset{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1(\omega)^N : v^1_\Gamma|_{\gamma_0} = 0\}$$

полно для нормы (см. [35]):

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^0\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^1_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^2_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

Обозначим через $E^{01}_{\gamma_0}$ пополнение[8] пространства $Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)^N$ по норме

$$\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|_{L^2(\omega)}$$

Все приведенные выше рассуждения справедливы и для подпространства $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$, но будем рассматривать только случай $E^{01}_{\gamma_0}$.

Точно такие же определения имеют место и для модели $P(1, 1)$ при $v^2 = 0$ и модели $P(2_n, 1)$ при $v^2_\Gamma = 0$. Будем использовать общие обозначения для всех трех моделей. Однако здесь следует иметь в виду, что нормы

[8] Пространство $E^{01}_{\gamma_0}$ описывается таким же образом, как и E^{01} в [27].

$$\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, 0)\|_{L^2(\omega)}$$

$$\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\|_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon_n^2 n)\|_{L^2(\omega)}$$

эквивалентны каноническим нормам соответственно в пространствах

$$Q_{\gamma_0} = \{(\upsilon^0, \upsilon^1) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1(\omega)^N : \upsilon^1_\Gamma|_{\gamma_0} = 0\}, \quad Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)$$

Для удобства будем использовать общее обозначение W_{γ_0} для пространства Q_{γ_0} в модели $P(1, 1)$, пространства $Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)$ в модели $P(2_n, 1)$ и пространства $Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)^N$ в модели $P(2, 1)$. Пусть $E^{01}_{\gamma_0}$ – общее обозначение для пополнения пространства W_{γ_0}. В моделях $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$ соответственно имеем $E^{01}_{\gamma_0} = Q_{\gamma_0}$ и $E^{01}_{\gamma_0} = Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)$, и только в $P(2, 1)$-модели $E^{01}_{\gamma_0}$ – пополнение пространства $Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)^N$. Такие же комментарии относятся и к замкнутому линейному подпространству $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^N$ (или $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)$).

Для модели $P(2, 1)$ необходимо найти вектор $\upsilon_h \in E^{01}_{\gamma_0}$, удовлетворяющий вариационном уравнению

$$\begin{aligned}\int\limits_\omega & \bar{\alpha}_0(h) C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot \varepsilon^0 + \bar{\alpha}_1(h)(C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot \varepsilon^0 + C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot \varepsilon^1) + \bar{\alpha}_2(h) C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot \varepsilon^1 - \\ & - F_h^0 \cdot \upsilon^0 - F_h^1 \cdot \upsilon^1 - F_h^2 \cdot \upsilon^2 - G_h^0 \cdot \upsilon^1 - G_h^1 \cdot \upsilon^2 d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{4.47}$$

для всех $\upsilon \in E^{01}_{\gamma_0}$. Вариационные уравнения для моделей $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$ имеют точно такой же вид, но там соответственно $\upsilon^2 = \upsilon_h^2 = 0$ и $\upsilon_\Gamma^2 = \upsilon_{h\Gamma}^2 = 0$.

5. Эффективные определяющие соотношения. Исключение переменной υ^2. *5.1. Модель P(1,1).* Напомним ранее введенное обозначение $\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) = e^1(\upsilon^0, \upsilon^1)$. В модели $P(1, 1)$ пара векторов $(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)$ из $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$ является решением вариационного уравнения (4.39), имеющего в этом случае вид

$$\begin{aligned}\int\limits_\omega & \bar{\alpha}_0(h) C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot \varepsilon^0 + \bar{\alpha}_1(h)[C^{-1}e_h^1 \cdot\cdot \varepsilon^0 + C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot e^1] + \bar{\alpha}_2(h) C^{-1}e_h^1 \cdot\cdot e^1 - \\ & - F_h^0 \cdot \upsilon^0 - (F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2. Модель P(2, 1). В модели $P(2, 1)$ есть возможность исключить переменную υ_h^2. Чтобы сократить выкладки, перепишем сначала вариационное уравнение в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_\omega & \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot \varepsilon^0 + C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + \varepsilon^1\right] - \\ & - F_h^0 \cdot \upsilon^0 - (F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 - (F_h^2 + G_h^1) \cdot \upsilon^2 d\Gamma = 0\end{aligned}$$

Напомним, что $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = e^1(v^0, v^1) + v^2 * n + n * v^2$. Выбирая в качестве пробных функций $(0, 0, v^2)$, получаем

$$2[C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1)]n = F_h^2 + G_h^1$$

При использовании пробных функций $(v^0, v^1, 0)$ вариационное уравнение преобразуется к виду

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + e^1\right] -$$

$$- F_h^0 \cdot v^0 - (F_h^1 + G_h^0) \cdot v^1 d\Gamma = 0$$

Оказывается, первое уравнение единственным образом определяет v_h^2 как функцию (v_h^0, v_h^1). Теперь, вводя эффективное определяющее соотношение, можно исключить v_h^2 из второго уравнения и построить вариационное уравнение для (v_h^0, v_h^1).

Теорема 5.1. Пусть оператор C задает определяющее соотношение, удовлетворяющее допущению 4.1. Преобразование пространства $\mathbb{R}^N$:

$$N(u) \overset{\text{def}}{=} [C^{-1}(u * n + n * u)]n, \quad u \in \mathbb{R}^N \tag{5.2}$$

и эффективное определяющее соотношение $C_{eP} : \mathrm{Sym}_N^P \to \mathrm{Sym}_N^P$, заданное в виде

$$C_{eP}^{-1}\tau \overset{\text{def}}{=} C^{-1}\{\tau - \{N^{-1}([C^{-1}\tau]n) * n + n * N^{-1}([C^{-1}\tau]n)\}\}, \quad \tau \in \mathrm{Sym}_N^P \tag{5.3}$$

являются взаимно однозначными, симметрическими и коэрцитивными. Если заданы $g \in \mathbb{R}^N$ и $\tau \in \mathrm{Sym}_N$, удовлетворяющие равенству

$$[C^{-1}\tau]n = g \tag{5.4}$$

то для любого $\sigma \in \mathrm{Sym}_N$ имеют место соотношения

$$P\tau n + \frac{1}{2}\tau_{nn} n = N^{-1}(g - [C^{-1}\tau^P]n), \quad \tau^P = P\tau P$$

$$\left.\begin{aligned} & C^{-1}\tau = C_{eP}^{-1}\tau^P + C^{-1}[N^{-1}(g) * n + n * N^{-1}(g)] \\ & C^{-1}\tau \cdot\cdot\, \sigma = C_{eP}^{-1}\tau^P \cdot\cdot\, \sigma^P + 2g \cdot N^{-1}([C^{-1}\sigma]n) = \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$$= C_{eP}^{-1}\tau^P \cdot\cdot\, \sigma^P + 2g \cdot N^{-1}([C^{-1}\sigma^P]n) + 2g \cdot \left(P\sigma n + \frac{1}{2}\sigma_{nn} n\right)$$

Доказательство. Разложим τ на нормальную и тангенциальную составляющие:

$$\tau = \tau^P + (P\tau n) * n + n * (P\tau n) + \tau_{nn} n * n = \tau^P + \left(P\tau n + \frac{1}{2}\tau_{nn} n\right) * n + n * \left(P\tau n + \frac{1}{2}\tau_{nn} n\right)$$

Подставив полученное выражение в уравнение (5.4), приходим к уравнению относительно τn как функции τ^P:

$$N\left(P\tau n + \frac{1}{2}\tau_{nn} n\right) = g - [C^{-1}\tau^P]n$$

Несложно убедиться, что билинейная форма, соответствующая N, имеет вид

$$\forall u, v, \quad Nu \cdot v = [C^{-1}(u*n + n*u)] \cdot\cdot (v*n + n*v)$$

Она является симметрической. К тому же, согласно допущению 4.1 о C, она также коэрцитивна, поскольку

$$\forall v, [C^{-1}(v*n + n*v)] \cdot\cdot (v*n + n*v) \geq \alpha\|v*n + n*v\|^2 \geq 2\alpha\int_\omega |v|^2 d\Gamma$$

Отсюда следует, что функция N обратима, и получаем первое тождество (5.5) для τn. Кроме того

$$\begin{aligned} C^{-1}\tau &= C^{-1}\tau^P + C^{-1}[(N^{-1}(g - [C^{-1}\tau^P]n)*n + n*N^{-1}(g - [C^{-1}\tau^P]n)] = \\ &= C^{-1}\tau^P - C^{-1}(N^{-1}([C^{-1}\tau^P]n)*n + n*N^{-1}[C^{-1}\tau^P]n) + \\ &+ C^{-1}[N^{-1}g*n + n*N^{-1}g] \end{aligned}$$

Это выражение можно упростить еще, вводя для $\tau \in \mathrm{Sym}_N$ отображение

$$T\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} C^{-1}\{\tau - \{N^{-1}([C^{-1}\tau]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\tau]n)\}\}$$

Согласно предположению 4.1 о C, имеем $T\tau \in \mathrm{Sym}_N$, так как C^{-1} действует на симметрический тензор. По определению функции N,

$$\begin{aligned} (T\tau)n &= C^{-1}\{\tau - \{N^{-1}([C^{-1}\tau]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\tau]n)\}\}n = \\ &= [C^{-1}\tau]n - [C^{-1}\{N^{-1}([C^{-1}\tau]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\tau]n)\}n = \\ &= [C^{-1}\tau]n - NN^{-1}([C^{-1}\tau]n) = 0 \end{aligned}$$

а, следовательно, отображение $T : \mathrm{Sym}_N^P \to \mathrm{Sym}_N^P$ является вполне определенным. Кроме того, в силу симметрии C, σ и $\tau \in \mathrm{Sym}_N^P$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma \cdot\cdot T\tau &= C^{-1}\sigma \cdot\cdot \{\tau - \{N^{-1}([C^{-1}\tau]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\tau]n)\}\} = \\ &= C^{-1}\sigma \cdot\cdot \tau - 2[C^{-1}\sigma]n \cdot N^{-1}([C^{-1}\tau]n) = \\ &= C^{-1}\sigma \cdot\cdot \tau - 2N^{-1}([C^{-1}\sigma]n) \cdot [C^{-1}\tau]n = \\ &= C^{-1}\sigma \cdot\cdot \tau - \{N^{-1}([C^{-1}\sigma]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\sigma]n)\} \cdot\cdot C^{-1}\tau = \\ &= C^{-1}\{\sigma - \{N^{-1}([C^{-1}\sigma]n)*n + n*N^{-1}([C^{-1}\sigma]n)\}\} \cdot\cdot \tau = T\sigma \cdot\cdot \tau \end{aligned}$$

а, значит, $*T = T$ является симметрическим. Согласно допущению 4.1 отображение C^{-1} является коэрцитивным для некоторой постоянной $\alpha > 0$. Поэтому для $\tau \in \mathrm{Sym}_N^P$ и $w \in \mathbb{R}^N$ получаем

$$C^{-1}[\tau + (w*n + n*w)] \cdot\cdot [\tau + (w*n + n*w)] \geq \alpha\|\tau + (w*n + n*w)\|^2$$

Но поскольку τ является симметрическим и $\tau n = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|\tau + (w*n + n*w)\|^2 &= \|\tau\|^2 + 4\tau n \cdot w + (|w|^2 + |w_n|^2) = \\ &= \|\tau\|^2 + (|w|^2 + |w_n|^2) \geq \|\tau\|^2 \end{aligned}$$

В частности для $w = -N^{-1}([C^{-1}\tau]n)$ получаем

$$C^{-1}[\tau + (w^*n + n^*w)] \cdot\cdot [\tau + (w^*n + n^*w)] = T\tau \cdot\cdot \tau + (T\tau)n \cdot w = T\tau \cdot\cdot \tau \tag{5.6}$$

поскольку уже показано, что $(T\tau)n = 0$. Из приведенных выше выкладок и оценок следует $T\tau \cdot\cdot \tau \geq \alpha\|\tau\|^2$. Поэтому $T : \mathrm{Sym}_N^P \to \mathrm{Sym}_N^P$ является взаимно однозначным, симметрическим и коэрцитивным отображением. Определяя C_{eP} как T^{-1}, получаем (5.3), и для всех $\sigma \in \mathrm{Sym}_N$ справедливы соотношения

$$C^{-1}\tau = C_{eP}^{-1}\tau^P + C^{-1}[N^{-1}(g)^*n + n^*N^{-1}(g)]$$

$$C^{-1}\tau \cdot\cdot \sigma = C_{eP}^{-1}\tau^P \cdot\cdot \sigma^P + 2g \cdot N^{-1}([C^{-1}\sigma]n) =$$

$$= C_{eP}^{-1}\tau^P \cdot\cdot \sigma^P + 2g \cdot N^{-1}([C^{-1}\sigma^P]n) + 2g \cdot \left(P\sigma n + \frac{1}{2}\sigma_{nn}n\right)$$

откуда следует второе тождество (5.5). В данном случае

$$\tau = \bar{\alpha}_1(h)\varepsilon^0(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1) + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon^1(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1, \upsilon_h^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau^P = \bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_h^0) + \bar{\alpha}_2(h)e^{1P}(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)$$

Поэтому из вариационного уравнения можно исключить переменную υ_h^2:

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1) \cdot\cdot \varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1) +$$

$$+ C_{eP}^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_h^0) + \bar{\alpha}_2(h)e^{1P}(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0) + e^{1P}(\upsilon^0, \upsilon^1)\right] - F_h^0 \cdot \upsilon^0 -$$

$$-(F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 + (F_h^2 + G_h^1) \cdot N^{-1}\left(\left[C^{-1}\left(\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + e^1\right)\right]n\right)d\Gamma = 0$$

или

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1) \cdot\cdot \varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1) +$$

$$+ C_{eP}^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_h^0) + \bar{\alpha}_2(h)e^{1P}(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0) + e^{1P}(\upsilon^0, \upsilon^1)\right]d\Gamma =$$

$$= l_h\left(0, 0, -N^{-1}\left(\left[C^{-1}\left(\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0) + e^{1P}(\upsilon^0, \upsilon^1)\right)\right]n\right)\right) +$$

$$+ l_h\left(\upsilon^0, \upsilon^1, -\left(\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)n + e^1(\upsilon^0, \upsilon^1)n\right)\right)$$

$$l_h(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\omega F_h^0 \cdot \upsilon^0 + (F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 + (F_h^2 + G_h^1) \cdot \upsilon^2 d\Gamma$$

Существует константа $c_h > 0$, такая что

$$\left|l_h\left(v^0, v^1, -\left(\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0(v^0, v^1)n + e^1(v^0, v^1)n\right)\right)\right| \le$$

$$\le c_h[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\| + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|]$$

Решение принадлежит пополнению[9] $E^{01,P}$ пространства смежных классов $(H^1(\omega)^N \times \times H^1(\omega)^N)/K$ по норме

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|^2\} \tag{5.7}$$

Это пространство больше, чем в модели $P(1, 1)$.

Теорема 5.2. Пространство $E^{01,P}$, снабженное нормой (5.7), изометрически изоморфично замкнутому линейному подпространству

$$\{(v^0, v^1, v^2) \in E^{01} : \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = 0\}$$

пространства E^{01}, снабженному нормой

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2\}^{1/2}$$

Доказательство. Обозначим через S замкнутое линейное подпространство в E^{01}. По определению

$$\left.\begin{aligned} 2v_n^2 &= \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)_{nn} = 0 \\ P\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = \varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v^2) = e^{1P}(v^0, v^1)$$

Поэтому норма в S совпадает с нормой в $E^{01,P}$, а отображение $(v^0, v^1, v^2) \mapsto (v^0, v^1) : S \to E^{01,P}$ является вполне определенным, линейным, взаимно однозначным и непрерывным. Чтобы показать, что оно сюръективное, построим для каждой пары векторов $(v^0, v^1) \in E^{01,P}$ какой-нибудь вектор $\tilde{v} \in S$, такой что $(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) = (v^0, v^1)$. Сначала рассмотрим $(v^0, v^1) \in Q$ и распространим построение на $E^{01,P}$ в силу плотности и непрерывности. Возьмем $\tilde{v} = (\tilde{v}^0, \tilde{v}^1, \tilde{v}^2) = (v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n)$. Тогда

$$\varepsilon^1(\tilde{v})_{nn} = 2\tilde{v}_n^2 = 2e^1(v^0, v^1)n \cdot n = 0$$

$$P\varepsilon^1(\tilde{v})n = -e^1(v^0, v^1)n + \varepsilon_\Gamma(v^1)n - \frac{1}{2}[D_\Gamma(v^0)D^2b + D^2b^*D_\Gamma(v^0)]n = 0$$

$$\varepsilon^1(\tilde{v}) = \varepsilon^{1P}(\tilde{v}) = e^{1P}(v^0, v^1) \in L^2(\omega)^{N\times N}, \quad \varepsilon^1(\tilde{v})n = e^{1P}(v^0, v^1)n = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{v} = (v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n) \in S$$

В силу плотности и непрерывности это свойство справедливо и для всех $(v^0, v^1) \in E^{01,P}$.

---

[9] В п. (ii) теоремы 2.3 из [27] было показано, что пространство $E^{01,P}$ совпадает с $Q_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1) \in \in H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N : v_\Gamma^1 \in H^1(\omega)^N\}/K$.

При $N = 3$:

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} = 1 + \frac{h^2}{3}(\kappa_2 - \kappa_1^2), \quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)} = \kappa_1$$

Для специального определяющего соотношения вида $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ несложно проверить, что

$$N(u) = [2\mu(u*n + n*u)] \cdot n + 2\lambda u_n n = 2(2\mu + \lambda)u_n n + 2\mu u_\Gamma = g$$

$$\Rightarrow 2u_\Gamma = g_\Gamma/\mu, \quad 2u_n = g_n/(2\mu + \lambda) \Rightarrow 2N^{-1}(g) = g_\Gamma/\mu + g_n/(2\mu + \lambda)n$$

$$g \cdot N^{-1}([C^{-1}\tau]n) = \frac{1}{2\mu + \lambda}[2\mu\tau_{nn} + \lambda\mathrm{tr}\tau]\frac{g_n}{2} + (\tau n) \cdot g_\Gamma$$

Для $\tau \in \mathrm{Sym}_N^P$ имеем $\tau n = 0$, и тогда

$$[C^{-1}\tau]n = 2\mu\tau n + \lambda\mathrm{tr}\tau n = \lambda\mathrm{tr}\tau n, \quad 2N^{-1}([C^{-1}\tau]n) = \lambda/(2\mu + \lambda)\mathrm{tr}\tau n$$

$$T\tau = 2\mu[\tau - \lambda/(2\mu + \lambda)\mathrm{tr}\tau n*n] + \lambda[\mathrm{tr}\tau - \lambda/(2\mu + \lambda)\mathrm{tr}\tau]I =$$
$$= 2\mu\tau + (2\mu\lambda)/(2\mu + \lambda)\mathrm{tr}\tau[I - n*n] = 2\mu\tau + (2\mu\lambda)/(2\mu + \lambda)\mathrm{tr}\tau P$$

Эффективное определяющее соотношение для модели $P(2, 1)$ имеет вид

$$C_{eP}^{-1}\tau = 2\mu\tau + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}(\mathrm{tr}\tau)P, \quad \tau \in \mathrm{Sym}_N^P$$

Отметим, что во второе слагаемое входит P, а не единичный тензор I.

5.3. Модель $P(2_n, 1)$. Вновь перепишем вариационное уравнение в виде

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\alpha_2(h)} C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + \varepsilon^1\right] -$$
$$- F_h^0 \cdot \upsilon^0 - (F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 - (F_h^2 + G_h^1)_n \cdot \upsilon_n^2 d\Gamma = 0$$

Поскольку $\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon_n^2 n) = e^1(\upsilon^0, \upsilon^1) + 2\upsilon_n^2 n*n$, пробные функции вида $(0, 0, \upsilon_n^2)$ приводят к равенству

$$2[C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1)]n \cdot n = (F_h^2 + G_h^1)_n$$

Как и ранее это уравнение единственным образом определяет υ_{hn}^2 как функцию $(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)$. Для пробных функций вида $(\upsilon^0, \upsilon^1, 0)$ вариационное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + C^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon_h^1) \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + e^1\right] -$$
$$- F_h^0 \cdot \upsilon^0 - (F_h^1 + G_h^0) \cdot \upsilon^1 d\Gamma = 0$$

Введем теперь эффективное определяющее соотношение для модели $P(2_n, 1)$, чтобы исключить υ_{hn}^2 и получить вариационное уравнение относительно $(\upsilon_h^0, \upsilon_h^1)$.

Теорема 5.3. Пусть преобразование C задает определяющее соотношение, удовлетворяющее допущению 4.1. Тогда

$$\nu \overset{\text{def}}{=} 2[C^{-1}n*n]_{nn} = N(n)\cdot n > 0 \tag{5.8}$$

Эффективное определяющее соотношение $C_{en}: \mathrm{Sym}_N^n \to \mathrm{Sym}_N^n$, заданное в виде

$$C_{en}^{-1}\tau \overset{\text{def}}{=} C^{-1}\tau - 2\nu^{-1}[C^{-1}\tau]_{nn}C^{-1}(n*n), \quad \tau\in \mathrm{Sym}_N^n \tag{5.9}$$

является взаимно однозначным, симметрическим и коэрцитивным. Если заданы $q_n \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathrm{Sym}_N$, такие что

$$[C^{-1}\tau]_{nn} = g_n \tag{5.10}$$

то для всех $\sigma \in \mathrm{Sym}_N$ справедливы равенства

$$\tau_{nn} = 2\nu^{-1}(g_n - [C^{-1}\tau^n]_{nn}), \quad \tau^n = \tau - \tau_{nn}n*n$$

$$\begin{aligned} C^{-1}\tau &= C_{en}^{-1}\tau^n + 2\nu^{-1}g_nC^{-1}n*n \\ C^{-1}\tau\cdot\cdot\,\sigma &= C_{en}^{-1}\tau^n\cdot\cdot\,\sigma^n + 2\nu^{-1}g_n[C^{-1}\sigma]_{nn} = \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$= C_{en}^{-1}\tau^n\cdot\cdot\,\sigma^n + 2\nu^{-1}g_n[C^{-1}\sigma^n]_{nn} + g_n\sigma_{nn}$$

Доказательство. Представим $\tau \in \mathrm{Sym}_N$ в виде $\tau = \tau n + \tau_{nn}n*n$ и подставим в уравнение (5.10). В результате получим

$$(\nu/2)\tau_{nn} = g_n - [C^{-1}\tau^n]_{nn}$$

В силу коэрцитивности функции N имеем $\nu > 0$. Для $\tau \in \mathrm{Sym}_N$ введем отображение

$$T\tau \overset{\text{def}}{=} C^{-1}\tau - 2\nu^{-1}[C^{-1}\tau]_{nn}C^{-1}(n*n)$$

Согласно допущению 4.1 относительно C имеем $T\tau \in \mathrm{Sym}_N$. По определению T:

$$(T\tau)_{nn} = [C^{-1}\tau]_{nn} - 2\nu^{-1}[C^{-1}(n*n)]_{nn}[C^{-1}\tau]_{nn} = 0$$

а, следовательно, отображение $T: \mathrm{Sym}_N^n \to \mathrm{Sym}_N^n$ вполне определено. Кроме того, в силу симметрии C, τ и $\sigma \in \mathrm{Sym}_N^n$

$$\begin{aligned} \sigma\cdot\cdot\,T\tau &= C^{-1}\sigma\cdot\cdot\,\tau - 2\nu^{-1}[C^{-1}\tau]_{nn}[C^{-1}\sigma]_{nn} = \\ &= (C^{-1}\sigma - 2\nu^{-1}[C^{-1}\sigma]_{nn}C^{-1}(n*n))\cdot\cdot\,\tau = T\sigma\cdot\cdot\,\tau \end{aligned}$$

а, значит, отображение $*T = T$ – симметрическое. Таким образом, T коэрцитивно вследствие коэрцитивности C. Для $\tau \in \mathrm{Sym}_N^n$ с учетом того, что $w_n = -2\nu^{-1}[C^{-1}\tau]_{nn}$, $[T\tau]_{nn} = 0$, имеем

$$T\tau = C^{-1}(\tau + w_nn*n)$$

$$T\tau \cdot\cdot (\tau + w_n n*n) = T\tau \cdot\cdot \tau + w_n [T\tau]_{nn} = T\tau \cdot\cdot \tau$$

В силу коэрцитивности C^{-1}:

$$T\tau \cdot\cdot \tau = C^{-1}(\tau + w_n n*n) \cdot\cdot (\tau + w_n n*n) \geq \alpha \|\tau + w_n n*n\|^2$$

Но так как $\tau_{nn} = 0$, имеем

$$\|\tau + w_n n*n\|^2 = \|\tau\|^2 + 2w_n \tau_{nn} + \|w_n n*n\|^2 = \|\tau\|^2 + \|w_n n*n\|^2 \geq \|\tau\|^2$$

Следовательно, отображение T взаимно однозначно, симметрично и коэрцитивно. Определяя C_{en} как T^{-1}, получаем уравнение (5.9) и далее

$$C^{-1}\tau = C_{en}^{-1}\tau^n + 2\nu^{-1} g_n C^{-1}(n*n)$$

$$\Rightarrow \forall \sigma \in \mathrm{Sym}_N, \quad C^{-1}\tau \cdot\cdot \sigma = C_{en}^{-1}\tau^n \cdot\cdot \sigma^n + 2g_n \nu^{-1} C^{-1}(n*n) \cdot\cdot \sigma$$

$$C^{-1}\tau \cdot\cdot \sigma = C_{en}^{-1}\tau^n \cdot\cdot \sigma^n + 2g_n \nu^{-1}[C^{-1}\sigma]_{nn} =$$

$$= C_{en}^{-1}\tau^n \cdot\cdot \sigma^n + 2\nu^{-1} g_n [C^{-1}\sigma^n]_{nn} + g_n \sigma_{nn}$$

откуда следует второе тождество (5.11). В рассматриваемом случае

$$\tau = \bar{\alpha}_1(h)\varepsilon^0(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_h) + \bar{\alpha}_2(h)\varepsilon^1(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_h, \overset{2}{v}_{hn} n)$$

$$\Rightarrow \tau^n = \bar{\alpha}_1(h)\varepsilon^0(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_{h\Gamma}) + \bar{\alpha}_2(h)e^1(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_h)$$

а, значит, можно исключить переменную $\overset{2}{v}_{hn}$ из вариационного уравнения:

$$\int_\omega \frac{\bar{\alpha}_0(h)\bar{\alpha}_2(h) - \bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)} C^{-1}\varepsilon^0(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_h) \cdot\cdot \varepsilon^0(\overset{0}{v}, \overset{1}{v}) +$$

$$+ C_{en}^{-1}[\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon^0(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_{h\Gamma}) + \bar{\alpha}_2(h)e^1(\overset{0}{v}_h, \overset{1}{v}_h)] \cdot\cdot \left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0(\overset{0}{v}, \overset{1}{v}_\Gamma) + e^1(\overset{0}{v}, \overset{1}{v})\right] d\Gamma =$$

$$= \int_\omega F_h^0 \cdot \overset{0}{v} + (F_h^1 + G_h^0) \cdot \overset{1}{v} - (F_h^2 + G_h^1)_n \nu^{-1}\left[C^{-1}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon^0 + e^1\right]\right]_{nn} d\Gamma =$$

$$= l_h\left(\overset{0}{v}, \overset{1}{v}, -\frac{1}{2}\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\overset{1}{v}_h n - \nu^{-1}\left[C^{-1}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{\bar{\alpha}_2(h)}\varepsilon(\overset{0}{v}, \overset{1}{v}_\Gamma) + e^1(\overset{0}{v}, \overset{1}{v})\right]\right]_{nn} n\right)$$

Как и в случае $P(1, 1)$, решение принадлежит фактор-пространству $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$. Для специального определяющего соотношения $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda \mathrm{tr}\varepsilon I$ и $\tau \in \mathrm{Sym}_N^n$ получаем

$$N(n) = 2[C^{-1}(n*n)]n = 2(2\mu + \lambda)n, \quad \nu = N(n) \cdot n = 2(2\mu + \lambda), \quad \nu^{-1}N(n) = n$$

$$[C^{-1}\tau]n = 2\mu\tau n + \lambda \mathrm{tr}\tau n, \quad [C^{-1}\tau]_{nn} = \lambda \mathrm{tr}\tau$$

$$C_{en}^{-1}\tau = 2\mu\tau + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}\mathrm{tr}\tau P$$

6. Модель Нагди. Исключение переменной v^1_{hn}. В работе [35] было показано, что в случае специального определяющего соотношения $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda \mathrm{tr}\varepsilon I$ квадратичную часть модели Нагди можно записать в виде

$$\int\limits_{\omega} C_e^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v^0, v_\Gamma^1) + \frac{h^2}{3}C_e^{-1}e^{1P}(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) \cdot\cdot\, e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1)d\Gamma$$
$$C_e^{-1} = C_{eP}^{-1} = C_{en}^{-1}, \quad C_e^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + (2\mu\lambda)/(2\mu+\lambda)\mathrm{tr}\varepsilon P \tag{6.1}$$

При сравнении с приведенной моделью $P(2, 1)$ после исключения переменной v_h^2 видно, что основное отличие от модели Нагди[10] состоит в отсутствии переменной v^1_{hn}. Выбирая в приведенном вариационном уравнении пробные функции вида $(0, v_n^1 n)$, получим уравнение для v^1_{hn} как функции $(v_h^0, v^1_{h\Gamma})$. Этот факт следует из того, что в модели $P(2, 1)$ вектор v_n^1 можно выделить в двух тензорах, входящих в приведенное уравнение:

$$\varepsilon^0(v^0, v^1) = \varepsilon^0(v^0, v_\Gamma^1) + v_n^1 n{*}n$$

$$e^{1P}(v^0, v^1) = \varepsilon_\Gamma^P(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2b + D^2b{*}D_\Gamma^P(v^0)] =$$
$$= \varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + v_n^1 D^2 b - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2b + D^2b{*}D_\Gamma^P(v^0)] = e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) + v_n^1 D^2 b$$

Полагая $\mathrm{div}_\Gamma(F_h^2 + G_h^1) \in L^2(\omega)$, приходим к уравнению

$$\frac{\bar\alpha_0(h)\bar\alpha_2(h) - \bar\alpha_1(h)^2}{\bar\alpha_2(h)}[C^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v_h^1)]_{nn} +$$
$$+ [C_{eP}^{-1}(\bar\alpha_1(h)\varepsilon_\Gamma^P(v_h^0) + \bar\alpha_2(h)e^{1P}(v_h^0, v_h^1))] \cdot\cdot\, D^2 b =$$
$$= (F_h^1 + G_h^0)_n + (F_h^2 + G_h^1)\cdot N^{-1}\left(\left[C^{-1}\left(\frac{\bar\alpha_1(h)}{\bar\alpha_2(h)}n{*}n + D^2b\right)\right]n\right) - \mathrm{div}_\Gamma(F_h^2 + G_h^1)$$

Обозначим через f правую часть этого уравнения. Чтобы выделить v^1_{hn}, разложим левую часть уравнения:

$$\left\{\frac{\bar\alpha_0(h)\bar\alpha_2(h) - \bar\alpha_1(h)^2}{\bar\alpha_2(h)}[C^{-1}n{*}n]_{nn} + \bar\alpha_2(h)[C_{eP}^{-1}D^2b] \cdot\cdot\, D^2b\right\}v^1_{hn} +$$

$$+ \frac{\bar\alpha_0(h)\bar\alpha_2(h) - \bar\alpha_1(h)^2}{\bar\alpha_2(h)}[C^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v^1_{h\Gamma})]_{nn} +$$

[10] Эта модель отсутствует в работах Нагди [54, 55], однако такое название используется рядом авторов в литературе (см., например, [4]).

$$+[C_{eP}^{-1}(\bar{\alpha}_1(h)\varepsilon_\Gamma^P(v_h^0)+\bar{\alpha}_2(h)e^{1P}(v_h^0,\, v_{h\Gamma}^1))] \cdot\cdot D^2 b = f$$

При $h \to 0$ выражение

$$\nu_h \overset{\text{def}}{=} \left[\bar{\alpha}_0(h)-\frac{\bar{\alpha}_1(h)^2}{\bar{\alpha}_2(h)}\right]\frac{\nu}{2}+\bar{\alpha}_2(h)[C_{eP}^{-1}D^2 b] \cdot\cdot D^2 b$$

стремится к $\nu/2 > 0$. Поэтому переменную v_{hn}^1 можно выразить через $(v_h^0,\, v_{h\Gamma}^1)$ и подставить в вариационное уравнение относительно $(v_h^0,\, v_{h\Gamma}^1)$ с пробными функциями вида $(v^0,\, v_\Gamma^1)$. Решение принадлежит пополнению[11] E_Γ^{01} фактор-пространства

$$Q_\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(v^0,\, v_\Gamma^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N\}/K \tag{6.2}$$

по норме

$$\{\|\varepsilon^0(v^0,\, v_\Gamma^1)\|^2+\|e^{1P}(v^0,\, v_\Gamma^1)\|^2\}^{1/2} \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. Пространство E_Γ^{01}, снабженное нормой (6.3), изометрически изоморфно замкнутому линейному подпространству

$$\{(v^0,\, v^1,\, v^2) \in E^{01} : \varepsilon^1(v^0,\, v^1,\, v^2)n = 0,\ \varepsilon^0(v^0,\, v^1)_{nn} = 0\}$$

пространства E^{01} с нормой

$$\{\|\varepsilon^0(v^0,\, v^1)\|^2+\|\varepsilon^1(v^0,\, v^1,\, v^2)\|^2\}^{1/2}$$

Доказательство. Обозначим это замкнутое линейное подпространство через S. По определению

$$v_n^1 = \varepsilon^0(v^0,\, v^1)_{nn} = 0 \Rightarrow \varepsilon^0(v^0,\, v^1) = \varepsilon^0(v^0,\, v_\Gamma^1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2v_n^2 &= \varepsilon^1(v^0,\, v^1,\, v^2)_{nn} = 0 \\ P\varepsilon^1(v^0,\, v^1,\, v^2)n &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \varepsilon^1(v^0,\, v^1,\, v^2) = e^{1P}(v^0,\, v^1) = e^{1P}(v^0,\, v_\Gamma^1)$$

Следовательно, норма в S совпадает с нормой в E_Γ^{01}, а отображение

$$(v^0,\, v^1,\, v^2) \mapsto (v^0,\, v_\Gamma^1) : S \to E_\Gamma^{01}$$

вполне определено, линейно и непрерывно. Покажем, что оно также сюръективно. Для каждой пары векторов $(v^0,\, v_\Gamma^1) \in E_\Gamma^{01}$ построим вектор $\tilde{v} \in S$, такой что $(\tilde{v}^0,\, \tilde{v}^1) = (v^0,\, v_\Gamma^1)$. Сначала рассмотрим $(v^0,\, v_\Gamma^1) \in Q_\Gamma$ и обобщим наше построение на E_Γ^{01} в силу плотности и непрерывности. Возьмем $\tilde{v} = (\tilde{v}^0,\, \tilde{v}^1,\, \tilde{v}^2) = (v^0,\, v_\Gamma^1,\, D^2 b\varepsilon^0(v^0,\, v_\Gamma^1)n)$. Тогда

---

[11] В п. (i) теоремы 2.3 из [27] показано, что $E_\Gamma^{01} = Q_\Gamma$.

$$\varepsilon^0(\tilde{v}) = \varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma) \in L^2(\omega)^{N\times N}, \quad \varepsilon^0(\tilde{v})_{nn} = \varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)_{nn} = 0 \tag{6.4}$$

Кроме того

$$\varepsilon^1(\tilde{v})_{nn} = 2\tilde{v}_n^2 = 2D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n\cdot n = 0$$

$$P\varepsilon^1(\tilde{v})n = D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n + \varepsilon_\Gamma(v^1_\Gamma)n - \frac{1}{2}[D_\Gamma(v^0)D^2b + D^2b^*D_\Gamma(v^0)]n =$$

$$= D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n - \frac{1}{2}[D^2bv^1_\Gamma + D^2b^*D_\Gamma(v^0)n] =$$

$$= D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma) - D^2b\left[\frac{1}{2}v^1_\Gamma + \varepsilon_\Gamma(v^0)n\right] = 0$$

Из равенств (6.4) и соотношений

$$\varepsilon^1(\tilde{v}) = \varepsilon^{1P}(\tilde{v}) = e^{1P}(v^0, v^1_\Gamma) \in L^2(\omega)^{N\times N}, \quad \varepsilon^1(\tilde{v})n = e^{1P}(v^0, v^1_\Gamma)n = 0$$

следует

$$\tilde{v} = (v^0, v^1_\Gamma, D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n) \in S$$

В силу плотности и непрерывности это свойство распространяется и на все $(v^0, v^1_\Gamma) \in E^{01}_\Gamma$.

Новая упрощенная форма вариационного уравнения содержит те же переменные, что и модель Нагди. Но, очевидно, необходимы дальнейшие упрощения. Сначала предположим, что $j_z \simeq 1$ в $S_h(\omega)$. Тогда вариационное уравнение (4.39) принимает более простой вид

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0_h \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + \frac{h^2}{3}C^{-1}\varepsilon^1_h \cdot\cdot\, \varepsilon^1 d\Gamma = \tilde{l}_h(v^0, v^1, v^2)$$

$$\tilde{l}_h(v^0, v^1, v^2) \overset{\text{def}}{=} \int_\omega \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F\circ T\cdot(v^0 + zv^1 + z^2v^2) + G\circ T\cdot(v^1 + 2zv^2)dzd\Gamma$$

После исключения переменной v^2_h, получаем

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0_h \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + \frac{h^2}{3}C^{-1}_{eP}e^{1P}_h \cdot\cdot\, e^{1P}d\Gamma = \tilde{l}_h(v^0, v^1, -e^1n) - \tilde{l}_h(0, 0, N^{-1}([C^{-1}e^{1P}]n))$$

где существует такая константа $c_h > 0$, что

$$\left|\tilde{l}_h(v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n)\right| \le c_h[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\| + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|]$$

Как уже отмечалось выше, переменная v^1_{hn} удовлетворяет уравнению

$$\left\{[C^{-1}n^*n]_{nn} + \frac{h^2}{3}[C^{-1}_{eP}D^2b] \cdot\cdot\, D^2b\right\}v^1_{hn} + [C^{-1}\varepsilon^0(v^0_h, v^1_{h\Gamma})]_{nn} + \frac{h^2}{3}[C^{-1}_{eP}e^{1P}(v^0_h, v^1_{h\Gamma})] \cdot\cdot\, D^2b = f$$

где существует такая функция $f \in L^2(\omega)$, что для всех $v_n^1 \in L^2(\omega)$ справедливо равенство

$$\int_\omega f v_n^1 d\Gamma = \tilde{l}_h(0, v_n^1 n, -e^1(0, v_n^1 n)n) - \tilde{l}_h(0, 0, v_n^1 N^{-1}([C^{-1} D^2 b]n))$$

Дальнейшие построения аналогичны тем, что использовались для модели $P(2_n, 1)$, где переменная v_{hn}^2 исключалась из $\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_{hn}^2 n)$. Пренебрежем нелинейными членами порядка h^2 и старше, предполагая малость h ($h \to 0$):

$$[C^{-1} n * n]_{nn} + \frac{h^2}{3}[C_{eP}^{-1} D^2 b] \cdot\cdot D^2 b \simeq [C^{-1} n * n]_{nn} = \frac{\nu}{2}$$

$$2 v_{hn}^1 \simeq \nu^{-1}\{f - [C^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v_{h\Gamma}^1)]_{nn}\}$$

Тогда имеем

$$C^{-1}\varepsilon_h^0 = C^{-1}([\varepsilon_h^{0n} - (2\nu)^{-1}[C^{-1}\varepsilon_h^{0n}]_{nn} n * n]) + (2\nu)^{-1}[C^{-1} n * n] f =$$

$$= C_{en}^{-1}\varepsilon_h^{0n} + (2\nu)^{-1}[C^{-1} n * n] f$$

$$\Rightarrow C_{eP}^{-1} e_h^{1P} = C_{eP}^{-1} e^{1P}(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) + C_{eP}^{-1} D^2 b (2\nu)^{-1}(f - [C^{-1}\varepsilon_h^{0n}]_{nn})$$

В итоге получаем

$$C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot \varepsilon^{0n} = C_{en}^{-1}\varepsilon_h^{0n} \cdot\cdot \varepsilon^{0n} + (2\nu)^{-1} f [C^{-1}\varepsilon^{0n}]_{nn}$$

$$C_{eP}^{-1} e_h^{1P} \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) = C_{eP}^{-1} e^{1P}(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) -$$

$$- (2\nu)^{-1}[C^{-1}\varepsilon_h^{0n}]_{nn}[C_{eP}^{-1} D^2 b] \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) +$$

$$+ (2\nu)^{-1} f [C_{eP}^{-1} D^2 b] \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1)$$

В результате вариационное уравнение принимает вид

$$\int_\omega C_{en}^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) \cdot\cdot \varepsilon^0(v^0, v_\Gamma^1) + \frac{h^2}{3} C_{eP}^{-1} e^{1P}(v_h^0, v_{h\Gamma}^1) \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) -$$

$$- \frac{h^2}{3}\frac{1}{2\nu}[C^{-1}\varepsilon^0(v_h^0, v_{h\Gamma}^1)]_{nn}[C_{eP}^{-1} D^2 b] \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1) d\Gamma =$$

$$= -\int_\omega (2\nu)^{-1} f \left[[C^{-1}\varepsilon^{0n}]_{nn} + \frac{h^2}{3}[C_{eP}^{-1} D^2 b] \cdot\cdot e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1)\right] d\Gamma +$$

$$+ \tilde{l}_h(v^0, v_\Gamma^1, -e^1(v^0, v_\Gamma^1)n) - \tilde{l}_h(0, 0, N^{-1}[C^{-1} e^{1P}(v^0, v_\Gamma^1)]n)$$

Полагая $(v^0, v^1_\Gamma) = (v^0_h, v^1_{h\Gamma})$ и сравнивая третье слагаемое в левой части с суммой первых двух, устанавливаем, что оно имеет порядок h. Пренебрегая им в энергетическом балансе, для квадратичной части приведенного вариационного уравнения получаем

$$\int\limits_\omega C^{-1}_{en}\varepsilon^0(v^0_h, v^1_{h\Gamma}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma) + \frac{h^2}{3}C^{-1}_{eP}e^{1P}(v^0_h, v^1_{h\Gamma}) \cdot\cdot\, e^{1P}(v^0, v^1_\Gamma)d\Gamma \tag{6.5}$$

При специальном определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda \mathrm{tr}\varepsilon I$, $C^{-1}_{eP} = C^{-1}_{en}$, это выражение в точности совпадает с квадратичной частью модели Нагди. Точно такие же рассуждения справедливы, когда однородные граничные условия первого рода заданы на некоторой части γ_0 границы γ с пополнением[12] $E^{01}_{\gamma_0\Gamma}$ пространства

$$\{(v^0, v^1_\Gamma) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^N\} \tag{6.6}$$

по норме (6.3), изометрически изоморфного подпространству из $E^{01}_{\gamma_0}$, такому что $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = 0$ и $\varepsilon^0(v^0, v^1)_{nn} = 0$.

Существование и единственность решения линейной модели Нагди для срединных поверхностей из класса $C^{1,1}$ независимо исследовались в работе [6] в рамках ковариантно-контравариантного подхода.

7. Модель Койтера. Замена тензора кривизн ρ. В работе [35] показано, что для специального определяющего соотношения $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ квадратичная часть линейной модели Койтера есть модель Нагди (6.1) с дополнительным условием Лява–Кирхгоффа

$$v^1_\Gamma = D^2 b v^0_\Gamma - \nabla_\Gamma v^0_n$$

Эта модель появляется при исключении переменной v^1_Γ из модели (6.1). Несложно проверить, что это условие можно записать в любой из указанных ниже форм:

$$P\varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0, \quad P\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n = 0, \quad v^1_\Gamma + 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n = 0$$

Ниже будет видно, что такие описания представляют больший интерес, нежели исходное, поскольку в них от срединной поверхности требуется только непрерывность класса $C^{1,1}$–, а не $C^{2,1}$. При данном условии тензоры $\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)$ и $e^{1P}(v^0, v^1_\Gamma)$, входящие в уравнение Нагди, принимают вид

$$\varepsilon^0(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) = e^P_\Gamma(v^0), \quad e^{1P}(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)$$

Из работ [35, 39] известно, что $e^P_\Gamma(v^0)$ – линеаризованное изменение метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$, а $\rho(v^0) \overset{\text{def}}{=} e^{1P}(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)$ есть изменение тензора кривизн. Ниже увидим, что тензор $\rho(v^0)$ при условии $e^P_\Gamma(v^0) = 0$ совпадает с тензором, входящим в асимптоти-

[12] Как и в случае с E^{01}_Γ, из п. (i) теоремы 2.3 из [27] следует, что $E^{01}_{\gamma_0\Gamma} = \{(v^0, v^1_\Gamma) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^N\}$.

ческое изгибное уравнение. Оба тензора будут описывать пространство решений уравнения Койтера. Сначала определим базовое пространство.

7.1. Тензор ρ и функциональное пространство W^0. Вспомним определение $e^1(v^0, v^1) = \varepsilon^1(v^0, v^1, 0)$. Выражение

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)^2\| + \|e^1(v^0, v^1)\|^2 + \|v^0\|^2 + \|v^1_\Gamma\|^2\}^{1/2}$$

эквивалентно норме в пространстве $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$, а выражение

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^1(v^0, v^1)\|^2\}^{1/2} \tag{7.1}$$

представляет собой норму, эквивалентную канонической фактор-норме в пространстве $Q = (H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$, определенном в п. 1 теоремы 4.3.

Теорема 7.1. 1. Замкнутое линейное подпространство

$$\{(v^0, v^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N : \varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0\} \tag{7.2}$$

снабженное нормой (7.1), является гильбертовым пространством, изометрически изоморфным гильбертову пространству

$$W^0 \overset{\text{def}}{=} \{v^0 \in H^1(\omega)^N : \varepsilon_\Gamma(v^0)n \in H^1(\omega)^N\} \tag{7.3}$$

с нормой

$$\{\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\|^2 + \|\rho(v^0)\|^2 + \|2\varepsilon_\Gamma(v^0)n\|^2 + \|v^0\|^2\}^{1/2} \tag{7.4}$$

$$\rho(v^0) \overset{\text{def}}{=} e^{1P}(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n), \quad v^0 \in W^0 \tag{7.5}$$

2. Каноническая фактор-норма гильбертова пространства

$$W^0/K^0, K^0 \overset{\text{def}}{=} \ker\varepsilon^P_\Gamma \cap \ker\rho \tag{7.6}$$

эквивалентна норме

$$\{\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\|^2 + \|\rho(v^0)\|^2\}^{1/2} \tag{7.7}$$

В частности тензор ρ вполне определен и непрерывен в этом пространстве, а из описания элементов пространства $K = \ker\varepsilon^0 \cap \ker e^1$ следует $K^0 = \{v^0 : v^0(X) = a + AX, a \in \mathbb{R}^N$, A – матрица $N \times N$, такая что $A + {}^*A = 0\}$.

Пространство W^0/K^0 с нормой (7.7) изометрически изоморфно замкнутому линейному подпространству

$$\{(v^0, v^1) \in Q : \varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0\}$$

пространства Q, снабженного нормой (7.1), и замкнутому линейному подпространству

$$\{(v^0, v^1, v^2) \in E^{01} : \varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0, \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = 0\}$$

пространства E^{01}, снабженного нормой

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2\}^{1/2}$$

3. При однородных граничных условиях первого рода на части γ_0 границы γ области ω имеем совершенно аналогичные построения

$$W^0_{\gamma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{v^0 \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N : \varepsilon_\Gamma(v^0)n \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N\}$$

причем ситуация здесь более простая, так как $K = \{(0, 0)\}$ и $K^0 = \{0\}$.

Доказательство.

1. Через R обозначим линейное подпространство (7.2) из $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$. Оно замкнуто в силу непрерывности линейного ограничения $\varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0$. Для пары векторов $(v^0, v^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$, такой что $\varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0$, имеем

$$v^1_n = \varepsilon^0(v^0, v^1)_{nn} = 0, \quad e^1(v^0, v^1)n = -D^2b\varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^0(v^0, v^1) = \varepsilon^P_\Gamma(v^0), \quad e^1(v^0, v^1) = e^{1P}(v^0, v^1)$$

Далее, поскольку $v^1 \in H^1(\omega)^N$, получаем

$$v^1_n = 0, \quad 0 = P\varepsilon^0(v^0, v^1)n = \frac{1}{2}v^1_\Gamma + \varepsilon_\Gamma(v^0)n$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n = -v^1_\Gamma = -v^1 \in H^1(\omega)^N$$

а следовательно тензор $\rho(v^0)$ вполне определен, линеен и непрерывен в R. Поэтому норма в R равна норме в W^0, а отображение $(v^0, v^1) \mapsto v^0 : R \to W^0$ вполне определено, линейно и непрерывно. Покажем, что оно также сюръективно. Для этого достаточно показать, что

$$v^0 \in W^0 \Rightarrow \tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} (v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) \in R$$

В самом деле, так как $\varepsilon_\Gamma(v^0)n \cdot n = 0$, имеем

$$\varepsilon^0(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1)n = [\varepsilon_\Gamma(v^0) - (\varepsilon_\Gamma(v^0)n{*}n + n{*}(\varepsilon_\Gamma(v^0)n))]n = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^0(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) = \varepsilon^{0P}(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) = \varepsilon^P_\Gamma(\tilde{v}^0) = \varepsilon^P_\Gamma(v^0)$$

Кроме того, поскольку $\tilde{v}^1_n = 0$, $\tilde{v}^1 = \tilde{v}^1_\Gamma$, получаем

$$e^1(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1)n = \left\{\varepsilon_\Gamma(\tilde{v}^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma(\tilde{v}^0)D^2b + D^2b{*}D_\Gamma(\tilde{v}^0)]\right\}n =$$

$$= \varepsilon_\Gamma(\tilde{v}^1)n - \frac{1}{2}D^2b{*}D_\Gamma(\tilde{v}^0)n = -D^2b\left(\frac{1}{2}\tilde{v}^1_\Gamma + \varepsilon_\Gamma(\tilde{v}^0)n\right) = -D^2b\varepsilon^0(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1)n = 0$$

$$\Rightarrow e^1(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) = e^{1P}(\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) \Rightarrow (\tilde{v}^0, \tilde{v}^1) \in R$$

2. Характеристики пространства K^0 непосредственно следуют из характеристик элементов пространств K и $K = \ker\varepsilon^0 \cap \ker e^1 \subset R$. Обозначим через Q' линейное подпространство из Q. Оно замкнуто и линейно в силу непрерывности и линейности ограничения $\varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0$. Поэтому биекция из R в W^0 из п. 1 переходит в биекцию из Q' в W^0/K^0. При $(v^0, v^1) \in Q'$ получаем выражение для нормы

$$\inf_{v^0 \in K^0} \{\|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\|^2 + \|\rho(v^0)\|^2 + \|v^0\|^2 + \|2\varepsilon_\Gamma(v^0)n\|^2\}^{1/2} =$$

$$= \inf_{(v^0, v^1) \in K} \{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^1(v^0, v^1)\|^2 + \|v^0\|^2 + \|v_\Gamma^1\|^2\}^{1/2}$$

Но справа стоит фактор-норма в пространстве Q, которая эквивалентна норме (7.1). Кроме того в Q':

$$\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^1(v^0, v^1)\|^2\}^{1/2} = \{\|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\|^2 + \|\rho(v^0)\|^2\}^{1/2}$$

Поэтому фактор-норма в W^0/K^0 эквивалентна норме (7.7). В частности тензор $\rho(v^0)$ вполне определен, линеен и непрерывен в W^0/K^0.

Чтобы завершить доказательство п. 2, покажем, что Q' изометрически изоморфно некоторому замкнутому линейному подпространству S из E^{01}. Если дано $(v^0, v^1, v^2) \in S$, то

$$\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = 0 \Rightarrow \varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = \varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v^2) = e^{1P}(v^0, v^1) = e^1(v^0, v^1)$$

а, значит, $(v^0, v^1) \in Q'$. Кроме того норма в S равна норме в Q'. Следовательно, инъективное отображение $(v^0, v^1, v^2) \mapsto (v^0, v^1) : S \to Q'$ линейно и непрерывно. Покажем, что оно также сюръективно. Для этого достаточно показать, что

$$\forall (v^0, v^1) \in Q' \Rightarrow \tilde{v} = (v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n) \in S$$

По определению

$$\varepsilon^0(\tilde{v}) = \varepsilon^0(v^0, v^1), \quad \varepsilon^0(\tilde{v})n = \varepsilon^0(v^0, v^1)n = 0$$

$$\tilde{v}_n^2 = -e^1(v^0, v^1)n \cdot n = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^1(\tilde{v})n = e^1(v^0, v^1)n + \tilde{v}_n^2 = e^1(v^0, v^1)n - e^1(v^0, v^1)n = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^1(\tilde{v}) = \varepsilon^{1P}(\tilde{v}) = e^{1P}(\tilde{v}) = e^{1P}(v^0, v^1) = e^1(v^0, v^1)$$

а, значит, $\tilde{v} \in S$, что и требовалось доказать.

7.2. Пространства W^0 и $W^0_{\gamma_0}$ для срединных поверхностей из $C^{2,1}$. Для несколько более гладкой срединной поверхности Γ, такой что $b \in C^{2,1}(\overline{S_h(\omega)})$, справедливы вложения

$$v_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N, \quad b \in C^{2,1}(\overline{S_h(\omega)}) \Rightarrow D^2 b v_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N$$

Используя декомпозицию, получаем

$$2\varepsilon_\Gamma(v^0)n = \nabla_\Gamma v_n^0 - D^2 b v_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N \Rightarrow \nabla_\Gamma v_n^0 \in H^1(\omega)^N \Rightarrow v_n^0 \in H^2(\omega)$$

Значит, при $b \in C^{2,1}(\overline{S_h(\omega)})$ пространство W^0 описывается следующим образом:

$$W^0 = \{v^0 \in H^1(\omega)^N : v_n^0 \in H^2(\omega)\}$$

В литературе таким свойством обладают срединные поверхности гладкости C^3, а данное определение является естественным обобщением срединных поверхностей гладкости $C^{1,1}$.

При однородных граничных условиях первого рода на части γ_0 границы γ области ω имеем совершенно аналогичные построения. При $b \in C^{2,1}(\overline{S_h(\omega)})$ для пространства $W^0_{\gamma_0}$ справедливо эквивалентное представление

$$W^0_{\gamma_0} = \{v^0 \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N : \nabla_\Gamma v^0_n \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N\}$$

Отсюда следует, что для нормальной составляющей v^0_n справедливы соотношения

$$v^0_n \in H^1_{\gamma_0}(\omega) \cap H^2(\omega), \quad \nabla_\Gamma v^0_n = 0 \text{ на } \gamma_0$$

Но касательная составляющая следа тензора $\nabla_\Gamma v^0_n$ в γ_0 равно нулю, поскольку $v^0_n = 0$ на γ_0, а указанное условие можно записать в виде $\nabla_\Gamma v^0_n \cdot \nu = 0$, где ν – внешняя нормаль к γ, т.е.

$$\frac{\partial v^0_n}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \gamma_0 \Rightarrow v^0_n \in H^2_{\gamma_0}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \in H^2(\omega) : v = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \gamma_0 \right\}$$

$$\Rightarrow W^0_{\gamma_0} = \{v^0 \in H^1_{\gamma_0}(\omega) : v^0_n \in H^2_{\gamma_0}(\omega)\}$$

Все остальные определения остаются такими же с очевидными поправками. В случае условий первого рода тензоры $\varepsilon^P_\Gamma(v^0)$ и $\rho(v^0)$, введенные для липшицевых областей ω подмногообразий класса $C^{1,1}$, совпадают с тензорами $\gamma^{new}_{\alpha\beta}$ и $\Upsilon^{new}_{\alpha\beta}$ (см. [7]).

7.3. Модель Койтера как проекция модели Нагди. Линейную модель Койтера нельзя получить простым исключением переменной $v^1_{h\Gamma}$ из модели Нагди, поскольку в процессе преобразования последней условие Лява–Кирхгоффа не возникает автоматически. Однако модель Койтера можно рассматривать как уравнение проекции $(w^0_h, w^1_h) = \pi v_h$ решения $v_h = (v^0_h, v^1_h)$ модели Нагди на подпространство

$$E^K \overset{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1_\Gamma) \in E^{01}_\Gamma : \varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n = 0\}$$

или

$$E^K_{\gamma_0} \overset{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1_\Gamma) \in E^{01}_{\gamma_0\Gamma} : \varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n = 0\}$$

Это уравнение задается через эквивалентную норму и имеет вид

$$\int_\omega C^{-1}_{en}\varepsilon^0(v - \pi v) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\omega) + \frac{h^2}{3} C^{-1}_{eP} e^{1P}(v - \pi v) \cdot\cdot\, e^{1P}(\omega) d\Gamma = 0$$

для всех $w \in E^K$ (или $w \in E^K_{\gamma_0}$). Пространство E^K (соотв. $E^K_{\gamma_0}$) изоморфно пространству $\{(v^0, v^1_\Gamma) \in Q$ (соотв. Q_{γ_0}) : $\varepsilon^0(v^0, v^1_\Gamma)n = 0\}$, которое в свою очередь изоморфно пространству $W^0/K^0(W^0_{\gamma_0})$.

В силу теоремы 7.1 справедлива следующая теорема существования.

Теорема 7.2. Пусть справедливо допущение 4.1 о C и пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ, являющейся в свою очередь границей некоторого множество класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

1. Пусть задана функция $l \in (W^0)'$, такая что

$$l(v) = 0 \text{ в } K^0 \tag{7.8}$$

Тогда вариационное уравнение

$$\forall v^0 \in W^0, \quad \int\limits_\omega [C^{-1}_{en}\varepsilon^P_\Gamma(w^0_h)] \cdot\cdot\, \varepsilon^P_\Gamma(v^0) + \frac{h^2}{3}[C^{-1}_{eP}\rho(w^0_h)] \cdot\cdot\, \rho(v^0)d\Gamma = l(v^0) \tag{7.9}$$

имеет единственное решение w^0_h в W^0/K^0.

2. Пусть область ω является связной и пусть γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. При $l \in (W^0_{\gamma_0})'$ вариационное уравнение

$$\forall v^0 \in W^0_{\gamma_0}, \quad \int\limits_\omega [C^{-1}_{en}\varepsilon^P_\Gamma(w^0_h)] \cdot\cdot\, \varepsilon^P_\Gamma(v^0) + \frac{h^2}{3}[C^{-1}_{eP}\rho(w^0_h)] \cdot\cdot\, \rho(v^0)d\Gamma = l(v^0) \tag{7.10}$$

имеет единственное решение w^0_h в $W^0_{\gamma_0}$.

3. Пункты *1* и *2* остаются справедливыми и при замене C_{en} на C_{eP}.

Далее увидим, что модель Койтера можно также соотнести с системой двух уравнений асимптотической модели оболочек, где слагаемое $[C^{-1}_{en}\varepsilon^P_\Gamma(v^0_h)] \cdot\cdot\, \varepsilon^P_\Gamma(v^0)$ заменяется на $[C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(v^0_h)] \cdot\cdot\, \varepsilon^P_\Gamma(v^0)$. Такая замена не влияет на выводы приведенной теоремы существования. Для указанного специального определяющего соотношения справедливо равенство $C^{-1}_{en} = C^{-1}_{eP}$, а следовательно, нет и различия, хотя в общем случае при произвольном определяющем соотношении (произвольном C), удовлетворяющем допущению 4.1, различны два слагаемых.

7.4. Тензор ρ и асимптотическое уравнение доминирующего изгиба. При всех v^0, таких что $\varepsilon^P_\Gamma(v^0) = 0$, тензор $\rho(v^0)$ в точности совпадает с тензором

$$\rho_{\alpha\beta}(v^0) \stackrel{\text{def}}{=} \{D^P_\Gamma(D^2 b v^0_\Gamma - \nabla_\Gamma v^0_n) + {}^*D^P_\Gamma(v^0_\Gamma)D^2 b + v^0_n(D^2 b)^2\}_{\alpha\beta}$$

(при $a_3 = a^3 = -n$), входящим в вариационное уравнение в случае изгиба [21, 22]. Покажем это. Введем временное обозначение

$$\tilde\rho(v^0) \stackrel{\text{def}}{=} D^P_\Gamma(D^2 b v^0_\Gamma - \nabla_\Gamma v^0_n) + {}^*D^P_\Gamma(v^0_\Gamma)D^2 b + v^0_n(D^2 b)^2$$

для того, чтобы различать эти два тензора. С помощью тождества

$$0 = \varepsilon_\Gamma^P(v^0) = \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0) + {*D_\Gamma^P}(v^0)]$$

запишем $\tilde{\rho}$ в виде

$$\tilde{\rho}(v^0) = D_\Gamma^P(D^2 b v_\Gamma^0 - \nabla_\Gamma v_n^0) + {*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b =$$
$$= D_\Gamma^P(D^2 b v_\Gamma^0 - \nabla_\Gamma v_n^0) - D_\Gamma^P(v^0)D^2 b =$$
$$= D_\Gamma^P(D^2 b v_\Gamma^0 - \nabla_\Gamma v_n^0) - D_\Gamma^P(v_\Gamma^0)D^2 b - v_n^0(D^2 b)^2$$

При $(v^0, v^1) \in \ker \varepsilon^0$ имеем $v_\Gamma^1 + {*D_\Gamma}(v^0)n = 0$, $v_n^1 = 0$, а также

$$0 = D_\Gamma(v_\Gamma^1 + {*D_\Gamma}(v^0)n) = D_\Gamma(v_\Gamma^1) + {*D_\Gamma}(v^0)D^2 b + \sum_k n_k D_\Gamma^2(v_k^0)$$

$$0 = D_\Gamma^P(v_\Gamma^1 + {*D_\Gamma}(v^0)n) = D_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + {*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b + \sum_k n_k P D_\Gamma^2(v_k^0)$$

$$0 = \varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + \frac{1}{2}[{*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b + D^2 b D_\Gamma^P(v^0)] + \sum_k n_k P D_\Gamma^2(v_k^0)$$

поскольку известно [35], что тензор $PD_\Gamma^2(v_k^0) = \varepsilon_\Gamma^P(\nabla_\Gamma(v_k^0))$ является симметрическим. Поэтому

$$\varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + \frac{1}{2}[{*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b + D^2 b D_\Gamma^P(v^0)] = D_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + {*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b = \tilde{\rho}(v^0)$$

$$\varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) + \frac{1}{2}[{*D_\Gamma^P}(v^0)D^2 b + D^2 b D_\Gamma^P(v^0)] =$$
$$= \varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2 b + D^2 b {*D_\Gamma^P}(v^0)] + \varepsilon_\Gamma^P(v^0)D^2 b + D^2 b \varepsilon_\Gamma^P(v^0) =$$
$$= \varepsilon_\Gamma^P(v^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2 b + D^2 b {*D_\Gamma^P}(v^0)] = e^{1P}(v^0, v^1) = e^1(v^0, v^1)$$

в силу того, что $\varepsilon_\Gamma^P(v^0) = 0$ и $v_n^1 = 0$. Следовательно, при $(v^0, v^1) \in \ker \varepsilon^0$ имеем $v^1 = -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n$ и

$$\tilde{\rho}(v^0) = e^{1P}(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) = -\sum_k n_k P D_\Gamma^2(v_k^0) = -\sum_k n_k \varepsilon_\Gamma^P(\nabla_\Gamma(v_k^0))$$

$$\Rightarrow \forall v^0 \in \ker \varepsilon_\Gamma^P, \quad \rho(v^0) = \tilde{\rho}(v^0) = -\sum_k n_k P D_\Gamma^2(v_k^0) = -\sum_k n_k \varepsilon_\Gamma^P(\nabla_\Gamma(v_k^0))$$

8. Первая часть асимптотической модели оболочки. Асимптотическая модель $P(1, 0)$. По определению модель $P(1, 0)$ описывается вариационным уравнением

$$\forall v = (v^0, v^1), \quad \int_\omega \bar{\alpha}_0(h)[C^{-1}\varepsilon^0(v_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v) - f^0 \cdot v^0 - g^0 \cdot v^1]d\Gamma = 0$$

Вариационное уравнение, полученное из члена B_0^0 в выражении (4.24):

$$\forall(v^0, v^1), \quad \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v^0, v^1) - f^0 \cdot v^0 - g^0 \cdot v^1 d\Gamma = 0 \tag{8.1}$$

совпадает с асимптотической моделью $P(1, 0)$, т.е. моделью $P(1,0)$, в которой коэффициенты $\bar{\alpha}_0(h) \to 1$ при $h \to 0$. В разд. 8.2 увидим, что это уравнение можно расщепить на два: уравнение, содержащее слагаемые Лява–Кирхгоффа и вариационное уравнение, которое обобщает уравнение безмоментной оболочки при рассматриваемом специальном определяющем соотношении на случай произвольного определяющего соотношения.

8.1. Существование решений асимптотической модели P(1, 0). Сначала покажем существование решения вариационного уравнения (8.1), для чего введем соответствующее фактор-пространство для решения. Из [35, 39] известно, что

$$\left\{\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^0\|^2_{L^2(\omega)} + \|v^1_\Gamma\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

есть норма, эквивалентная стандартной норме в пространстве $H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$, и что $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|$ – норма в фактор-пространстве $(H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker \varepsilon^0$, которая в общем случае порождает более слабую топологию, нежели топология, порождаемая канонической нормой в фактор-пространстве. Обозначим через E^0 пополнение[13] этого фактор-пространства по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(v^0, v^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w^0, w^1)d\Gamma \tag{8.2}$$

В процессе пополнения все три члена в декомпозиции нормы $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|$

$$\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0_\Gamma) + v^0_n D^2 b\|_{L^2(\omega)}, \quad \|v^1_\Gamma + \nabla_\Gamma v^0_n - D^2 b\, v^0_\Gamma\|_{L^2(\omega)}, \quad \|v^1_n\|_{L^2(\omega)}$$

остаются конечными. В однородной задаче Дирихле с граничными условиями, заданными на части γ_0 границы γ, обозначим через $E^0_{\gamma_0}$ пополнение фактор-пространства

$$(H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\, \varepsilon^0, \quad H^1_{\gamma_0}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^1(\omega) : v = 0 \text{ на } \gamma_0\}$$

по норме, порождаемой скалярным произведением (8.2).

Теорема 8.1. Пусть справедливо допущение 4.1 о C и пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

[13] Пространство E^0 можно описать на основании декомпозиции тензора $\varepsilon^0(v^0, v^1)$ и описания пространства E^P (см. [28, 29]).

1. При $l^0 \in (E^0)'$ вариационное уравнение

$$\forall(v^0, v^1) \in E^0, \quad \int_\omega [C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1)] \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v^0, v^1)d\Gamma = l^0(v^0, v^1) \tag{8.3}$$

имеет единственное решение ($\hat{v}^0$, $\hat{v}^1$) в E^0.

2. Пусть область ω – связная и пусть γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество γ, такое, что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. При $l^0 \in (E^0_{\gamma_0})'$ вариационное уравнение

$$\forall(v^0, v^1) \in E^0_{\gamma_0}, \quad \int_\omega [C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1)] \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v^0, v^1)d\Gamma = l^0(v^0, v^1) \tag{8.4}$$

имеет единственное решение ($\hat{v}^0$, $\hat{v}^1$) в $E^0_{\gamma_0}$.

В общем случае $l^0 \in (E^0)'$:

$$l^0(v^0, v^1) = l^0(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) + l^0(0, v^1 + 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) =$$

$$= l^0(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) + l^0(0, 2\varepsilon^0(v^0, v^1)n)$$

При $v^0 = 0$ и $2\varepsilon^0(0, v^1)n = v^1 {*} n + n {*} v^1$ выполняются неравенства

$$\left|l^0(0, v^1)\right| \le c\left\|v^1 {*} n + n {*} v^1\right\| \le 2c\left\|v^1\right\|_{L^2(\omega)}$$

$$\Rightarrow \exists g^0 \in L^2(\omega)^N, \quad \forall w \in L^2(\omega)^N, \quad l^0(0, w) = \int_\omega g^0 \cdot w d\Gamma$$

Следовательно, наличие функции $l^0 \in (E^0)'$ (соответственно $(E^0_{\gamma_0})'$) эквивалентно существованию константы $c > 0$, такой что

$$\begin{aligned} &\left|l^0(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)\right| \le c\left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\right\|_{L^2(\omega)}, \quad \forall v^0 \in H^1(\omega)^N (H^1_{\gamma_0}(\omega)^N) \\ &\left|l^0(0, w)\right| \le c\|w\|_{L^2(\omega)}, \quad \forall w \in L^2(\omega)^N \end{aligned} \tag{8.5}$$

Для специальной правой части выбрано

$$l^0(v^0, v^1) = \int_\omega f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1 d\Gamma, \quad f^0, g^0 \in L^2(\omega)^N$$

где функция g^0 имеет общий вид. Кроме того, условие (8.5) принимает вид

$$\begin{aligned} &\exists c > 0, \quad \forall v^0 \in H^1(\omega)^N \text{ (соотв. } H^1_{\gamma_0}(\omega)^N) \\ &\left|\int_\omega f^0 \cdot v^0 - g^0 \cdot 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n d\Gamma\right| \le \left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\right\|_{L^2(\omega)} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Далее, раскладывая члены $\varepsilon_\Gamma(v^0)n$ и $\varepsilon^P_\Gamma(v^0)$, при всех $v^0 \in H^1(\omega)^N$ (соответственно $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N$) имеем

$$\left|\int_\omega f^0\cdot v^0 - g^0_\Gamma\cdot(\nabla_\Gamma v^0_n - D^2 b v^0_\Gamma)d\Gamma\right| \le c\left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0_\Gamma) + v^0_n D^2 b\right\|$$

Поскольку обе функции f^0, g^0 принадлежат $L^2(\omega)^N$, то и $\mathrm{div}_\Gamma g^0_\Gamma \in L^2(\omega)$, а исходное условие эквивалентно следующему условию: при всех $v^0 \in H^1(\omega)^N$ (соответственно $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N$) выполняется неравенство

$$\left|\int_\omega (f^0_\Gamma + D^2 b g^0_\Gamma)\cdot v^0_\Gamma + (f^0_n + \mathrm{div}_\Gamma g^0_\Gamma)v^0_n d\Gamma\right| \le c\left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0_\Gamma) + v^0_n D^2 b\right\| \tag{8.7}$$

Важной и сложной проблемой является определение элементов E^0 и $E^0_{\gamma_0}$ и описание их регулярности.

8.2. Уравнение мембранной оболочки. Исключение переменной $\hat{v}^1$. Для специального определяющего соотношения $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ в работе [35] было показано, что уравнение мембранной оболочки можно записать во внутренней форме

$$\forall v^0, \int_\omega 2\mu\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon^P_\Gamma(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\varepsilon^P_\Gamma(v^0) - f^0\cdot v^0 d\Gamma = 0 \tag{8.8}$$

где функция f^0 должна удовлетворять условию:

$$\exists c > 0, \quad \forall v^0, \quad \left|\int_\omega f^0\cdot v^0 d\Gamma\right| \le c\left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\right\| \tag{8.9}$$

Тензор ε^P_Γ совпадает с линеаризованным изменением метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ (см. [35, 39]). Вопросы существования и единственности решений этого уравнения были непосредственно исследованы в нескольких работах (см., например, [59, 60, 61, 23, 24, 14, 15, 17, 19, 62]).

В этом разделе уравнение мембранной оболочки будет рассматриваться как результат декомпозиции асимптотического уравнения $P(1, 0)$ при произвольном определяющем соотношении, удовлетворяющем допущению 4.1, и правой части общего вида, удовлетворяющей условию (8.5). В результате декомпозиции появятся также типичные члены, входящие в условие Лява–Кирхгоффа.

Рассмотрим вариационное уравнение (8.3) с условием (8.5) на l^0. Для пробных функций $(0, v^1)$ из вариационного уравнения (8.3) получаем

$$\int_\omega [C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1)]n\cdot v^1 - g^0\cdot v^1 d\Gamma = 0 \Rightarrow [C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1)]n = g^0$$

где $g^0 \in L^2(\omega)^N$ – вектор-функция, ассоциированная с l^0. Для тензора напряжений

$$\sigma^0(\hat{v}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}) \Rightarrow \sigma^0(\hat{v})n = g^0$$

Случай $g^0 = 0$ соответствует нулевым нормальным напряжениям, а случай $g^0_n = 0$ соответствует плоским нормальным напряжениям. По теореме 5.1, учитывая соотношение

$P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1)n = P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1_\Gamma)n$ и выбирая в вариационном уравнении (8.3) пробные функции вида $(\upsilon^0, 0)$, получаем декомпозицию

$$\hat{\upsilon}^1_n = 2N^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)]n)\cdot n$$

$$P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1_\Gamma)n = PN^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)]n) \tag{8.10}$$

$$\int_\omega C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0) + 2g^0\cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon^0, 0)]n)d\Gamma = l^0(\upsilon^0, 0)$$

Заметим, что при специальном определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$, получается

$$[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon})]n = 2\mu[P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1)n] + [\lambda\mathrm{tr}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}_0) + (2\mu+\lambda)\hat{\upsilon}^1_n]n$$

а условие $[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon})]n = g^0$ позволяет выразить $\hat{\upsilon}^1$ через $\hat{\upsilon}^0$:

$$P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1_\Gamma)n = \frac{1}{2\mu}g^0_\Gamma, \quad \hat{\upsilon}^1_n = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}^0) + \frac{1}{2\mu+\lambda}g^0_n \tag{8.11}$$

Если $\hat{\upsilon}^0$ и $\hat{\upsilon}^1_\Gamma$ принадлежат $L^2(\omega)^N$, а $\hat{\upsilon}^0_n$ принадлежит $H^1(\omega)$, то

$$2P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1_\Gamma)n = \upsilon^1_\Gamma + \nabla_\Gamma\hat{\upsilon}^0_n - D^2b\,\hat{\upsilon}^0_\Gamma = \frac{1}{\mu}g^0_\Gamma$$

При $g^0_\Gamma = 0$ получаем условие Лява–Кирхгоффа. Будем называть $P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1)n$ членом Лява–Кирхгоффа. В общем случае декомпозицию для него провести не удается.

В силу декомпозиции для $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(\upsilon^0, 0) = \varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)$ имеем $\varepsilon^0_{nn} = 0$ и

$$N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^0]n) = N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)]n) + N^{-1}([C^{-1}(\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n{*}n + n{*}\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n)]n) =$$
$$= N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)n]) + \varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n$$
$$\Rightarrow 2g^0\cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^0]n) = 2g^0\cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)]n) + g^0\cdot 2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n$$

при всех υ^0. Следовательно

$$\int_\omega C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0) + 2g^0\cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)]n)d\Gamma = l^0(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n) \tag{8.12}$$

Как уже известно, условие совместности (8.5) для асимптотической модели $P(1, 0)$ имеет вид $|l^0(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n)| \le c\|\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)\|$. Поэтому линейная часть уравнения (8.12) непрерывна по $\varepsilon^P_\Gamma(\upsilon^0)$.

Поставим тензору ε^P_Γ в соответствие пространство

$$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\upsilon\in L^2(\omega)^N : \upsilon_\Gamma\in H^1(\omega)^N\} \subset H \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^2(\omega)^N \tag{8.13}$$

и пополнение[14] E^P фактор-пространства $V/\ker\varepsilon_\Gamma^P$ по норме, соответствующей скалярному произведению

$$\int_\omega \varepsilon_\Gamma^P(u)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v)d\Gamma \qquad (8.14)$$

Аналогично для однородной задачи Дирихле с граничными условиями на части γ_0 границы γ обозначим через $E_{\gamma_0}^P$ пополнение фактор-пространства

$$V_{\gamma_0}/\ker\varepsilon^P, \quad V_{\gamma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{v\in L^2(\omega)^N : v_\Gamma\in H_{\gamma_0}^1(\omega)^N\}$$

по норме, порождаемой скалярным произведением (8.14). Согласно допущению 4.1 относительно C билинейное слагаемое в (8.12) коэрцитивно в гильбертовом пространстве E^P. Из условий (8.5) на правую часть уравнения (8.3) следует, что линейная часть уравнения (8.12) непрерывна в E^P. Поэтому уравнение безмоментной оболочки

$$\forall v^0\in E^P,\ \int_\omega C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat v^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0)+2g^0\cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)]n)d\Gamma = l^0(v^0,-2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) \quad (8.15)$$

имеет единственное решение $\hat v^0\in E^P$, что также справедливо и для правых частей более общего вида. Тогда справедлива теорема, аналогичная теореме существования из предыдущего раздела.

Теорема 8.2. Пусть справедливо допущение 4.1 относительно C и пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

1. При $l^0\in(E^P)'$ вариационное уравнение

$$\forall v^0\in E^P,\quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat v^0)]\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = l^P(v^0) \qquad (8.16)$$

имеет единственное решение $\hat v^0$ в E^P.

2. Пусть область ω – связная и пусть γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0)>0$. При $l^P\in(E_{\gamma_0}^P)'$ вариационное уравнение

$$\forall v^0\in E_{\gamma_0}^P,\quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat v^0)]\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = l^P(v^0) \qquad (8.17)$$

имеет единственное решение $\hat v^0$ в $E_{\gamma_0}^P$.

При специальном определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ и специальной правой части, уравнение мембранной оболочки (8.15) принимает вид

$$\begin{aligned}\forall v^0\in E^P,\quad &\int_\omega 2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat v^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0)+\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat v^0)\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)-\\ &-f^0\cdot v^0+g_\Gamma^0\cdot 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n+\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}g_n^0\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = 0\end{aligned} \qquad (8.18)$$

где функции f^0 и g^0 должны удовлетворять условию (8.6).

[14] Пространство E^P описано в п. (ii) теоремы 2.3 из [29], а также в [28].

8.3. Исключение переменной $\hat{\upsilon}_n^0$. Уравнение мембранной оболочки можно далее расщепить на систему двух уравнений[15]. Для пробных функций $\upsilon \in V$, $(\upsilon_\Gamma^0,\ \upsilon_n^0) \in H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$ имеем

$$\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0) = \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0) + \upsilon_n^0 D^2 b$$

откуда получаем два уравнения:

$$\begin{gathered}[C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, D^2 b = l_n^P \|D^2 b\| \\ \forall \upsilon^0 \in H^1(\omega)^N, \quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0) d\Gamma = l^P(\upsilon_\Gamma^0)\end{gathered} \tag{8.19}$$

где с учетом соглашения $D^2b/\|D^2b\| = 0$ при $D^2b = 0$:

$$l^P(\upsilon^0) \overset{\text{def}}{=} l^0(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n) - \int_\omega 2g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)]n) d\Gamma$$

$$l_n^P \overset{\text{def}}{=} l_n^0 - 2g^0 \cdot N^{-1}\left(\left[C^{-1}\frac{D^2 b}{\|D^2 b\|}\right]n\right)$$

а $l_n^P \in L^2(\omega)$ определяется единственным образом, поскольку

$$\left|l^0(\upsilon_n^0 n, -\nabla_\Gamma \upsilon_n^0)\right| \le c\left\|\upsilon_n^0 D^2 b\right\| \le c'\left\|\upsilon_n^0\right\|_{L^2(\omega)}$$

$$\Rightarrow \exists l_n^0 \in L^2(\omega), \quad \int_\omega l_n^0 \|D^2 b\| \upsilon_n^0 d\Gamma \overset{\text{def}}{=} l^0(\upsilon_n^0 n, -\nabla_\Gamma \upsilon_n^0)$$

В случае пластины ($D^2b = 0$), имеется только вариационное уравнение

$$\forall \upsilon_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N, \quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)] \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0) d\Gamma = l^P(\upsilon_\Gamma^0)$$

которое полностью задает $\hat{\upsilon}_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N/\ker\varepsilon_\Gamma^P$ (соответственно $H_{\gamma_0}^1(\omega)^N$)

В общем случае при $\tau \in \mathrm{Sym}_N^P$ и $f \in \mathbb{R}$ имеем уравнение

$$C_{eP}^{-1}\tau \cdot\cdot\, \frac{D^2 b}{\|D^2 b\|} = f \tag{8.20}$$

Введем пространство и некоторые обозначения:

$$\mathrm{Sym}_N^P \cap D^2 b^\perp \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in \mathrm{Sym}_N^P : \tau \cdot\cdot\, D^2 b = 0\}$$

---

[15] Результаты, представленные в данном разделе, полностью и более глубоко описаны в § 3 [29]. В частности там показано, что $\hat{\upsilon}_\Gamma^0$ является решением приведенного уравнения безмоментной оболочки.

$$\tau_b \overset{\text{def}}{=} \tau \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}, \quad \tau^b \overset{\text{def}}{=} \tau - \tau_b\frac{D^2b}{\|D^2b\|} \in \mathrm{Sym}_N^P \cap D^2b^{\perp}$$

Тогда уравнение (8.20) можно записать в виде

$$\tau_b C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|} \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|} + [C_{eP}^{-1}\tau^b] \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|} = f$$

$$\Rightarrow \tau_b = d_{eP}^{-1}\left(f - [C_{eP}^{-1}\tau^b] \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right), \quad d_{eP} \overset{\text{def}}{=} C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|} \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}$$

$$C_{eP}^{-1}\tau = C_{eP}^{-1}\left[\tau^b - d_{eP}^{-1}[C_{eP}^{-1}\tau^b] \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right] + d_{eP}^{-1} f C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}$$

Снова можно ввести эквивалентное определяющее соотношение

$$C_{ePb}^{-1}\tau \overset{\text{def}}{=} C_{eP}^{-1}\tau - d_{eP}^{-1}\left([C_{eP}^{-1}\tau] \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right)C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}$$

которое является взаимно однозначным, коэрцитивным и симметрическим в пространстве $\mathrm{Sym}_N^P \cap D^2b^{\perp}$. В итоге получаем

$$C_{eP}^{-1}\tau = C_{ePb}^{-1}\tau^b + d_{eP}^{-1} f C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}$$

Возвращаясь к системе (8.19) для $\hat{\upsilon}^0$, заметим сначала, что

$$\begin{gathered}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0) = \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)^b + \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)_b\frac{D^2b}{\|D^2b\|} = \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)^b + \varepsilon_\Gamma^P\left(\frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)_b}{\|D^2b\|}n\right) \\ \Rightarrow \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)^b = \varepsilon_\Gamma^P\left(\upsilon^0 - \frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)_b}{\|D^2b\|}n\right) \Rightarrow \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)^b = \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b\end{gathered} \tag{8.21}$$

Из первого уравнения следует

$$\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|} = d_{eP}^{-1}\left(l_n^P - [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)^b] \cdot\cdot \frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right)$$

Во втором уравнении при $\upsilon^0 \in H^1(\omega)^N$ имеем

$$[C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0) = [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)^b] \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b + d_{eP}^{-1} l_n^P\left[C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right] \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0) =$$

$$= [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)^b] \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b + d_{eP}^{-1} l_n^P\left[C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right] \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b + l_n^P\frac{D^2b}{\|D^2b\|} \cdot\cdot \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)$$

поскольку по построению для любого $\tau \in \mathrm{Sym}_N^P$ имеем $C_{ePb}^{-1}\tau \in \mathrm{Sym}_N^P \cap D^2b^{\perp}$. В итоге приходим к системе двух уравнений:

$$\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)\cdot\cdot\frac{D^2b}{\|D^2b\|} = d_{eP}^{-1}\left(l_n^P - [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)^b]\cdot\cdot\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right)$$

$$\forall \upsilon_\Gamma^0 \in H^1(\omega)^N, \quad \int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b d\Gamma =$$

$$= l^P\left(\upsilon_\Gamma^0 - \frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)_b}{\|D^2b\|}n\right) - \int\limits_\omega d_{eP}^{-1}l_n^P\left[C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b d\Gamma$$

так как

$$\int\limits_\omega l_n^P\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma = l^P\left(\frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)_b}{\|D^2b\|}n\right)$$

Правая часть непрерывна в пространстве

$$S_b \overset{\mathrm{def}}{=} \{\upsilon_\Gamma \in H^1(\omega)^N : \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma)\cdot\cdot D^2b = 0 \text{ почти всюду в } \omega\}/\ker\varepsilon_\Gamma^P \tag{8.22}$$

поскольку, в силу вышеизложенного,

$$\varepsilon_\Gamma^P\left(\upsilon_\Gamma^0 - \frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)_b}{\|D^2b\|}n\right) = \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b \Rightarrow \varepsilon_\Gamma^P\left(\upsilon_\Gamma^0 - \frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)_b}{\|D^2b\|}n\right)\cdot\cdot D^2b = 0$$

Здесь S_b – замкнутое подпространство из $\{\upsilon_\Gamma \in H^1(\omega)^N)\}/\ker\varepsilon_\Gamma^P$, снабженное нормой $\|\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma)\|$. Решение второго уравнения можно рассматривать как проекцию $\pi\hat{\upsilon}^0$ вектора $\hat{\upsilon}^0$ на S_b, определяемую уравнением

$$\int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0 - \pi\hat{\upsilon}^0)]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma = 0, \quad \forall \upsilon_\Gamma^0 \in S_b^P$$

так как для всех $\upsilon_\Gamma^0 \in S_b$ имеют место равенства

$$\int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}_\Gamma^0)^b]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)^b d\Gamma = \int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)^b]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma =$$

$$= \int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma = \int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\pi\hat{\upsilon}^0)]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma$$

Следовательно, $\pi\hat{\upsilon}^0$ – единственное в S_b решение вариационного уравнения

$$\int\limits_\omega [C_{ePb}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\pi\hat{\upsilon}^0)]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)(d\Gamma) =$$

$$= l^P\left(\upsilon_\Gamma^0 - \frac{\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)_b}{\|D^2b\|}n\right) - \int\limits_\omega d_{eP}^{-1}l_n^P\left[C_{eP}^{-1}\frac{D^2b}{\|D^2b\|}\right]\cdot\cdot\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon_\Gamma^0)d\Gamma \tag{8.23}$$

для всех $v_\Gamma^0 \in S_b$. Значит, проекция $\pi\hat{v}^0$ – хороший элемент пространства $H^1(\omega)^N$, однако оставшаяся часть $\hat{v}^0 - \pi\hat{v}^0$ может иметь более сложную структуру.

8.4. Предыдущие результаты по безмоментным оболочкам и регулярности. Существование и единственность в V_{γ_0} решений уравнения мембранной оболочки (8.8) были доказаны в работах [23, 24] при $g^0 = 0$. Далее в работах [14, 17] было доказано, что при условии равномерной эллиптичности срединной поверхности ω оболочки

$$\exists \nu > 0: \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ D^2 b(X)\xi_\Gamma \cdot \xi_\Gamma \geq \nu |\xi_\Gamma|^2 \text{ для почти всех } X \in \omega \tag{8.24}$$

и при дополнительных предположениях, что срединная поверхность ω в Γ задается некоторым отображением из класса C^2, а граница γ липшицева, решение существует, а при отображении из класса C^5 и границе γ из класса C^4 решение существует и единственно. Для срединной поверхности гладкости C^2 условие равномерной эллиптичности означает, что ω – некоторая область, полностью содержащаяся в границе Γ некоторого равномерно и строго выпуклого подмножества пространства $\mathbb{R}^N$ ([31]). Заметим, что $D^2b(X)\xi \cdot \xi = D^2b(X)\xi_\Gamma \cdot \xi_\Gamma$.

В [19] исследовалась сходимость трехмерной модели в пространствах $V_0(\omega) = H_{\gamma_0}^{-1}(\omega)^3$ и $V_F(\omega) = \{v \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3 : v_n \in H^2(\omega), \partial v_n/\partial\nu = 0 \text{ на } \gamma_0\}$. Сходимость была получена соответственно в пополнениях пространств $V_0(\omega)$ и $V_F(\omega)/\ker\varepsilon_\Gamma^P$ по норме $\|\varepsilon_\Gamma^P(v)\|$.

С учетом вышесказанного в предыдущих разделах указанные результаты можно считать формой результатов, относящихся к вопросам регулярности. Одной из центральных проблем является идентификация элементов E^P и $E_{\gamma_0}^P$ и описание их регулярности (см. [23, 24, 62]). Например, при каких условиях на ω и при каком выборе граничных условий пространство E^0 или $E_{\gamma_0}^P$ (соответственно E^P или $E_{\gamma_0}^P$) сводится к фактор-пространству $(H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0$ или $(H_{\gamma_0}^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0$ (соответственно $V/\ker\varepsilon_\Gamma^P$ от $V_{\gamma_0}/\ker\varepsilon_\Gamma^P$), снабженному соответствующей канонической фактор-нормой.

8.5. Выбор допущений для сходимости моделей при $h \to 0$. Для простоты остановимся подробнее на вектор-функциях F и G вида

$$f = F \circ T = f^0 + zf^1 + z^2 f^2, \quad g = G \circ T = g^0 + zg^1 + z^2 g^2 \tag{8.25}$$

определяемых вектор-функциями f^0, f^1, f^2 и g^0, g^1, g^2 из $L^2(\omega)^N$. Результаты несложно будет обобщить на случай функций f и g, дифференцируемых достаточное число раз по z, где $f^0(X) = f(X, 0)$, $f^1(X) = \partial f/\partial z(X, 0)$, $f^2(X) = (\partial^2 f/\partial^2 z)(X, 0)/2$ и т.д.

Допущение 8.1. Пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества гладкости $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Существует такое число $\bar{h} > 0$ и такая константа $c > 0$, что при всех h, $0 < h \leq \bar{h}$, и всех $(v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)} F\cdot(v^0\circ p+b(v^1\circ p)+b^2(v^2\circ p))+G\cdot D(v^0\circ p+b(v^1\circ p)+b^2(v^2\circ p)\nabla b dx\right|\le$$
$$\le c\left\{\int\limits_{\omega}[\|\varepsilon^0(v^0,v^1)\|^2+h^2\|\varepsilon^1(v^0,v^1,v^2)\|^2]d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.26}$$

Точно такое же допущение принимается и для моделей $P(1, 1)$ ($v^2 = 0$) и $P(2_n, 1)$ ($v_\Gamma^2 = 0$).

Это допущение относится к константе непрерывности для усредненной правой части вариационного уравнения в трехмерной задаче, т.е. по существу это – допущение относительно прикладываемых усилий. В этом случае вариационное уравнение (4.39) имеет смысл и имеет единственное решение в E^{01} для модели $P(2, 1)$, модели $P(2_n, 1)$ (при $v_\Gamma^2 = 0$) и модели $P(1, 1)$ (при $v^2 = 0$). Аналогом этого предположения в N-мерном случае является существование таких констант $c > 0$ и $\bar{h} > 0$, что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$ и $V \in H^1(S_h(\omega))^N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)} F\cdot V+G\cdot DV\nabla b dx\right|\le c\left\{\frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)}\|\varepsilon(V)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.27}$$

Далее допущения и результаты приводятся для модели $P(2, 1)$, но все в равной мере будет относиться и к моделям $P(2_n, 1)$ при $v_\Gamma^2 = 0$ и $P(1, 1)$ при $v^2 = 0$. Для удобства введем следующие обозначения:

$$I(h)v \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2h}\int\limits_{S_h(\omega)} F\cdot(v^0\circ p+bv^1\circ p+b^2v^2\circ p)+$$
$$+G\cdot D(v^0\circ p+bv^1\circ p+b^2v^2\circ p)\nabla b dx=$$
$$=\int\limits_{\omega}\bar{\alpha}_0(h)(f^0\cdot v^0+g^0\cdot v^1)+\bar{\alpha}_1(h)(f^1\cdot v^0+(f^0+g^1)\cdot v^1+2g^0\cdot v^2)+ \tag{8.28}$$
$$+\bar{\alpha}_2(h)(f^2\cdot v^0+(f^1+g^2)\cdot v^1+(f^0+2g^1)\cdot v^2)+$$
$$+\bar{\alpha}_3(h)(f^2\cdot v^1+(f^1+2g^2)\cdot v^2)+\bar{\alpha}_4(h)f^2\cdot v^2 d\Gamma$$

$$J(h)v \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\omega}\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2}(f^0\cdot v^0+g^0\cdot v^1)+\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}(f^1\cdot v^0+(f^0+g^1)\cdot v^1+2g^0\cdot v^2)+$$
$$+\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}(f^2\cdot v^0+(f^1+g^2)\cdot v^1+(f^0+2g^1)\cdot v^2)+ \tag{8.29}$$
$$+\frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2}(f^2\cdot v^1+(f^1+2g^2)\cdot v^2)+\frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2}f^2\cdot v^2 d\Gamma$$

$$K(h)v \overset{\text{def}}{=} \int_{\omega} \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right](f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right](f^1 \cdot v^0 + (f^0 + g^1) \cdot v^1 + 2g^0 \cdot v^2) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right](f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1 + (f^0 + 2g^1) \cdot v^2) + \tag{8.30}$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2}\right](f^2 \cdot v^1 + (f^1 + 2g^2) \cdot v^2) + \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2}\right] f^2 \cdot v^2 d\Gamma$$

$$L(h)v \overset{\text{def}}{=} \int_{\omega} \frac{1}{h^2}\left\{\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right] - \frac{\kappa_4}{5}\right\}(f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left\{\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right] - \frac{\kappa_3}{5}\right\}(f^1 \cdot v^0 + (f^0 + g^1) \cdot v^1 + 2g^0 \cdot v^2) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left\{\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] - \frac{\kappa_2}{5}\right\}(f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1 + (f^0 + 2g^1) \cdot v^2) + \tag{8.31}$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^4} - \frac{\kappa_1}{5}\right\}(f^2 \cdot v^1 + (f^1 + 2g^2) \cdot v^2) + \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^4} - \frac{1}{5}\right\} f^2 \cdot v^2 d\Gamma$$

По определению допущение 8.1 эквивалентно неравенству

$$|I(h)(v^0, v^1, v^2)| \le c\left\{\int_{\omega} \|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + h^2\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.32}$$

Заметим, что $I(h) - I(0) = h^2 J(h)$, $J(h) - J(0) = h^2 K(h)$, $K(h) - K(0) = h^2 L(h)$ и кроме того

$$\begin{aligned} I(h) &= I(0) + h^2 J(0) + h^4 K(h) = \\ &= I(0) + h^2 J(0) + h^4 K(0) + h^4 (K(h) - K(0)) = \\ &= I(0) + h^2 J(0) + h^4 K(0) + h^6 L(0) + h^6 (L(h) - L(0)) \end{aligned} \tag{8.33}$$

В сущности, поскольку j_z – полином степени $N - 1$, указанное разложение обрывается через конечное число шагов, и образуется конечный ряд с коэффициентами $I(0)$, $J(0)$, $K(0)$, $L(0)$ и т.д. Можно показать, что

$$I(h)v = \sum_{n=0}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]} \frac{h^{2n}}{2n+1} \sum_{i=\max\{2n-(N-1),\,0\}}^{\min\{2n,\,4\}} \int_{\omega} \kappa_{2n-i} g^i(v) d\Gamma$$

где $[(N + 3)/2]$ – наибольшее натуральное число, не превышающее $(N + 3)/2$, и кроме того

$$g^0(v) = f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1$$

$$q^1(v) = f^1 \cdot v^0 + (f^0 + g^1) \cdot v^1 + 2g^2 \cdot v^2$$

$$q^2(v) = f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1 + (f^0 + 2g^1) \cdot v^2$$

$$q^3(v) = f^2 \cdot v^1 + (f^1 + 2g^2) \cdot v^2$$

$$q^4(v) = f^0 \cdot v^2$$

При $N = 3$:

$$I(h)v = \int_\omega q^0 + \frac{h^2}{3}(\kappa_2 q^0 + \kappa_1 q^1 + q^2) + \frac{h^4}{5}(\kappa_2 q^2 + \kappa_1 q^3 + q^4) + \frac{h^6}{7}\kappa_2 q^4 d\Gamma =$$

$$= I(0) + h^2 J(0) + h^4 K(0) + h^6 L(0)$$

$$I(0)v = \int_\omega (f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1) d\Gamma, \quad L(0)v = \frac{1}{7}\int_\omega \kappa_2 f^2 \cdot v^2 d\Gamma$$

$$J(0)v = \frac{1}{3}\int_\omega \{\kappa_2(f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1) + \kappa_1(f^1 \cdot v^0 + (f^0 + g^1) \cdot v^1 + 2g^0 \cdot v^2) + \tag{8.34}$$

$$+ (f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1 + (f^0 + 2g^1) \cdot v^2)\} d\Gamma$$

$$K(0)v = \frac{1}{5}\int_\omega \{\kappa_2(f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1 + (f^0 + 2g^1) \cdot v^2) +$$

$$+ \kappa_1(f^2 \cdot v^1 + (f^1 + 2g^2) \cdot v^2) + f^2 \cdot v^2\} d\Gamma$$

Необходимо иметь в виду, что модель $P(2, 1)$ отличается от двух других. Сформулируем сначала основные результаты для моделей $P(2_n, 1)$ (при $v_\Gamma^2 = 0$) и $P(1, 1)$ (при $v^2 = 0$) в виде следующей леммы.

Лемма 8.1. Пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Г-границе некоторого множества класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

1. Пусть существуют постоянные $\bar{h} > 0$ и $c > 0$, такие что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$ выполняются следующие три условия:

Условие на I(0): при всех $(v^0, v^1) \in H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ справедливо неравенство

$$|I(0)(v^0, v^1, 0)| \le c\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)} \tag{8.35}$$

Условие на J(0)): при всех $v = (v^0, v^1, v_n^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$ справедливо неравенство

$$|J(0)v| \le c\left\{\int_\omega \|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.36}$$

Условие на K(h): при всех $v = (v^0, v^1, v_n^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$ справедливо неравенство

$$|K(h)v| \le c\left\{\int_\omega \left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.37}$$

Тогда

$$\left|I(h)(v^0, v^1, v_n^2 n)\right| \le c\left\{\int_\omega \left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + h^4\left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.38}$$

и справедливо допущение 8.1.

2. Если выполнены условия (8.35), (8.36) и (8.37), то при $h \to 0$ ($h > 0$) существует константа $c > 0$, такая что при всех $v = (v^0, v^1, v_n^2)$ из E^{01} справедливы неравенства

$$|I(h)v - I(0)v| \le ch^2\left\{\int_\omega \left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.39}$$

$$|J(h)v - J(0)v| \le ch^2\left\{\int_\omega \left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.40}$$

3. Для моделей $P(1, 1)$ (при $v^2 = 0$) и $P(2_n, 1)$ (при $v_\Gamma^2 = 0$) условия (8.36) и (8.37) равносильны условиям: при всех h, $0 < h \le \bar{h}$ $J(0)\,(v^0, v^1, 0) = 0$, $K(h)(v^0, v^1, 0) = 0$, $\forall (v^0, v^1) \in K$.

Кроме того, допущение 8.1 равносильно условию (8.38), которое в свою очередь равносильно трем условиям (8.35), (8.36) и (8.37). В частности при $N = 3$ допущение 8.1 эквивалентно условию (8.35) и следующим двум условиям: при всех $(v^0, v^1) \in K$

$$\begin{aligned}&\int_\omega (f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1) + \kappa_1(f^1 \cdot v^0 + (f^0 + g^1) \cdot v^1) + \\ &+ \kappa_2(f^0 \cdot v^0 + g^0 \cdot v^1) d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\int_\omega \kappa_2(f^2 \cdot v^0 + (f^1 + g^2) \cdot v^1) + \kappa_1 f^2 \cdot v^1 d\Gamma = 0 \tag{8.42}$$

Доказательство.

1. Доказательство следует из условий (8.35), (8.36), (8.37) и тождества

$$\begin{aligned}&I(h) = I(0) + h^2 J(0) + h^4 K(h) \\ &\Rightarrow |I(h)| \le c\left\|\varepsilon^0\right\| + ch^2[\left\|\varepsilon^0\right\| + \left\|\varepsilon^1\right\|] + ch^4[\left\|\varepsilon^0\right\| + \left\|\varepsilon^1\right\|] \le c[\left\|\varepsilon^0\right\| + h^2\left\|\varepsilon^1\right\|]\end{aligned}$$

2. Условие (8.39) вытекает из (8.36) и (8.37) при всех $v \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)$:

$$\begin{aligned}&I(h)v - I(0)v = h^2 J(h)v = h^2[J(0) + h^2 K(h)]v \\ &\Rightarrow |I(h)v - I(0)v| \le ch^2[\left\|\varepsilon^0(v)\right\| + \left\|\varepsilon^1(v)\right\|]\end{aligned}$$

Аналогично из (8.37) получаем

$$J(h) - J(0) = h^2 K(h) \Rightarrow |J(h) - J(0)| \le ch^2[\left\|\varepsilon^0(v)\right\| + \left\|\varepsilon^1(v)\right\|]$$

что и дает (8.40).

3. Вспомним, что в случае $P(2_n, 1)$ (соответственно $P(1, 1)$) каноническая фактор-норма в $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K \times L^2(\omega)$ (соотв. $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$) эквивалентна норме $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\| + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v_n^2 n)\|$ (соотв. $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\| + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|$). В результате любой непрерывный линейный функционал в $L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)$ (соотв. $L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$) непрерывен в фактор-пространстве тогда и только тогда, когда он тождественно равен нулю на $\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1$ (соотв. K). В обоих случаях верно равносильное утверждение: функционал есть тождественный ноль при всех $(v^0, v^1, 0)$ (соотв. (v^0, v^1), таких что $(v^0, v^1) \in K$. Поэтому достаточно провести доказательство лишь для модели $P(1, 1)$. Напомним, что в случае $P(1, 1)$ каноническая фактор-норма в $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$ эквивалентна норме $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\| + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, 0)\|$. В результате любой непрерывный линейный функционал в $L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ непрерывен в фактор-пространстве тогда и только тогда, когда он тождественно равен нулю в пространстве K. Кроме того, по определению $\bar{\alpha}_i(h)$ коэффициенты в выражениях для $J(h)v$ и $K(h)v$ ограничены в $\bar{\omega}$:

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} \to \frac{\kappa_2}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} \to \frac{\kappa_1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2} \to 0, \quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2} \to 0$$

$$\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right], \quad \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right], \quad \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right], \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^4}, \quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^4}$$

Они также являются сильно сходящимися по норме L^∞. Следовательно

$$\exists c > 0, \quad \forall h, \quad 0 < h \le \bar{h}, \quad |J(h)v| \le c\|v\|_{L^2}, \quad |K(h)v| \le c\|v\|_{L^2}$$

Если, кроме того, для всех h, $0 < h \le \bar{h}$, и $v \in K$ выполняется $J(h)v = 0 = K(h)v$, то

$$\forall w \in K, \quad |J(h)v| = |J(h)(v+w)| \le c\|v+w\|_{L^2} \le c\|v+w\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow |J(h)v| \le \inf_{w \in K} \|v+w\|_{H^1} \le c'[\|\varepsilon^0(v)\|^2 + \|\varepsilon^1(v)\|^2]^{1/2}$$

в силу эквивалентности норм. То же самое справедливо и для $K(h)$. Поэтому

$$\exists c > 0, \quad \forall h, \quad 0 < h \le \bar{h}, \quad |J(h)v| \le c[\|\varepsilon^0(v)\|^2 + \|\varepsilon^1(v)\|^2]^{1/2}$$

$$|K(h)v| \le c[\|\varepsilon^0(v)\|^2 + \|\varepsilon^1(v)\|^2]^{1/2}$$

Следовательно, условия (8.36) и (8.37) удовлетворяются тогда и только тогда, когда

$$J(0)(v^0, v^1, 0) = 0 \text{ и } K(h)(v^0, v^1, 0) = 0, \quad \forall (v^0, v^1) \in K, \quad \forall h, \quad 0 < h\bar{h}$$

В п. 1 уже было показано, что из условий (8.35), (8.36), (8.37) следуют (8.38) и (8.32), а значит, и допущение 8.1. Обратно, из условия (8.38):

$$\exists c > 0, \quad \forall h, \quad 0 < h \le \bar{h}, \quad |I(h)v| \le c[\|\varepsilon^0(v)\|^2 + h^2\|\varepsilon^1(v)\|^2]^{1/2}$$

следует (8.35) в силу непрерывности $I(h)v$ при $h = 0$. Тогда

$$\forall h, \quad 0 < h \le \bar{h}, \quad J(h) = \frac{1}{h^2}[I(h) - I(0)] \Rightarrow J(h)v = 0 \text{ в } K$$

Опять в силу непрерывности в L^∞ имеем

$$\forall \upsilon \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N, \quad J(h)\upsilon \to J(0)\upsilon \Rightarrow J(0) = 0 \text{ в } K$$

Из п. 1 доказательства следует, что $J(0)$ удовлетворяет условию (8.36). Далее

$$\forall h, \quad 0 < h \le \bar{h}, \quad K(h) = \frac{1}{h^2}[J(h) - J(0)] \Rightarrow K(h) = 0 \text{ в } K$$

и, значит, в силу таких же доводов условие (8.37) удовлетворяется при $0 < h \le \bar{h}$.

Для модели $P(1, 1)$ имеем $\upsilon^2 = 0$. Для модели $P(2_n, 1)$ имеем $\upsilon_\Gamma^2 = 0$, и из того, что $(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon_n^2) \in \ker\varepsilon^0 \cap \varepsilon^1$, следует $\upsilon_n^2 = 0$ и $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in \ker\varepsilon^0$. Поэтому в обоих случаях $\upsilon^2 = 0$ и $J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) = 0$, $K(h)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) = 0$ при $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in K$.

При $N = 3$ имеем $j_z = 1 + \kappa_1 z + \kappa_2 z^2$. Тогда

$$\alpha_0(h) = 2h + \kappa_2\frac{2h^3}{3}, \quad \alpha_1(h) = \kappa_1\frac{2h^3}{3}, \quad \alpha_2(h) = \frac{2h^3}{3} + \kappa_2\frac{2h^5}{5}$$

$$\alpha_3(h) = \kappa_1\frac{2h^5}{5}, \quad \alpha_4(h) = \frac{2h^5}{5} + \kappa_2\frac{2h^7}{7}$$

Условие (8.41) есть $J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) = 0$ при $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in K$. Что касается второго условия $K(h)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) = 0$ при $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in K$, вернемся к выражению (8.30) при $\upsilon^2 = 0$. Слагаемое, содержащее $\bar{\alpha}_4(h)$, обращается в нуль. При этом

$$\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{\kappa_2}{5}, \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^4} = \frac{\kappa_1}{5}, \quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^4} = \frac{1}{5} + \kappa_2\frac{h^2}{7}$$

Следовательно, первые два слагаемые в (8.30) обращаются в нуль и получаем (8.42) на K.

Для модели $P(2, 1)$ непрерывные линейные функционалы в $L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$, обращающиеся в нуль на K, не обязательно являются непрерывными в E^{01}. Чтобы получить аналогичные результаты по сходимости в моделях $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$, необходимо использовать аналог условий (8.35), (8.36), (8.37): существуют $\bar{h} > 0$ и $c > 0$, такие что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$, выполняются следующие три условия:

Условие на $I(0)$:
при всех $\upsilon = (\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$

$$|I(0)\upsilon| \le c\left\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\right\|_{L^2(\omega)} \tag{8.43}$$

Условие на $J(0)$:
при всех $\upsilon = (\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$

$$|J(0)\upsilon| \le c\left\{\int_\omega \left\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.44}$$

Условие на $K(h)$:
при всех $\upsilon = (\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$

$$|K(h)v| \le c\left\{\int_{\omega}\left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.45}$$

С другой стороны выше в лемме было показано, что допущение 8.1 приводит к более сильному неравенству (8.38) для $I(h)v$ в случаях моделей $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$. Так что существует выбор между слабым условием (8.38) и тремя более сильными условиями (8.43), (8.44), (8.45). Ниже будет показано, что условие (8.38) влечет слабую сходимость, а условия (8.43), (8.44), (8.45) приводят к сильной сходимости.

Лемма 8.2. Пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

1. Если выполнены условия (8.43), (8.44), (8.45), то существуют $c > 0$ и $\bar{h} > 0$, такие что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$, и всех $(v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ справедливо неравенство

$$|I(h)v| \le c\left\{\int_{\omega}\left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + h^4\left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.46}$$

а следовательно, вариационное уравнение (4.39) имеет смысл и обладает единственным решением в E^{01} для модели $P(2, 1)$.

2. Если существуют такие константы $c > 0$ и $\bar{h} > 0$, что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$, и всех $(v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ выполняется условие

$$\left|I(h)(v^0, v^1, v^2)\right| \le c\left\{\int_{\omega}\left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 + h^4\left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.47}$$

то справедливо допущение 8.1, и вариационное уравнение (4.39) имеет единственное решение в E^{01}. Кроме того, при всех $v = (v^0, v^1, v^2)$ в E^{01}:

$$|I(0)v| \le c\left\{\int_{\omega}\left\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.48}$$

$$I(h)v \to I(0)v \tag{8.49}$$

а при всех h, $0 \le h \le \bar{h}$, $(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$, $v^2 \in L^2(\omega)^N$:

$$|J(h)v| \le c\left\{\int_{\omega}\left\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\right\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.50}$$

$$J(h)v \to J(0)v \tag{8.51}$$

Доказательство.

1. Следует из условий (8.43), (8.44), (8.45) и тождества

$$I(h) = I(0) + h^2J(0) + h^4K(h)$$

$$\Rightarrow |I(h)| \le c\left\|\varepsilon^0\right\| + ch^2[\left\|\varepsilon^0\right\| + \left\|\varepsilon^1\right\|] + ch^4[\left\|\varepsilon^0\right\| + \left\|\varepsilon^1\right\|] \le c[\left\|\varepsilon^0\right\| + h^2\left\|\varepsilon^1\right\|]$$

2. По определению $\bar{\alpha}_i(h)$ коэффициенты в выражениях для $I(h)v$, $J(h)v$ и $K(h)v$ ограничены в $\bar{\omega}$:

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} \to \frac{\kappa_2}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} \to \frac{\kappa_1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2} \to 0, \quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2} \to 0$$

$$\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right], \quad \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right], \quad \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right], \quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^4}, \quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^4}$$

Они также являются сильно сходящимися по норме L^∞. Поэтому при всех $(v^0, v^1, v^2) \in$ $\in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ имеем $I(h)v \to I(0)v$ и $J(h)v \to J(0)v$. Тогда, переходя в (8.47) к пределу $h \to 0$, получаем неравенство (8.43). При всех h, $0 < h \le \bar{h}$, $(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$ и $v^2 \in L^2(\omega)^N$ имеем

$$|h^2 J(h)v| = |I(h)v| \le ch^2 \left\{ \int_\omega \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma \right\}^{1/2}$$

Разделив на h^2, получаем (8.50) при $0 < h \le \bar{h}$ и, в силу непрерывности, при $h = 0$. В обоих случаях сходимость распространяется и на E^{01} в силу плотности пространства $H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ и условий (8.43), (8.50).

8.6. Сходимость к асимптотической модели P(1, 0). Пусть (v_h^0, v_h^1, v_h^2) – решение вариационного уравнения (4.39) в E^{01}. Согласно допущению 8.1 и коэрцитивности C^{-1} существуют постоянные $\alpha > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\int_\omega \bar{\alpha}_0(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + 2\bar{\alpha}_1(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 + \bar{\alpha}_2(h)C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma = I(h)v_h$$

$$\Rightarrow \alpha\left\{ \|\varepsilon_h^0\|_{L^2}^2 + h^2\|\varepsilon_h^1\|_{L^2}^2 \right\} \le c\left\{ \|\varepsilon_h^0\|_{L^2}^2 + h^2\|\varepsilon_h^1\|_{L^2}^2 \right\}^{1/2}$$

Тогда при $h \to 0$ имеем

$$\|\varepsilon^0(v_h^0, v_h^1)\|_{L^2}^2 + h^2\|\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_h^2)\|_{L^2}^2 = \|\varepsilon_h^0\|_{L^2}^2 + h^2\|\varepsilon_h^1\|_{L^2}^2 \le c^2/\alpha^2$$

Поэтому $\varepsilon^0(v_h^0, v_h^1)$ и $h\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_h^2)$ ограничены в L^2. Но в силу нижеследующей леммы $(v_h^0, v_h^1) \in E^0$, и можно заключить, что пара векторов (v_h^0, v_h^1) ограничена в E^0, т.к. $\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|$ – норма в E^0.

Лемма 8.3. Пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$.

1. Модель $P(2, 1)$. Инъективные отображения $(v^0, v^1, v^2) \mapsto (v^0, v^1)$

$$\frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1} \to \frac{H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \quad \text{и} \quad E^{01} \to E^0$$

являются непрерывными.

2. Модель $P(2_n, 1)$. Отображения $(v^0, v^1, v_n^2) \to (v^0, v^1)$

$$\frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)}{\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1} \to \frac{H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \quad \text{и} \quad E^{01} \to E^0$$

непрерывны.

3. Модель $P(1, 1)$. Отображения $(v^0, v^1) \mapsto (v^0, v^1) \mapsto (v^0, v^1)$:

$$\frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}{K} \subset \frac{H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \subset E^0$$

непрерывны: при всех $(v^0, v^1) \in (H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K$

$$\|(v^0, v^1)\|_{E^0} \le \|(v^0, v^1)\|_{(H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0} \le \|(v^0, v^1)\|_{(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/K}$$

Доказательство.

1. По определению пространств инъективные отображения вполне определены, так как

$$(v^0, v^1, v^2) \in \ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1 \Rightarrow (v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$$

а непрерывность следует из определения норм.

2. Очевидно, что

$$H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \subset H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$$

$$\|v^0\|_{H^1(\omega)^N} + \|v^1\|_{L^2(\omega)^N} \le \|v^0\|_{H^1(\omega)^N} + \|v^1\|_{H^1(\omega)^N}$$

$$\Rightarrow \|(v^0, v^1)\|_{E^0} \le \inf_{(w^0, w^1) \in \ker\varepsilon^0} \|v^0 + w^0\|_{H^1(\omega)^N} + \|v^1 + w^1\|_{L^2(\omega)^N} \le$$

$$\le \inf_{(w^0, w^1) \in \ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1} \|v^0 + w^0\|_{H^1(\omega)^N} + \|v^1 + w^1\|_{H^1(\omega)^N}$$

и результат следует из определения фактор-норм.

В силу леммы и ограниченности $\varepsilon^0(v_h^1, v_h^1)$ и $h\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_h^2)$ имеем сходимость.

Теорема 8.3. Пусть справедливы допущения 4.1 и 4.2 и пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Г. Пусть $v_h \in E^{01}$ и $\hat{v} \in E^0$ – соответственно решения уравнений (4.39) и (8.1).

1. Если выполнено условие (8.47) для модели $P(2, 1)$ и справедливо допущение 8.1 для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$, то при $h \to 0$ имеем слабую сходимость

$$(v_h^0, v_h^1) \rightharpoonup (\hat{v}^0, \hat{v}^1) \text{ в } E^0$$

и, кроме того, $h\|\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_h^2)\|$ ограничено.

2. Пусть справедливо допущение 8.1 для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$ и пусть выполнены условия (8.43), (8.44), (8.45) для модели $P(2, 1)$. При $h \to 0$ имеем сильную сходимость

$$(v_h^0, v_h^1) \to (\hat{v}^0, \hat{v}^1) \text{ в } E^0$$

и, кроме того

$$\int_{\omega} \left\| \varepsilon^0 (v_h^0 - \hat{v}^0, v_h^1 - \hat{v}^1) \right\|^2 + h^2 \left\| \varepsilon^1 (v_h^0, v_h^1, v_h^2) \right\|^2 d\Gamma \to 0 \tag{8.52}$$

То же самое справедливо для моделей $P(1, 1)$ при $v_h^2 = 0$ и $P(2_n, 1)$ при $v_{h\Gamma}^2 = 0$.

Доказательство.

1. Слабая сходимость. Заметим, что в силу допущения 4.1 выражения

$$\int_{\omega} C^{-1} \varepsilon^0 (u^0, u^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0 (w^0, w^1) d\Gamma \quad \text{и} \quad \left\{ \int_{\omega} C^{-1} \varepsilon^0 (u^0, u^1) \cdot\cdot\, \varepsilon^0 (u^0, u^1) d\Gamma \right\}^{1/2}$$

эквивалентны скалярному произведению и норме в E^0. Ранее было показано, что допущение 8.1 приводит к условию (8.47) для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$.

Было также показано, что в силу допущения 4.1 и условия (8.47) последовательности $\{ \varepsilon_h^0 \}$ и $\{ h\varepsilon_h^1 \}$ ограничены в L^2. Поэтому существуют $w \in E^0$ и подпоследовательность, такие что v_h слабо сходится к w в E^0. Переходя к пределу в (4.39):

$$\int_{\omega} (\bar{\alpha}_0(h) - 1) C^{-1} \varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + \bar{\alpha}_1(h) [C^{-1} \varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + C^{-1} \varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1] +$$

$$+ \bar{\alpha}_2(h) C^{-1} \varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 + C^{-1} \varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 d\Gamma - I(h) v = 0$$

получим, что w – решение уравнения (8.1). В самом деле, интеграл от $C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0$ сходится к интегралу от $C^{-1}\varepsilon^0(w) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v)$. При всех $v \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$ имеем $I(h)v \to I(0)v$. Все остальные слагаемые стремятся к нулю в силу ограниченности $\|\varepsilon_h^0\|$ и $h\|\varepsilon_h^1\|$ и того факта, что, поскольку $\|D^2 b(x)\|$ равномерно ограничено, коэффициенты

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h) - 1}{h^2} \to \frac{\kappa_2}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2} \to \frac{\kappa_1}{3}, \quad \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} \to \frac{1}{3}$$

являются сильно сходящимися при $h \to 0$. В силу единственности в E^0 имеем $w = \hat{v}$ в E^0. Поэтому вся последовательность $\{ v_h \}$ слабо сходится к $\hat{v}$ в E^0.

2. Сильная сходимость. Напомним, что согласно лемме 8.1 выполнены допущение 8.1 и условия (8.35), (8.36), (8.37). Значит имеются одни и те же условия для всех трех моделей, а следовательно, справедливы все результаты п. 1. В частности уже имеется слабая сходимость. Теперь докажем, что при $h \to 0$ интеграл

$$\delta_h \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega} C^{-1} (\varepsilon_h^0 - \hat{\varepsilon}^0) \cdot\cdot\, (\varepsilon_h^0 - \hat{\varepsilon}^0) + \bar{\alpha}_2(h) C^{-1} \varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma$$

стремится к нулю, то есть $v_h \to \hat{v}$ сильно в E^0 и $h \left\| \varepsilon_h^1 \right\|_{L^2(\omega)} \to 0$. По определению

$$\delta_h = -\int_{\omega} C^{-1} (\varepsilon_h^0 - \hat{\varepsilon}^0) \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}^0 d\Gamma + \int_{\omega} C^{-1} (\varepsilon_h^0 - \hat{\varepsilon}^0) \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h) C^{-1} \varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma$$

Первый интеграл стремится к нулю в силу слабой сходимости в E^0. Второй интеграл η_h можно получить из уравнений (4.39) и (8.1) при $\upsilon = \upsilon_h$:

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + (\bar{\alpha}_0(h) - 1)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + 2\bar{\alpha}_1(h)C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + \bar{\alpha}_2(h)C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 -$$

$$-(F_h^0 \cdot \upsilon_h^0 + F_h^1 \cdot \upsilon_h^1 + F_h^2 \cdot \upsilon_h^2) - (G_h^0 \cdot \upsilon_h^1 + G_h^1 \cdot \upsilon_h^2)d\Gamma = 0$$

$$\int_\omega C^{-1}\hat{\varepsilon}^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 - f^0 \cdot \upsilon_h^0 - g^0 \cdot \upsilon_h^1 d\Gamma = 0$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$\eta_h = -\int_\omega (\bar{\alpha}_0(h) - 1)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + 2\bar{\alpha}_1(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma + I(h)\upsilon_h - I(0)\upsilon_h$$

Так как $\|\varepsilon_h^0\|$ и $\|h\varepsilon_h^1\|$ ограничены, а коэффициенты являются сильно сходящимися в h^2, первый интеграл ограничен выражением $ch^2 + ch$ и стремится к нулю. В моделях $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$ в силу пп. 2 и 3 леммы 8.1 выражение $I(h)\upsilon_h - I(0)\upsilon_h = h^2 J(h)\upsilon_h$ также ограничено величиной ch. Окончательное доказательство сильной сходимости получаем в силу эквивалентности полунорм и норм, указанных в начале п. 1.

8.7. Асимптотическая модель P(1, 0) с граничными условиями первого рода. Асимптотическая модель $P(1, 0)$: найти пару векторов $(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1) \in E_{\gamma_0}^0$, таких что

$$\forall(\upsilon^0, \upsilon^1) \in E_{\gamma_0}^0, \quad \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon \tag{8.53}$$

при условии: существует такая константа $c > 0$, что при всех (υ^0, υ^1) в $H_{\gamma_0}^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$:

$$|I(0)\upsilon| \le c\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\|_{L^2(\omega)} \tag{8.54}$$

для $I(0) \in (E_{\gamma_0}^0)'$ в общем случае. Для указанной специальной правой части это условие принимает вид

$$|I(0)\upsilon| = \left|\int_\omega f^0 \cdot \upsilon^0 + g^0 \cdot \upsilon^1 d\Gamma\right| \le c\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\|_{L^2(\omega)} \tag{8.55}$$

при тех же, что и ранее определениях и допущениях относительно $I(h)$, $J(h)$ и $K(h)$.

Допущение 8.2. Пусть ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ – границе некоторой области класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 – некоторое $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Существуют такие постоянные $\bar{h} > 0$ и $c > 0$, что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$, и всех $(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon_n^2) \in Q_{\gamma_0} \times L^2(\omega)$ выполняется условие

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{S_h(\omega)} F \cdot (\upsilon^0 \circ p + b(\upsilon^1 \circ p) + b^2(\upsilon_n^2 n) \circ p) + \right.$$

$$+G\cdot D(v^0\circ p+b(v^1\circ p)+b^2(v_n^2 n)\circ p)\nabla b dx\Bigg| \le \tag{8.56}$$

$$\le c\left\{\int_\omega [\|\varepsilon^0(v^0,\,v^1)\|^2+h^2\|\varepsilon^1(v^0,\,v^1,\,v_n^2 n)\|^2]d\Gamma\right\}^{1/2}$$

для модели $P(2_n, 1)$ и моделей $P(1, 1)$ при $v^2 = 0$ и $P(2, 1)$ при всех $(v^0, v^1, v^2) \in Q_{\gamma_0} \times$ $\times L^2(\omega)^N$:

$$\Bigg|\frac{1}{2h}\int_{S_h(\omega)} F\cdot(v^0\circ p+b(v^1\circ p)+b^2(v_n^2\circ p))+$$

$$+G\cdot D(v^0\circ p+b(v^1\circ p)+b^2(v^2\circ p))\nabla b dx\Bigg| \le \tag{8.57}$$

$$\le c\left\{\int_\omega [\|\varepsilon^0(v^0,\,v^1)\|^2+h^4\|\varepsilon^1(v^0,\,v^1,\,v^2)\|^2]d\Gamma\right\}^{1/2}$$

Допущение 8.3. Пусть ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ – границе некоторой области класса $C^{1,\,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 – некоторое $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ такое, что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Пусть существуют постоянные $\bar{h} > 0$ и $c > 0$, не зависящие от h, такие что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$ справедливы следующие три условия:

1. Условие на I(0): при всех $v \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$

$$|I(0)v| \le c\|\varepsilon^0(v^0,\,v^1)\|_{L^2(\omega)} \tag{8.58}$$

2. Условие на J(0): при всех $v \in W_{\gamma_0}$

$$|J(0)v| \le c\left\{\int_\omega \|\varepsilon^0(v^0,\,v^1)\|^2+\|\varepsilon^1(v^0,\,v^1,\,v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.59}$$

3. Условие на K(h): при всех $v \in W_{\gamma_0}$

$$|K(h)v| \le c\left\{\int_\omega \|\varepsilon^0(v^0,\,v^1)\|^2+\|\varepsilon^1(v^0,\,v^1,\,v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.60}$$

Изложим основные свойства в нижеследующих леммах.

Лемма 8.4. Пусть ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,\,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Тогда

1. Если справедливо допущение 8.3, то существует постоянная $c > 0$, такая что при всех h, $0 < h \le \bar{h}$, и всех $v \in W_{\gamma_0}$:

$$|I(h)v| \leq c\left\{\int\limits_{\omega}\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + h^4\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.61}$$

Допущение 8.2 удовлетворено, и вариационное уравнение (4.47) имеет единственное решение в $E^{01}_{\gamma_0}$. Кроме того, при $h \to 0$ ($h > 0$) существует постоянная $c > 0$, такая что при всех $v \in E^{01}$:

$$|I(h)v - I(0)v| \leq ch^2\left\{\int\limits_{\omega}\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2}$$

$$|J(h)v - J(0)v| \leq ch^2\left\{\int\limits_{\omega}\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2}$$

2. Для модели $P(1, 1)$ ($v^2 = 0$) и модели $P(2_n, 1)$ ($v^2_\Gamma = 0$) всегда выполнены условия (8.59) и (8.60), т.к. $K = \{0\}$. Кроме того, допущение 8.2 равносильно условию (8.61), которое в свою очередь равносильно условию (8.58).

3. Если справедливо допущение 8.2, то при всех $v = (v^0, v^1, v^2)$ в $E^{01}_{\gamma_0}$:

$$|I(0)(v| \leq c\left\{\int\limits_{\omega}\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.62}$$

$$I(h)v \to I(0)v \tag{8.63}$$

а при всех h, $0 \leq h \leq \bar{h}$, $(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$, $v^2 \in L^2(\omega)^N$:

$$|J(h)v| \leq c\left\{\int\limits_{\omega}\|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2 d\Gamma\right\}^{1/2} \tag{8.64}$$

$$J(h)v \to J(0)v \tag{8.65}$$

Лемма 8.5. Пусть ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть γ_0 – измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Пусть справедливо допущение 8.2. Тогда

1. *Модель P(2, 1)*. Инъективные отображения $(v^0, v^1, v^2) \mapsto (v^0, v^1)$

$$W_{\gamma_0} \to \frac{H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \text{ и } E^{01}_{\gamma_0} \to E^0_{\gamma_0} \equiv \frac{E^{01}_{\gamma_0,\pi}}{\ker\varepsilon^0}$$

непрерывны.

2. *Модель P(2*$_n$*, 1)*. Отображения $(v^0, v^1, v^2_n) \mapsto (v^0, v^1)$

$$W_{\gamma_0} \to \frac{H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \text{ и } E^{01}_{\gamma_0} \to E^0_{\gamma_0} \equiv \frac{E^{01}_{\gamma_0,\pi}}{\ker\varepsilon^0}$$

непрерывны.

3. Модель P(1, 1). Отображения $(v^0, v^1) \mapsto (v^0, v^1) \mapsto (v^0, v^1)$

$$W_{\gamma_0} \subset \frac{H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times L^2(\omega)^N}{\ker\varepsilon^0} \subset E^0_{\gamma_0} \equiv \frac{E^{01}_{\gamma_0,\pi}}{\ker\varepsilon^0}$$

непрерывны при всех $(v^0, v^1) \in W_{\gamma_0}$:

$$\|(v^0, v^1)\|_{E^0_{\gamma_0}} \le \|(v^0, v^1)\|_{(H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0} \le \|(v^0, v^1)\|_{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}.$$

Теорема 8.4. Пусть справедливы допущения 4.1 и 4.2, ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ, а γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Пусть $v_h \in E^{01}_{\gamma_0}$ и $\hat{v} \in E^0_{\gamma_0}$ – решения соответственно уравнений (4.47) и (8.53).

1. Пусть справедливо допущение 8.2. Тогда при $h \to 0$ имеем слабую сходимость $(v^0_h, v^1_h) \rightharpoonup (\hat{v}^0, \hat{v}^1)$ в $E^0_{\gamma_0}$ и ограниченность $h\|\varepsilon^1(v^0_h, v^1_h, v^2_h)\|$.

2. Пусть справедливо допущение 8.2 для моделей $P(2_n, 1)$, $P(1, 1)$ и допущение 8.3 для модели $P(2, 1)$. Тогда при $h \to 0$ имеем сильную сходимость $(v^0_h, v^1_h) \to (\hat{v}^0, \hat{v}^1)$ в $E^0_{\gamma_0}$. И, кроме того

$$\int_\omega \|\varepsilon^0(v^0_h - \hat{v}^0, v^1_h - \hat{v}^1)\|^2 + h^2\|\varepsilon^1(v^0_h, v^1_h, v^2_h)\|^2 d\Gamma \to 0 \qquad (8.66)$$

То же самое справедливо для модели $P(1, 1)$ при $v^2_h = 0$ и модели $P(2_n, 1)$ при $v^2_{h\Gamma} = 0$.

9. Вторая часть асимптотической модели оболочки. Уравнение изгиба. Асимптотическая модель $P(1, 0)$ имеет решение в пополнении E^0 фактор-пространства $(H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0$. В общем случае пространство $\ker\varepsilon^0$ может быть довольно большим. Возникает естественный вопрос: а не забыта ли какая-нибудь важная информация в процессе предельного перехода и нельзя ли уменьшить $\ker\varepsilon^0$ до множества жестких перемещений $\ker\varepsilon^0 \cap \ker\varepsilon^1$ или K? Другими словами, а не является ли асимптотическая модель моделью оболочки нулевой толщины? Оказывается, что при допущениях 4.1, 4.2 и 8.1 для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$ (соответственно при условии (8.47) для модели $P(2, 1)$) вариационное уравнение (8.1) при условии (8.35) можно дополнить вторым вариационным уравнением, куда входит оператор ε^1 на $\ker\varepsilon^0$. Новая система уравнений описывает так называемую асимптотическую оболочку, и решение системы единственно (с точностью до “жестких перемещений” для оболочки, не имеющей границы, или оболочки с однородными граничными условиями второго рода).

9.1. Второе асимптотическое уравнение изгиба. Чтобы лучше понять, как возникает второе асимптотическое уравнение, рассмотрим для определенности модель $P(2, 1)$. Модель $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$ приводят к таким же результатам соответственно при $v^2_h = v^2 = \hat{v}^2 = 0$ и $v^2_{h\Gamma} = v^2_\Gamma = \hat{v}^2_\Gamma = 0$. Вернемся к вариационному уравнению (4.39) и запишем его в виде

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0_h \cdot\cdot\, \varepsilon^0 - f^0 \cdot v^0 - g^0 \cdot v^1 d\Gamma +$$

$$+\int\limits_{\omega}(\bar{\alpha}_0(h)-1)(C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 - f^0\cdot v^0 - g^0\cdot v^1)+$$

$$+\bar{\alpha}_1(h)(C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 - f^1\cdot v^0 - (f^0+g^1)\cdot v^1 - 2g^0\cdot v^2)+$$

$$+\bar{\alpha}_2(h)(C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 - f^2\cdot v^0 - (f^1+g^2)\cdot v^1 - (f^0+2g^1)\cdot v^2)-$$

$$-\bar{\alpha}_3(h)(f^2\cdot v^1 + (f^1+2g^2)\cdot v^2) - \bar{\alpha}_4(h) f^2\cdot v^2)d\Gamma = 0$$

для всех $v=(v^0, v^1, v^2)\in H^1(\omega)^N\times H^1(\omega)^N\times L^2(\omega)^N$, $\varepsilon^i=\varepsilon^i(v)$, где $v_h = (v_h^0, v_h^1, v_h^2)$ – решение, а $\varepsilon_h^i = \varepsilon^i(v_h)$. При условии (8.35) на v, таком что $\varepsilon^0(v)=0$, первый интеграл обращается в нуль. Разделим остальные слагаемые на $h^2/3$:

$$\int\limits_{\omega} 3\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2}(-f^0\cdot v^0 - g^0\cdot v^1)+$$

$$+3\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}(C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 - f^1\cdot v^0 - (f^0+g^1)\cdot v^1 - 2g^0\cdot v^2)+$$

$$+3\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}(C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 - f^2\cdot v^0 - (f^1+g^2)\cdot v^1 - (f^0+2g^1)\cdot v^2)-$$

$$-3\frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2}(f^2\cdot v^1 + (f^1+2g^2)\cdot v^2) - 3\frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2} f^2\cdot v^2 d\Gamma = 0$$

Переходя к сильному пределу при $h\to 0$ в $L^\infty(\omega)$, получаем"

$$\frac{\bar{\alpha}_0(h)-1}{h^2}\to\frac{1}{3}\kappa_2,\quad \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}\to\frac{1}{3}\kappa_1,\quad \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}\to\frac{1}{3},\quad \frac{\bar{\alpha}_3(h)}{h^2}\to 0,\quad \frac{\bar{\alpha}_4(h)}{h^2}\to 0$$

Выше было указано, что $C^{-1}\varepsilon_h^0$ слабо сходится к $C^{-1}\hat{\varepsilon}^0$, но далее в разд. 9.6 увидим, что член $C^{-1}\varepsilon_h^1$ в общем случае не является слабо сходящимся к $C^{-1}\hat{\varepsilon}^1$. По этой причине введем оператор проектирования π на подпространство[16]

$$K^{01} \overset{\text{def}}{=} \{(v^0, v^1, v^2)\in E^{01} : \varepsilon^0(v^0, v^1)=0\} \tag{9.2}$$

пространства E^{01} для эквивалентной нормы, связанной со скалярным произведением

$$\int\limits_{\omega} C^{-1}\varepsilon^0(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w) + C^{-1}\varepsilon^1(v)\cdot\cdot\, \varepsilon^1(w)d\Gamma$$

[16] Несложно показать, что при $v\in K^{01}$, $v_n^1=0$, $v_\Gamma^1 = -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n$, $\varepsilon_\Gamma^P(v^0)=0$ имеют место равенства $\varepsilon^1(v)_{nn} = 2v_n^2$, $P\varepsilon^1(v)n = v_\Gamma^2$, $\varepsilon^{1P}(v) = \varepsilon_\Gamma^P(v_\Gamma^1) - \frac{1}{2}[D_\Gamma^P(v^0)D^2b + D^2b^* D_\Gamma^P(v^0)]$, откуда следует, что $\varepsilon^1(v) = v^{2*}n + n^*v^2 + \varepsilon^{1P}(v^0, v_\Gamma^1, 0)$. В частности $v^2\in L^2(\omega)^N$ и $(v^0, v^1)\in E_\Gamma^{01} = Q_\Gamma$ согласно определению (6.2). Поэтому $K^{01} = \{(v^0, v^1)\in H^1(\omega)^N\times H^1(\omega)^N : \forall (v^0, v^1)\in \ker\varepsilon^0\}/K\times L^2(\omega)^N$.

Проекция πv элемента $v \in E^{01}$ на K^{01} полностью описывается вариационным уравнением

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(v-\pi v)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(w)+C^{-1}\varepsilon^1(v-\pi v)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(w)d\Gamma = 0, \quad \forall w\in K^{01}$$

и поскольку $\varepsilon^0(w) = 0$, имеем

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(v-\pi v)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(w)d\Gamma = 0, \quad \forall w\in K^{01}$$

что в свою очередь равносильно уравнению

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(v-\pi v)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi u)d\Gamma = 0, \quad \forall u\in E^{01}$$

Полагая, что $C^{-1}\varepsilon^1(\pi v_h)$ слабо сходится к $C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})$, получаем

$$\begin{aligned}&\int_\omega C^{-1}\hat{\varepsilon}^1\pi\cdot\cdot\,\varepsilon^1-f^2\cdot v^0-(f^1+g^2)\cdot v^1-(f^0+2g^1)\cdot v^2+\\&+\kappa_1(C^{-1}\hat{\varepsilon}^0\cdot\cdot\,\varepsilon^1-f^1\cdot v^0-(f^0+g^1)\cdot v^1-2g^0\cdot v^2)+\\&+\kappa_2(-f^0\cdot v^0-g^0\cdot v^1)d\Gamma = 0, \quad \forall v\in K^{01}\end{aligned} \tag{9.3}$$

где запись $\varepsilon_h^1\pi$ и $\hat{\varepsilon}^1\pi$ обозначает $\varepsilon^1(\pi v_h)$ и $\varepsilon^1(\pi\hat{v})$. С использованием более компактной записи $\hat{v}$ будет решением системы

$$\begin{aligned}&\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^0(v)d\Gamma = I(0)v, \quad \forall v\in E^0\\&\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(v)+\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(v)d\Gamma = 3J(0)v, \quad \forall v\in K^{01}\end{aligned} \tag{9.4}$$

в пространстве, которое предстоит определить.

9.2. Выбор пространства решения. Во второе уравнение (9.4) входят пробные вектор-функции из K^{01}, а не из всего пространства E^{01}. Это уравнение будет верным для всего пространства E^{01}, если его записать в виде

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi v)+\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi v)d\Gamma = 3J(0)\pi v, \quad \forall v\in E^{01} \tag{9.5}$$

Это – уравнение в подпространстве $K^{01}\subset E^{01}$. Далее в выкладках вместо $\varepsilon^1(\pi v)$ и $\varepsilon^1(\pi\hat{v})$ будут часто использоваться более компактные обозначения $\varepsilon^1\pi$ и $\hat{\varepsilon}^1\pi$.

Заметим, что если бы E^{01}/K^{01} было эквивалентно E^0, то первое уравнение можно было бы интерпретировать как уравнение в ортогональном дополнении $[K^{01}]^\perp$ подпространства K^{01}, т.е. формально можно было бы написать

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}-\pi\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^0(v-\pi v)d\Gamma = 0, \quad \forall v\in E^{01}$$

К сожалению, каноническая фактор-норма

$$\inf_{w \in K^{01}} \{\|\varepsilon^0(\upsilon + w)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(\upsilon + w)\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\|\varepsilon^0(\upsilon)\|^2_{L^2(\omega)} + \inf_{w \in K^{01}} \|\varepsilon^1(\upsilon + w)\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2}$$

в общем случае является более сильной, чем норма $\|\varepsilon^0(\upsilon)\|_{L^2(\omega)}$ в фактор-пространстве E^{01}/K^{01}. Чтобы обойти это затруднение, введем новую более слабую норму

$$\{\|\varepsilon^0(\upsilon)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(\pi\upsilon)\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2}$$

в E^{01} и обозначим через E^{01}_π пополнение E^{01} по норме, порождаемой соответствующим новым скалярным произведением

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w) + C^{-1}\varepsilon^1(\pi\upsilon) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi w)d\Gamma \qquad (9.6)$$

Теперь каноническая фактор-норма равна $\|\varepsilon^0(\upsilon)\|_{L^2(\omega)}$:

$$\inf_{w \in K^{01}} \{\|\varepsilon^0(\upsilon + w)\|^2_{L^2(\omega)} + \|\varepsilon^1(\pi(\upsilon + w))\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\|\varepsilon^0(\upsilon)\|^2_{L^2(\omega)} + \inf_{w \in K^{01}} \|\varepsilon^1(\pi\upsilon + w)\|^2_{L^2(\omega)}\right\}^{1/2} = \|\varepsilon^0(\upsilon)\|_{L^2(\omega)}$$

При этом E^0 совпадает с E^{01}_π/K^{01}. Линейное отображение $\upsilon \mapsto i\upsilon$: $E^{01}_\pi \to E^0$, определяемое с помощью уравнения

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(i\upsilon) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w)d\Gamma = \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w)d\Gamma, \quad \forall w \in E^0$$

является непрерывным. Оно также сюръективно: при всех $\hat{\upsilon} \in E^0$ существует единственное $u \in E^{01}_\pi$, такое что при всех $w \in E^{01}_\pi$:

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(u) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w) + C^{-1}\varepsilon^1(\pi u) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi w)d\Gamma = \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w)d\Gamma$$

В качестве пробных функций возьмем $w = \upsilon - \pi\upsilon$ при $\upsilon \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$. Тогда $\pi w = \pi(\upsilon - \pi\upsilon) = 0$, $\varepsilon^1(\pi(\upsilon - \pi\upsilon)) = 0$, $\varepsilon^0(\upsilon - \pi\upsilon) = \varepsilon^0(\upsilon)$, а следовательно

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(u) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma$$

при всех $\upsilon \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$. По определению E^0 как замыкания пространства $(H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N)/\ker\varepsilon^0$ по норме $\|\varepsilon^0(\upsilon)\|$ имеем

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(iu)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(u)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma,\quad \forall\upsilon\in E^0$$

и значит, $\hat\upsilon = iu$ в E^0. Поскольку отображение i линейно, непрерывно и взаимно однозначно, E^{01}_π/K^{01} совпадает с E^0 алгебраически и топологически.

Тогда рассматриваемая асимптотическая система (9.4) равносильна уравнениям $\exists\hat\upsilon\in E^{01}_\pi$, такие что

$$\begin{aligned}&\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon,\quad \forall\upsilon\in E^{01}_\pi\\ &\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)+\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma = 3J(0)\pi\upsilon,\quad \forall\upsilon\in E^{01}_\pi\end{aligned}\tag{9.7}$$

при выполнении условий

$$|I(0)\upsilon|\le c\|\varepsilon^0(\upsilon)\|_{L^2(\omega)},\quad |J(0)\pi\upsilon|\le c\|\varepsilon^1(\pi\upsilon)\|_{L^2(\omega)}\tag{9.8}$$

Указанную систему можно также записать в виде

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat\upsilon-\pi\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon-\pi\upsilon)d\Gamma = I(0)(\upsilon-\pi\upsilon),\quad \forall\upsilon\in E^{01}_\pi$$

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)+\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma = 3J(0)\pi\upsilon,\quad \forall\upsilon\in E^{01}_\pi$$

Второе уравнение справедливо в K^{01}, а первое – в ортогональном дополнении $[K^{01}]^\perp$ пространства $K^{01}\subset E^{01}_\pi$. Такие же построения применимы к моделям $P(1, 1)$ и $P(2_n, 1)$, и будем использовать одно и то же обозначение E^{01}_π для пополнения соответственно фактор-пространств $(H^1(\omega)^N\times H^1(\omega)^N)/K$ и $(H^1(\omega)^N\times H^1(\omega)^N)/K\times L^2(\omega)$ по скалярному произведению (9.6).

Поскольку (8.1) имеет единственное решение в $(\hat\upsilon^0, \hat\upsilon^1)\in E^0$, которое полностью определяет $\varepsilon^0(\hat\upsilon^0, \hat\upsilon^1)$, естественно ввести аффинное подпространство

$$\mathcal{V}(\varepsilon^0)\overset{\text{def}}{=}\left\{\upsilon\in E^{01}_\pi : \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(w)d\Gamma = I(0)w,\ \forall w\in E^{01}_\pi\right\}\tag{9.9}$$

и использовать второе уравнение (9.7) для формулировки задачи минимизации по пространству $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$. Пространство $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$ непусто, так как уравнение

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(u)\cdot\cdot\,\varepsilon^0(\upsilon)+C^{-1}\varepsilon^1(\pi u)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon,\quad \forall\upsilon\in E^{01}_\pi$$

имеет единственное решение $u\in E^{01}_\pi$. Выбирая пробные функции вида $\upsilon = w-\pi w$, $w\in E^{01}_\pi$, получим, что u – решение (в E^{01}_π/K^{01}) уравнения

$$\int_{\omega} C^{-1}\varepsilon^0(u) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w)d\Gamma = I(0)w, \quad \forall w \in E_{\pi}^{01}$$

которое имеет единственное решение в E_{π}^{01}/K^{01}. Поэтому $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$ непусто, и приходим к следующей теореме существования.

Теорема 9.1 (об асимптотической оболочке). Пусть справедливо допущение 4.1 относительно C и пусть ω – ограниченная открытая липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть $I(0) : E_{\pi}^{01}/K^0 \to \mathbb{R}$ и $J(0) : E^{01} \to \mathbb{R}$ – произвольные линейные функционалы, удовлетворяющие условиям: при всех $v \in E^{01}$:

$$|I(0)v| \le c\|\varepsilon^0(v)\|_{L^2(\omega)} \tag{9.10}$$

$$|J(0)\pi v| \le c\|\varepsilon^1(\pi v)\|_{L^2(\omega)} \tag{9.11}$$

Тогда система уравнений (9.7) имеет единственное решение $\hat{v}$ в E_{π}^{01}.

При f^0, f^1, f^2, g^0, g^1 и g^2 из $L^2(\omega)^N$ условия (9.10) и (9.11) удовлетворяются в силу допущения 8.1 для моделей $P(2_n, 1)$, $P(1, 1)$ и в силу условия (8.47) для модели $P(2, 1)$.

Доказательство. Уже известно, что при выполнении условия (9.10) уравнение (8.1) имеет единственное решение в E_{π}^{01}/K^{01}. В силу допущения 4.2 норма $\|D^2b\|$ ограничена, и все константы κ_i заведомо ограничены в ω. Обозначим через c верхнюю границу всех этих констант. Возьмем $\beta \ge 1/2 + 8c^2$ и рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} W_{\beta}(v) = {} & \beta\left\{\int_{\omega} \frac{1}{2} C^{-1}\varepsilon^0(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v)d\Gamma - I(0)v\right\} - 3J(0)\pi v + \\ & + \int_{\omega} \frac{1}{2} C^{-1}\varepsilon^1(\pi v) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi v) + \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi v)d\Gamma \end{aligned} \tag{9.12}$$

При выполнении условий (9.10) и (9.11) этот функционал вполне определен и непрерывен в E_{π}^{01}. Он также коэрцитивен в силу выбора β. Тогда функционал $W_{\beta}(v)$ имеет единственный минимальный элемент $\hat{v}$ в $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$. При этом $\hat{v}$ полностью определяется следующим вариационным уравнением: для $\hat{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon^0)$ при всех $v \in \mathcal{V}(\varepsilon^0)$:

$$\begin{aligned} & \beta\left\{\int_{\omega} C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v-\hat{v})d\Gamma - I(0)\pi(v-\hat{v})\right\} - 3J(0)\pi(v-\hat{v}) + \\ & + \int_{\omega} \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v-\hat{v})) + C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(v-\hat{v})] + \\ & + C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v-\hat{v}))d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Но поскольку $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$ – аффинное пространство, можно использовать пробные функции из K^{01}. Отсюда следует, что вариационное уравнение (9.13) полностью эквивалентно существованию такого $\hat{v} \in \mathcal{V}(\varepsilon^0)$, что при всех $v \in K^{01}$:

$$\beta\left\{\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^0(v)d\Gamma - I(0)v\right\} - 3J(0)\pi v +$$
$$+\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi v) + \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi v)d\Gamma = 0. \tag{9.14}$$

Но выражение с множителем β равно нулю, поскольку $\varepsilon^0(v) = 0$ и $I(0) = 0$ на $\ker\varepsilon^0$ в силу условия (9.10). Следовательно, получаем как раз вариационное уравнение (9.3), т.е. второе уравнение системы (9.4) или (9.7) совместно с первым уравнением, которое определяется пространством $\mathcal{V}(\varepsilon^0)$. Тем самым теорема доказана.

9.3. Декомпозиция первого асимптотического уравнения. В разд. 8.1 было показано, что вариационное уравнение (8.3) можно привести к системе (8.10) для определяющего соотношения общего вида, удовлетворяющего допущению 4.1, и правой части l^0 общего вида. Это справедливо и для $I(0) \in (E^0)'$ (в общем виде) при выполнении условия $|I(0)v| \le c\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|_{L^2(\omega)}$, которое равносильно двум условиям:

$$\forall w \in L^2(\omega)^N; \quad |I(0)(0, w)| \le c\|w\|_{L^2(\omega)}$$

$$\forall v \in V \text{ (соотв. } V_{\gamma_0}), \quad \left|I(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)\right| \le c\left\|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\right\|_{L^2(\omega)}$$

Значит, существует такое $g^0 \in L^2(\omega)^N$, что

$$\forall w \in L^2(\omega)^N, \quad I(0)(0, w) = \int_\omega g^0 \cdot w d\Gamma$$

Следовательно, существует единственное $\hat{v} = (\hat{v}^0, \hat{v}^1) \in E^0$ (соотв. $E^0_{\gamma_0}$) такое, что $\hat{v}^0 \in E^P$ (соотв. $E^0_{\gamma_0}$), и при всех $v^0 \in V$ (соотв. V_{γ_0}):

$$[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})^0, \hat{v})^1]n = g^0, \quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)]\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma =$$
$$= I(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n) - \int_\omega g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)]n)d\Gamma \tag{9.15}$$

где второе соотношение есть соответствующее уравнение безмоментной оболочки. При специальном определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon I$ и специальной правой части существует единственное $\hat{v} = (\hat{v}^0, \hat{v}^1) \in E^0$ (соотв. $E^P_{\gamma_0}$), такое что $\hat{v}^0 \in E^P$ (соотв. $E^P_{\gamma_0}$), и при всех $v^0 \in V$ (соотв. V_{γ_0}):

$$[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v})^1]n = g^0$$

$$\int_\omega 2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\operatorname{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\operatorname{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = \tag{9.16}$$

$$= \int_\omega f^0 \cdot v^0 - g^0_\Gamma \cdot 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} g^0_n \mathrm{tr}\varepsilon^P_\Gamma(v^0) d\Gamma$$

при условии, что существует постоянная $c > 0$, такая что при всех $v^0 \in V$ (соотв. V_{γ_0}):

$$\left|\int_\omega f^0 \cdot v^0 - 2g^0_\Gamma \cdot \varepsilon_\Gamma(v^0)nd\Gamma\right| \le c\left\|\varepsilon^P_\Gamma(v^0)\right\|_{L^2(\omega)}$$

9.4. Декомпозиция второго асимптотического уравнения. Теперь осуществим декомпозицию второго вариационного уравнения при определяющем соотношении общего вида, удовлетворяющем допущению 4.1, и непрерывной линейной правой части общего вида $J(0)$ в E^{01}. Для этого исключим переменные $\hat{v}^2$ и $\hat{v}^1$ из $\varepsilon^1(\hat{v}^0, \hat{v}^1, \hat{v}^2)$ и $\varepsilon^0(\hat{v}^0, \hat{v}^1)$ так же, как и для уравнения безмоментной оболочки, полученного из асимптотической модели $P(1, 0)$. Затем в следующем разд. 9.5 конкретизируем результаты для случая, когда определяющим фактором является изгиб.

Декомпозиция для $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)$:

$$\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = e^1(v^0, v^1) + v^2 * n + n * v^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{1P}(v^0, v^1, v^2) = e^{1P}(v^0, v^1), \quad P\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n = e^1(v^0, v^1)n + v^2_\Gamma$$

$$\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)n \cdot n = 2v^2_n$$

При $(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^P_\Gamma(v^0) \\ 0 &= 2P\varepsilon^0(v^0, v^1)n = v^1_\Gamma + 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n = v^1_\Gamma + \nabla_\Gamma v^0_n - D^2 b v^0_\Gamma \\ 0 &= \varepsilon^0(v^0, v^1)n \cdot n = v^1_n \\ &\Rightarrow \forall(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0, \quad e^1(v^0, v^1)n = 0, \quad e^1(v^0, v^1) = e^{1P}(v^0, v^1) \end{aligned} \tag{9.17}$$

Напомним обозначение (6.2) для пространства

$$Q = \frac{H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N}{K}$$

снабженного нормой, порождаемой скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(u) \cdot\cdot\ \varepsilon^0(v) + e^1(u) \cdot\cdot\ e^1(v) d\Gamma$$

которая эквивалентна канонической фактор-норме в Q. Обозначим через Q_π пополнение пространства Q по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(u) \cdot\cdot\ \varepsilon^0(v) + e^1(\pi u) \cdot\cdot\ e^1(\pi v) d\Gamma$$

Сначала рассмотрим условие на правую часть $J(0)\pi v$. Пусть существует постоянная $c > 0$, такая что при всех $(v^0, v^1, v^2) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N \times L^2(\omega)^N$:

$$|J(0)(v^0, v^1, v^2)| \le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)\|^2]^{1/2}$$

В силу декомпозиции $\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2)$ имеем

$$|J(0)(v^0, v^1, v^2)| \le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|^2 +$$
$$+ \|(v^2 + Pe^1(v^0, v^1)n)*n + n*(v^2 + Pe^1(v^0, v^1)n)\|^2]^{1/2}$$

Переходя от переменной v^2 к новой переменной $w = v^2 + Pe^1(v^0, v^1)n = v^2 + e^1(v^0, v^1)n$, получаем

$$|J(0)(v^0, v^1, w - e^1(v^0, v^1)n)| \le$$
$$\le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|^2 + \|w*n + n*w\|^2]^{1/2}$$

Значит, существует такое $q \in L^2(\omega)^N$, что

$$\forall w \in L^2(\omega)^N, \quad 3J(0)(0, 0, w) = \int_\omega q \cdot w d\Gamma$$

$$\Rightarrow 3J(0)(v^0, v^1, v^2) = 3J(0)(v^0, v^1, 0) + \int_\omega q \cdot v^2 d\Gamma$$

При рассматриваемой специальной правой части $q = f^0 + 2g^1 + \kappa_1 2g^0$. Из оставшейся части условия на $J(0)$ следует

$$|J(0)(v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n)| \le c[\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|^2]^{1/2}$$

Полученное условие можно разложить далее, вводя переменную $w^1 = v^1 + 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n$:

$$J(0)(v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n) = J(0)(v^0, w^1 - 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n), \quad -e^1(v^0, w^1 - 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)n)$$

Но $e^1(v^0, w^1 - 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)n = e^1(0, w^1)n + e^1(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n)n = \varepsilon_\Gamma(w^1)n + \rho(v^0)n = \varepsilon_\Gamma(w^1)n$. Поэтому

$$J(0)(v^0, v^1, -e^1(v^0, v^1)n) = J(0)(v^0, w^1 - 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, -\varepsilon_\Gamma(w^1)n)$$

Кроме того

$$\|\varepsilon^0(v^0, v^1)\|^2 + \|e^{1P}(v^0, v^1)\|^2 = \|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\|^2 + \frac{1}{4}\|w^1*n + n*w^1\|^2 + \|\rho(v^0) + \varepsilon_\Gamma^P(w^1)\|^2$$

В результате получаем эквивалентное условие: существует такая постоянная $c > 0$, что при всех $(v^0, w^1) \in H^1(\omega)^N \times H^1(\omega)^N$:

$$|J(0)(v^0, w^1 - 2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, -\varepsilon_\Gamma(w^1)n)| \le$$
$$\le c\{\|\varepsilon_\Gamma^P(v^0)\|^2 + \|w^1\|^2 + \|\rho(v^0) + \varepsilon_\Gamma^P(w^1)\|^2\}^{1/2}$$

На $\ker\varepsilon^0$ имеем $e^1(\upsilon^0, \upsilon^1)n = 0$, и тогда $J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, -e^1(\upsilon^0, \upsilon^1)n) = J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0)$. Поэтому указанное выше условие сводится к следующему: существует постоянная $c > 0$, такая что

$$\forall(\upsilon^0, \upsilon^1) \in \ker\varepsilon^0, \quad |J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0)| \le c\|e^{1P}(\upsilon^0, \upsilon^1)\|$$

Далее $w^1 = \upsilon^1 + 2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n = 0$. Следовательно, последнее условие можно переформулировать так: существует постоянная $c > 0$, такая что

$$\forall\upsilon^0 \in H^1(\omega)^N \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P, \quad |J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n, 0)| \le c\|\rho(\upsilon^0)\|$$

Первое уравнение для $\hat{\upsilon}$ – общее для всех моделей. В п. 8.2 было показано, что оно эквивалентно системе двух уравнений: существует такое $\hat{\upsilon}^0 \in E^P$, что

$$\begin{gathered}
\forall\upsilon^0 \in V, \quad \int_\omega [C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)d\Gamma = \\
= I(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n) - \int_\omega 2g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)]n)d\Gamma \\
\hat{\upsilon}_n^1 = 2N^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]n) \cdot n \in L^2(\omega)^N \\
P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}_\Gamma^1)n = PN^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]n) \in L^2(\omega)^N
\end{gathered} \tag{9.18}$$

Теперь для каждой модели осуществим декомпозицию второго уравнения по $\pi\hat{\upsilon}$:

$$\int_\omega [C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{\upsilon}) + \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon})] \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2)d\Gamma = 3J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) \tag{9.19}$$

при всех $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in \ker\varepsilon^0$ и $\upsilon^2 \in L^2(\omega)^N$. При $(\upsilon^0, \upsilon^1) \in \ker\varepsilon^0$ и $\upsilon^2 \in L^2(\omega)^N$ имеем $\varepsilon^1(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2) = e^{1P}(\upsilon^0, \upsilon^1) + \upsilon^2 * n + n * \upsilon^2$. В п. 8.2 было показано, что согласно теореме 5.1, из тождества $[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1)]n = g^0$ следуют равенства

$$\begin{gathered}
\hat{\upsilon}_n^1 = 2N^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]n) \cdot n \\
P\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}_\Gamma^1)n = PN^{-1}(g^0 - [C^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]n) \\
C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1) \cdot\cdot\, \tau = C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \tau + 2g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}\tau]n)
\end{gathered}$$

В случае модели $P(1, 1)$ имеем $\upsilon^2 = \hat{\upsilon}^2 = 0$, и тогда уравнение (9.19) асимптотической модели $P(1, 1)$ приводится к виду

$$\begin{gathered}
\forall\upsilon \in \ker\varepsilon^0, \quad \int_\omega [C^{-1}e^{1P}(\pi\hat{\upsilon})] \cdot\cdot\, e^{1P}(\upsilon) + \kappa_1[C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, e^{1P}(\upsilon)d\Gamma = \\
= 3J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) - \int_\omega \kappa_1 2g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(\upsilon)]n)d\Gamma
\end{gathered} \tag{9.20}$$

Но $e^{1P}(\pi\hat{v}) = \rho((\pi\hat{v})^0)$ (см. определения ρ и W^0 в теореме 7.1), а значит, это уравнение эквивалентно следующему: существует $(\pi\hat{v})^0 \in (W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P)/K^0$, такое что

$$\begin{aligned}
&\forall v^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P, \quad \int_\omega [C^{-1}\rho((\pi\hat{v})^0)] \cdot\cdot\, \rho(v^0) + \kappa_1[C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)] \cdot\cdot\, \rho(v^0)d\Gamma = \\
&= 3J(0)(v^0, -2\varepsilon(v^0)n, 0) - \int_\omega 2\kappa_1 g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}\rho(v^0)]n)d\Gamma \\
&(\pi\hat{v})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{v})^0)n \in H^1(\omega)^N
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Для определяющего соотношения $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ воспользуемся результатами п. 8.2 и тем, что

$$\begin{aligned}
[C^{-1}e^{1P}(\pi\hat{v})] \cdot\cdot\, e^{1P}(v) &= 2\mu e^1(\pi\hat{v}) \cdot\cdot\, e^{1P}(v) + \lambda\mathrm{tr}e^1(\pi\hat{v})\mathrm{tr}e^{1P}(v) = \\
&= 2\mu e^{1P}(\pi\hat{v}) \cdot\cdot\, e^{1P}(v) + \lambda\mathrm{tr}e^{1P}(\pi\hat{v})\mathrm{tr}e^{1P}(v)
\end{aligned}$$

поскольку $e^1(\pi\hat{v})n \cdot n = 0$, а значит $\mathrm{tr}e^1(\pi\hat{v}) = \mathrm{tr}e^{1P}(\pi\hat{v})$. В результате получаем: существует элемент $(\pi\hat{v})^0 \in (W^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P)/K^0$, такой что

$$\begin{aligned}
&\forall v^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P, \quad \int_\omega 2\mu\rho((\pi\hat{v})^0) \cdot\cdot\, \rho(v^0) + \lambda\mathrm{tr}\rho((\pi\hat{v})^0)\mathrm{tr}\rho(v^0) + \\
&+ \kappa_1\left[2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0) \cdot\cdot\, \rho(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\rho(v^0)\right]d\Gamma = \\
&= 3J(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, 0) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\int_\omega \kappa_1 g_n^0 \mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma \\
&(\pi\hat{v})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{v})^0)n \in H^1(\omega)^N
\end{aligned} \tag{9.22}$$

В случае моделей $P(2, 1)$ и $P(2_n, 1)$ будем вновь исходить из уравнения (9.19). Для пробных функций $(0, 0, v^2)$, $v^2 \in L^2(\omega)^N$ (соответственно $(0, 0, v_n^2 n)$, $v_n^2 \in L^2(\omega)$), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_\omega 2([C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})]n + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})]n) \cdot v^2 d\Gamma = 3J(0)(0, 0, v^2) = \int_\omega q \cdot v^2 d\Gamma \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} [C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})]n + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})]n = q/2 \ \text{для модели} \quad P(2, 1) \\ [C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})]n \cdot n + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})]n \cdot n = q_n/2 \ \text{для модели} \quad P(2_n, 1) \end{array}
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Введем тензоры напряжений $\sigma^1(\pi\hat{v}) = C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})$ и $\sigma^0(\hat{v}) = C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\sigma^0(\hat{v})n = g^0, \quad \sigma^1(\pi\hat{v})n = \frac{1}{2}q - \kappa_1 q^0 \quad \text{для модели} \quad P(2, 1)\\
&\sigma^0(\hat{v})n = g^0, \quad \sigma^1(\pi\hat{v})n \cdot n = \frac{1}{2}q_n - \kappa_1 q_n^0 \quad \text{для модели} \quad P(2_n, 1)\\
&\sigma^0(\hat{v})n = g^0 \quad \text{для модели} \quad P(1, 1)
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

Для пробных функций $(v^0, v^1, 0)$, $(v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$, имеем $\varepsilon^1(\pi v) = e^1(v) = e^{1P}(v)$ и

$$
\int_\omega [C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{v})] \cdot\cdot\, e^{1P}(v) + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})] \cdot\cdot\, e^{1P}(v) d\Gamma = 3J(0)(v^0, v^1, 0) \tag{9.25}
$$

Различия в выражениях для тензора напряжений в различных моделях возникают из-за того, что в первом случае разрешается использовать пробные функции v^2, во втором – $v_n^2 n$, а в третьем – ничего.

Случай плоских нормальных напряжений в нулевом порядке по z ($\sigma^0(\hat{v})n \cdot n = 0$) соответствует равенству $g_n^0 = 0$, а в первом порядке по z ($\sigma^1(\pi\hat{v})n \cdot n = 0$) – равенству $q_n - 2\kappa_1 g_n^0 = f_n^0 + 2g_n^1 = 0$. Случай плоских нормальных напряжений в нулевом порядке по z ($\sigma^0(\hat{v})n \cdot n = 0$) совместно с условием Лява–Кирхгоффа ($P\sigma^0(\hat{v})n = 0$) соответствует равенству $g^0 = 0$. Он совпадает со случаем нулевых нормальных напряжений ($\sigma^0(\hat{v})n = 0$) в нулевом порядке по z. В случае нулевых нормальных напряжений в первом порядке по z ($\sigma^1(\pi\hat{v})n = 0$) имеем $q - 2\kappa_1 q^0 = f^0 + 2g^1 = 0$. В литературе обычно принимается $q^0 = 0 = g^1$. Для пластины из условия совместности (8.35) и равенства $g_\Gamma^0 = 0$ следует, что $f_n^0 = 0$. Важно отметить, что такие частные случаи являются следствием выбора режима нагружения, а не предположений относительно свойств оболочки.

Как и в случае модели $P(1, 1)$, будем теперь рассматривать вариационное уравнение (9.25) и исключим переменную $\hat{v}^2$ (соотв. $\hat{v}_n^2$). Из декомпозиции для $\varepsilon^1(v)$:

$$
\varepsilon^1(v^0, v^1, v^2) = e^1(v^0, v^1) + v^2 * n + n * v^2
$$

и в силу того, что $e^1(\pi\hat{v})n = 0$, имеем

$$
\varepsilon^1(\pi v) = e^{1P}(\pi v) + (\pi v)^2 * n + n * (\pi v)^2
$$

$$
\|\varepsilon^1(\pi v)\|^2 = \|e^{1P}(\pi v)\|^2 + \|(\pi v)^2 * n + n * (\pi v)^2\|^2
$$

$$
(\pi v)^2 \in L^2(\omega)^N, \quad ((\pi v)^0, (\pi v)^1) \in \ker\varepsilon^0 \cap Q
$$

Решение уравнения (9.25) эквивалентно поиску такого $\pi\hat{v} \in Q \times L^2(\omega)^N$ (соотв. $Q \times L^2(\omega)$), что при всех $v = (v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$ и всех $v^2 \in L^2(\omega)^N$ (соотв. $v^2 = v_n^2 n$, $v_n^2 \in L^2(\omega)$) справедливо соотношение

$$\int_\omega [C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2) \cdot\cdot (e^{1P}(v) + v^2 * n + n * v^2)] + \tag{9.26}$$
$$+ \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}) \cdot\cdot (e^{1P}(v) + v^2 * n + n * v^2) d\Gamma = 3J(0)(v^0, v^1, 0) + \int_\omega q \cdot v^2 d\Gamma$$

Необходимо различать случаи $P(2, 1)$ и $P(2_n, 1)$. Для модели $P(2, 1)$ уравнение (9.26) приводит к системе: при всех $v = (v^0, v^1) \in \ker\varepsilon^0$:

$$[C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2)]n + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v})]n = q/2$$

$$\int_\omega [C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2)] \cdot\cdot e^{1P}(v) + \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{v}) \cdot\cdot e^{1P}(v) d\Gamma = 3J(0)(v^0, v^1, 0)$$

Для первого уравнения имеем

$$[C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2)]n = \tilde{q} \overset{\text{def}}{=} q/2 - \kappa_1 g^0$$

Теперь можно применить теорему 5.1 с учетом соотношений

$$[e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2]^P = e^{1P}(\pi\hat{v})$$

$$[e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2]n = (\pi\hat{v})^2 + (\pi\hat{v})^2_n n$$

$$[e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2]_{nn} = 2(\pi\hat{v})^2_n$$

откуда следует, что

$$N(\pi\hat{v})^2 = \tilde{q} - [C^{-1}e^{1P}(\pi\hat{v})]n$$

$$(\pi\hat{v})^2 = N^{-1}(\tilde{q} - [C^{-1}e^{1P}(\pi\hat{v})]n) \in L^2(\omega)^N$$

$$[C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + (\pi\hat{v})^2 * n + n*(\pi\hat{v})^2)] =$$
$$= C^{-1}_{eP}e^{1P}(\pi\hat{v}) + C^{-1}(N^{-1}\tilde{q} * n + n*(N^{-1}\tilde{q}))$$

После подстановки во второе уравнение получаем

$$\int_\omega [C^{-1}_{eP}(e^{1P}(\pi\hat{v}) + \kappa_1\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0))] \cdot\cdot e^{1P}(v) d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \int_\omega [C^{-1}(N^{-1}\tilde{q} * n + n*(N^{-1}\tilde{q}))] \cdot\cdot e^{1P}(v) -$$

$$- \kappa_1[C^{-1}(N^{-1}g^0 * n + n*(N^{-1}g^0))] \cdot\cdot e^{1P}(v) d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \frac{1}{2}[C^{-1}(N^{-1}q * n + n*(N^{-1}q))] \cdot\cdot e^{1P}(v) d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \int_\omega q \cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(v)]n) d\Gamma$$

В итоге для модели $P(2, 1)$ второе асимптотическое уравнение принимает вид

$$\forall \upsilon \in \ker\varepsilon^0, \quad \int\limits_\omega [C_{eP}^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{\upsilon}) + \kappa_1\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0))] \cdot\cdot\, e^{1P}(\upsilon)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) - \int\limits_\omega q \cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(\upsilon)]n)d\Gamma$$

В терминах тензора кривизн ρ имеем: существует элемент $(\pi\hat{\upsilon})^0 \in (W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P)/K^0$, такой что

$$\forall \upsilon^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P$$

$$\int\limits_\omega [C_{eP}^{-1}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0)] \cdot\cdot\,\rho(\upsilon^0) + \kappa_1[C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n, 0) - \int\limits_\omega q \cdot N^{-1}([C^{-1}\rho(\upsilon^0)]n)d\Gamma \tag{9.27}$$

$$(\pi\hat{\upsilon})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{\upsilon})^0)n \in H^1(\omega)^N$$

$$(\pi\hat{\upsilon})^2 = N^{-1}(q/2 - \kappa_1 g)^0 - [C^{-1}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0)]n \in L^2(\omega)^N$$

При определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ и специальной правой части имеем

$$\forall \upsilon \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P$$

$$\int\limits_\omega 2\mu[\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \kappa_1\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0) +$$

$$+ \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}[\mathrm{tr}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \kappa_1\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]\mathrm{tr}\rho(\upsilon^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0), 0) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\int\limits_\omega g_n^1\mathrm{tr}\rho(\upsilon^0)d\Gamma \tag{9.28}$$

$$(\pi\hat{\upsilon})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{\upsilon})^0)n \in H^1(\omega)^N$$

$$2(\pi\hat{\upsilon})_n^2 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \frac{1}{2\mu+\lambda}g_n^1, \quad (\pi\hat{\upsilon})_\Gamma^2 = \frac{1}{2\mu}g_\Gamma^1$$

В случае модели $P(2_n, 1)$ уравнение (9.26) приводит к системе: при всех $\upsilon = (\upsilon^0, \upsilon^1) \in \ker\varepsilon^0$:

$$[C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{\upsilon}) + 2(\pi\hat{\upsilon})_n^2 n * n)]n \cdot n + \kappa_1[C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon})]n \cdot n = q_n/2$$

$$\int\limits_\omega [C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{\upsilon}) + 2(\pi\hat{\upsilon})_n^2 n * n)] \cdot\cdot\, e^{1P}(\upsilon) + \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, e^{1P}(\upsilon)d\Gamma = 3J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0)$$

Для первого уравнения $(\pi\hat{v})^2_n \in L^2(\omega)$ и

$$[C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v})+2(\pi\hat{v})^2_n n*n)]_{nn} = \tilde{q}_n \overset{\text{def}}{=} q_n/2-\kappa_1 g^0_n$$

Применяя теорему 5.3, получим

$$[e^{1P}(\pi\hat{v})+2(\pi\hat{v})^2_n n*n]^n = e^{1P}(\pi\hat{v}), \quad [e^{1P}(\pi\hat{v})+2(\pi\hat{v})^2_n n*n]_{nn} = 2(\pi\hat{v})^2_n$$

$$(\pi\hat{v})^2_n = \nu^{-1}\tilde{q}_n - [C^{-1}(e^1(\pi\hat{v}))]_{nn}, \quad \nu \overset{\text{def}}{=} 2[C^{-1}(n*n)]_{nn}$$

$$C^{-1}(e^{1P}(\pi\hat{v})+2(\pi\hat{v})^2_n n*n) \cdot\cdot\, e^{1P}(v) =$$
$$= C^{-1}_{en}e^{1P}(\pi\hat{v}) \cdot\cdot\, e^{1P}(v) + 2\nu^{-1}\tilde{q}_n[C^{-1}e^{1P}(v)]_{nn}$$

В итоге при всех $v \in \ker\varepsilon^0$ имеем

$$\int_\omega [C^{-1}_{en}e^{1P}(\pi\hat{v}) + \kappa_1 C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0)] \cdot\cdot\, e^{1P}(v)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \int_\omega \tilde{q}_n 2\nu^{-1}[C^{-1}e^{1P}(v)]n\cdot n + \kappa_1 2g^0 \cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(v)]n)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \int_\omega 2(\tilde{q}_n\nu^{-1}Nn + \kappa_1 g^0)\cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(v)]n)d\Gamma$$

Для модели $P(2_n, 1)$ второе асимптотическое уравнение принимает вид

$$\forall v \in \ker\varepsilon^0, \quad \int_\omega [C^{-1}_{en}e^{1P}(\pi\hat{v}) + \kappa_1 C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0)] \cdot\cdot\, e^{1P}(v)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, v^1, 0) - \int_\omega 2\left[\left(\frac{1}{2}q_n - \kappa_1 g^0_n\right)\nu^{-1}Nn + \kappa_1 g^0\right]\cdot N^{-1}([C^{-1}e^{1P}(v)]n)d\Gamma$$

В терминах тензора ρ имеем: существует элемент $(\pi\hat{v})^0 \in (W^0 \cap \ker\varepsilon^P_\Gamma)/K^0$, такой что

$$\forall v^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon^P_\Gamma$$

$$\int_\omega [C^{-1}_{en}\rho((\pi\hat{v})^0)] \cdot\cdot\, \rho(v^0) + \kappa_1[C^{-1}_{eP}\varepsilon^P_\Gamma(\hat{v}^0)] \cdot\cdot\, \rho(v^0)d\Gamma = 3J(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, 0) -$$

$$-\int_\omega 2\left[\left(\frac{1}{2}q_n - \kappa_1 g^0_n\right)\nu^{-1}Nn + \kappa_1 g^0\right]\cdot N^{-1}([C^{-1}\rho(v)]n)d\Gamma \tag{9.29}$$

$$(\pi\hat{v})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{v})^0)n \in H^1(\omega)^N$$

$$(\pi\hat{v})^2_n = \nu^{-1}(q_n/2 - \kappa_1 g^0_n - [C^{-1}\rho((\pi\hat{v})^0)]n\cdot n) \in L^2(\omega)$$

При определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ и $\tau \in \mathrm{Sym}_N^n$:

$$Nn = 2[C^{-1}(n^*n)]n = 2(2\mu + \lambda)n, \quad \nu = Nn \cdot n = 2(2\mu + \lambda), \quad \nu^{-1}Nn = n$$

$$[C^{-1}\tau]n = 2\mu\tau n + \lambda\mathrm{tr}\tau n, \quad [C^{-1}\tau]n \cdot n = \lambda\mathrm{tr}\tau$$

$$N^{-1}([C^{-1}\tau]n) = 2\left[2\tau n + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}\mathrm{tr}\tau n\right]$$

$$C_{en}^{-1} = 2\mu\tau + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}\mathrm{tr}\tau P$$

Следовательно, существует элемент $(\pi\hat{\upsilon})^0 \in (W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P)/K^0$, такой что

$$\forall\upsilon^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P, \quad \int\limits_\omega 2\mu[\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \kappa_1\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)] \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0) +$$

$$+ \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}[\mathrm{tr}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \kappa_1\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0)]\rho(\upsilon^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(\upsilon^0, \upsilon^1, 0) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}\int\limits_\omega g_n^1\mathrm{tr}\rho(\upsilon^0)d\Gamma \tag{9.30}$$

$$(\pi\hat{\upsilon})^1 = -2\varepsilon_\Gamma((\pi\hat{\upsilon})^0)n \in H^1(\omega)^N$$

$$2(\pi\hat{\upsilon})_n^2 = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}\mathrm{tr}\rho((\pi\hat{\upsilon})^0) + \frac{1}{2\mu + \lambda}g_n^1$$

Заметим, что при специальном определяющем соотношении $C^{-1}\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda\mathrm{tr}\varepsilon I$ и специальной правой части уравнения моделей $P(2_n, 1)$ и $P(2, 1)$ совпадают, только для модели $P(2, 1)$ также задается еще $(\pi\hat{\upsilon})_\Gamma^2$. Но это, вообще говоря, неверно при произвольном определяющем соотношении, так как операторы C_{en} и C_{eP} различны. Таким образом, различия между тремя рассматриваемыми моделями заключаются в третьем и четвертом (когда оно существует) уравнениях.

9.5. Случай преобладающего изгиба. Случай преобладающего изгиба для асимптотической оболочки – это частный случай асимптотических моделей, характеризующийся тем, что обобщенная мембранная энергия равна нулю, т.е. $\varepsilon^0(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1) = 0$ (например, $I(0) = 0$ или $f^0 = g^0 = 0$). При выполнении этого условия пространство решений совпадает с пространством пробных функций для второго уравнения системы (9.7). В частности $\varepsilon^1(\pi\hat{\upsilon}) = \varepsilon^1(\hat{\upsilon})$. Этот случай представляет самостоятельный интерес, поскольку проекция $\pi\hat{\upsilon}$ определяется уравнениями

$$\varepsilon^0(\pi\hat{\upsilon}) = 0$$

$$\int\limits_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma = 3J(0)\pi\upsilon - \int\limits_\omega \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma, \quad \forall\upsilon \in E_\pi^{01}$$

где $\hat{\upsilon} - \pi\hat{\upsilon}$ и связующий член $\varepsilon^0(\hat{\upsilon})$ полностью определяются первым уравнением системы (9.7):

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon, \quad \forall\upsilon \in E_\pi^{01}$$

решение $\hat{\upsilon}$ есть сумма решений $\hat{\upsilon} - \pi\hat{\upsilon}$ и $\pi\hat{\upsilon}$ двух указанных уравнений.

В случае преимущественно изгибных деформаций (при $I(0) = 0$ или $g^0 = f^0 = 0$) имеем

$$\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) = 0 \Rightarrow e^1(\hat{\upsilon}) = e^{1P}(\hat{\upsilon}) = \rho(\hat{\upsilon}^0), \quad \varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) = 0$$

и тогда множество решений для каждой из трех моделей упрощается. Для модели $P(1, 1)$ существует такое $\hat{\upsilon}^0 \in W^0/K^0$, что

$$\forall\upsilon^0 \in V, \quad \int_\omega C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall\upsilon^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P \cap W^0, \quad \int_\omega C^{-1}\rho(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0)d\Gamma = 3J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n, 0) \tag{9.31}$$

$$\hat{\upsilon}^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)n \in H^1(\omega)^N$$

В случае модели $P(2, 1)$ существует такое $\hat{\upsilon}^0 \in W^0/K^0$, что

$$\forall\upsilon^0 \in V, \quad \int_\omega C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall\upsilon^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P \cap W^0$$

$$\int_\omega C_{eP}^{-1}\rho(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0)d\Gamma = 3J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n, 0) - \tag{9.32}$$

$$-\int_\omega q \cdot N^{-1}([C^{-1}\rho(\upsilon^0)]n)d\Gamma$$

$$\hat{\upsilon}^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{\upsilon}^0)n \in H^1(\omega)^N, \quad \hat{\upsilon}^2 = N^{-1}(q/2 - [C^{-1}\rho(\hat{\upsilon}^0)]n) \in L^2(\omega)^N$$

В случае $P(2_n, 1)$, существует такое $\hat{\upsilon}^0 \in W^0/K^0$, что

$$\forall\upsilon^0 \in V, \quad \int_\omega C_{eP}^{-1}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \varepsilon_\Gamma^P(\upsilon^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall\upsilon^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P \cap W^0, \quad \int_\omega C_{en}^{-1}\rho(\hat{\upsilon}^0) \cdot\cdot\, \rho(\upsilon^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(\upsilon^0, -2\varepsilon_\Gamma(\upsilon^0)n, 0) - \int_\omega q_n\nu^{-1}([C^{-1}\rho(\upsilon^0)]n) \cdot n d\Gamma \tag{9.33}$$

$$\hat{v}^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{v}^0)n \in H^1(\omega)^N$$

$$\hat{v}_n^2 = \nu^{-1}(q_n/2 - [C^{-1}\rho(\hat{v}^0)]n\cdot n) \in L^2(\omega)$$

При специальном определяющем соотношении асимптотическая модель $P(1, 1)$ описывается вариационным уравнением. Именно, требуется найти вектор $\hat{v}^0 \in W^0/K^0$, такой что

$$\forall v^0 \in V, \quad \int\limits_\omega 2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall v^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P \cap W^0, \quad \int\limits_\omega 2\mu\rho(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\rho(v^0) + \lambda\mathrm{tr}\rho(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma = 3J(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, 0) \tag{9.34}$$

$$\hat{v}_n^1 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0) = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}[\kappa_1\hat{v}_n^0 + \mathrm{div}_\Gamma(\hat{v}_\Gamma^0)]$$

$$\hat{v}_\Gamma^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{v}^0)n = -\nabla_\Gamma(\hat{v}_n^0) + D^2b\hat{v}_\Gamma^0 \text{ (условие Лява–Кирхгоффа).}$$

При этом $\sigma^0(\hat{v})n = 0$.

Для модели $P(2, 1)$ существует такое $\hat{v}^0 \in W^0/K^0$, что

$$\forall v^0 \in V, \quad \int\limits_\omega 2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall v^0 \in \ker\varepsilon_\Gamma^P \cap W^0, \quad \int\limits_\omega 2\mu\rho(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\rho(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\rho(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(v^0)n, 0) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\int\limits_\omega \frac{1}{2}g_n^1\mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma \tag{9.35}$$

$$\hat{v}_n^1 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0) = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}[\kappa_1\hat{v}_n^0 + \mathrm{div}_\Gamma(\hat{v}_\Gamma^0)]v$$

$$\hat{v}_\Gamma^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{v}^0)n = -\nabla_\Gamma(\hat{v}_n^0) + D^2b\hat{v}_\Gamma^0 \quad \text{(условие Лява–Кирхгоффа)}$$

$$2\hat{v}_n^2 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\rho(\hat{v}^0) + \frac{1}{2\mu+\lambda}g_n^1, \quad \hat{v}_\Gamma^2 = \frac{1}{2\mu}g_\Gamma^1$$

При этом $\sigma^0(\hat{v})n = 0$ и $\sigma^1(\hat{v})n = g^1$. Билинейная часть второго уравнения (9.35) в точности совпадает с таковой в работах [21, 22].

Для модели $P(2_n, 1)$ существует такое $\hat{v}^0 \in W^0/K^0$, что

$$\forall v^0 \in V, \quad \int\limits_\omega 2\mu\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\varepsilon_\Gamma^P(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(v^0)d\Gamma = 0$$

$$\forall v^0 \in W^0 \cap \ker\varepsilon_\Gamma^P, \quad \int\limits_\omega 2\mu\rho(\hat{v}^0)\cdot\cdot\,\rho(v^0) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\rho(\hat{v}^0)\mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma =$$

$$= 3J(0)(v^0, -2\varepsilon_\Gamma(\hat{v}^0)n, 0) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\int\limits_\omega g_n^1 \mathrm{tr}\rho(v^0)d\Gamma$$

$$2\hat{v}_n^2 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\rho(\hat{v}^0) + \frac{1}{2\mu+\lambda}g_n^1$$

$$\hat{v}_n^1 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\mathrm{tr}\varepsilon_\Gamma^P(\hat{v}^0) = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}[\kappa_1\hat{v}_n^0 + \mathrm{div}_\Gamma(\hat{v}_\Gamma^0)]$$

$$\hat{v}_\Gamma^1 = -2\varepsilon_\Gamma(\hat{v}^0)n = -\nabla_\Gamma(\hat{v}_n^0) + D^2 b\hat{v}_\Gamma^0 \quad \text{(условие Лява–Кирхгоффа)}$$

При этом $\sigma^0(\hat{v})n = 0$ и $\sigma^1(\hat{v})n \cdot n = g_n^1$.

9.6. Сходимость к асимптотическим моделям оболочек. После того, как установлена вторая часть асимптотической модели, остается указать, в каком смысле имеет место сходимость решений.

Теорема 9.2. Пусть справедливы допущения 4.1, 4.2 и пусть $v_h \in E^{01}$, $\hat{v} \in E_\pi^{01}$ суть решения соответственно уравнений (4.39) и (9.7).

1. Модель $P(2, 1)$. Пусть выполнено условие (8.47). Тогда при $h \to 0$ имеем слабую сходимость

$$v_h \rightharpoonup \hat{v} \text{ в } E_\pi^{01} \tag{9.36}$$

а $h\|\varepsilon^1(v_h)\|$ ограничено.

2. Пусть для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$ справедливо допущение 8.1, а для модели $P(2, 1)$ удовлетворяются условия (8.43), (8.44) и (8.45). Тогда при $h \to 0$ имеем

$$\int\limits_\omega \left\|\varepsilon^0(v_h - \hat{v})\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))\right\|^2 + h^2\left\|\varepsilon^1(v_h)\right\|^2 d\Gamma \to 0 \tag{9.37}$$

где $\pi(v)$ обозначает проекцию v на $\ker\varepsilon^0 \overset{\text{def}}{=} \{v \in E_\pi^{01} : \varepsilon^0(v^0, v^1) = 0\}$.

Доказательство. 1. *Слабая сходимость*. Сначала покажем, что последовательность $\{v_h\} \subset E_\pi^{01}$ ограничена в E_π^{01} при $h \to 0$. Тогда для любой подпоследовательности, слабо сходящейся к некоторому $w \in E_\pi^{01}$, покажем, что w – решение системы (9.7). В силу единственности решение w будет совпадать с единственным решением $\hat{v}$, а вся последовательность $\{v_h\}$ будет слабо сходиться к $\hat{v}$ в E_π^{01}.

В силу допущения 8.1 и коэрцитивности C^{-1} имеем: при $h \to 0$ существуют $\alpha > 0$ и $c > 0$, такие что

$$\int\limits_\omega \bar{\alpha}_0(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + 2\bar{\alpha}_1(h)C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 + \bar{\alpha}_2(h)C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma = I(h)v_h$$

$$\Rightarrow \alpha\left\{\left\|\varepsilon_h^0\right\|_{L^2}^2 + h^2\left\|\varepsilon_h^1\right\|_{L^2}^2\right\} \le c\left\{\left\|\varepsilon_h^0\right\|_{L^2}^2 + h^2\left\|\varepsilon_h^1\right\|_{L^2}^2\right\}^{1/2}$$

Тогда при $h \to 0$:

$$\left\|\varepsilon^0(v_h^0, v_h^1)\right\|_{L^2}^2 + h^2\left\|\varepsilon^1(v_h^0, v_h^1, v_h^2)\right\|_{L^2}^2 = \left\|\varepsilon_h^0\right\|_{L^2}^2 + h^2\left\|\varepsilon_h^1\right\|_{L^2}^2 \le c^2/\alpha^2$$

Следовательно, $\varepsilon^0(\upsilon_h)$ и $h\varepsilon^1(\upsilon_h)$ ограничены в L^2. Далее в уравнении (4.39) возьмем пробные функции вида $\pi\upsilon_h$ и разделим на h^2. Получим $\varepsilon^0(\pi\upsilon_h) = 0$, $\varepsilon^1(\pi\pi(\upsilon_h)) = \varepsilon^1(\pi\upsilon_h)$ и

$$\int\limits_\omega \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h) + \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma = J(h)\pi\upsilon_h$$

По условию (8.50) леммы 8.2:

$$|J(h)\pi\upsilon_h| \le c\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)}$$

и, кроме того

$$\left|\int\limits_\omega \frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma\right| \le c\left\|\varepsilon^0(\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)}\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)} \le$$

$$\le c'\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)}$$

в силу ограниченности $\|\varepsilon^0(\upsilon_h)\|_{L^2(\omega)}$. Что касается первого слагаемого, используя определение π, находим

$$T_h \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\omega \frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma =$$

$$= \int\limits_\omega \frac{1}{3}C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma + h^2\int\limits_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right]C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma =$$

$$= \int\limits_\omega \frac{1}{3}C^{-1}\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma + h^2\int\limits_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right]C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)d\Gamma$$

В силу коэрцитивности C^{-1} и ограниченности коэффициента в подынтегральном выражении имеем: при $h \to 0$ существуют $\nu > 0$ и $c > 0$, такие что

$$|T_h| \ge \nu\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|^2_{L^2(\omega)} - ch^2\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)}\left\|\varepsilon^1(\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)} \ge$$

$$\ge \nu\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|^2_{L^2(\omega)} - c'h\left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)}$$

поскольку уже известно, что $h\|\varepsilon^1(\upsilon_h)\|_{L^2(\omega)}$ ограничено. Поэтому, в силу трех полученных оценок выражение $\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\|_{L^2(\omega)}$ ограничено при $h \to 0$, а из оценки, указанной в начале доказательства, следует

$$\left\|\varepsilon^0(\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)} + \left\|\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\right\|_{L^2(\omega)} \le c$$

Значит, последовательность $\{\upsilon_h\}$ ограничена в E^{01}_π при $h \to 0$, а следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому $w \in E^{01}_\pi$.

Вариационное уравнение (4.39) можно записать в виде

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 d\Gamma - I(h)\upsilon +$$

$$+\frac{h^2}{3}\left\{\int_\omega \kappa_2 C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 + \kappa_1 (C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^0) + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 d\Gamma\right\}+ \tag{9.38}$$

$$+h^4\left\{\int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right] C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^0 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right](C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^0) + \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 d\Gamma\right\} = 0$$

при всех υ в E^{01}. Уравнение содержит три группы слагаемых, имеющих порядки 1, h^2 и h^4. Слагаемые порядка h^2 ограничены величиной

$$ch^2(\|\varepsilon_h^0\| + \|\varepsilon_h^1\|)(\|\varepsilon^0\| + \|\varepsilon^1\|) \le c'h(\|\varepsilon^0\| + \|\varepsilon^1\|)$$

в силу ограниченности членов $\|\varepsilon_h^0\|$ и $h\|\varepsilon_h^1\|$ при $h \to 0$. Аналогичным образом слагаемые порядка h^4 ограничены величиной

$$ch^4(\|\varepsilon_h^0\| + \|\varepsilon_h^1\|)(\|\varepsilon^0\| + \|\varepsilon^1\|) \le c'h^3(\|\varepsilon^0\| + \|\varepsilon^1\|)$$

которая стремится к нулю при $h \to 0$. Что касается первой строки в (9.38), интеграл сходится в силу слабой сходимости $\{\upsilon_h\}$ к w, а второе слагаемое $I(h)\upsilon$ стремится к $I(0)\upsilon$ при $h \to 0$. Поэтому все уравнение сходится к выражению

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(w) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon) d\Gamma - I(0)\upsilon = 0 \tag{9.39}$$

Теперь в уравнении (9.38) воспользуемся тождеством $I(h) = I(0) + h^2 J(h)$, возьмем пробные функции вида $\pi\upsilon$ и разделим полученное выражение на h^2. Элемент $\pi\upsilon$ принадлежит E^{01}, а поскольку $\varepsilon^0(\pi\upsilon) = 0$ и $I(0) = 0$ на $\ker\varepsilon^0$, получаем

$$\frac{1}{3}\left\{\int_\omega \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon) + C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon) d\Gamma - 3J(h)\pi\upsilon\right\}+$$

$$+h^2\left\{\int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon) d\Gamma +\right.$$

$$\left.+\int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon) d\Gamma\right\} = 0$$

По определению π:

$$\frac{1}{3}\left\{\int\limits_{\omega}\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)+C^{-1}\varepsilon^1(\pi\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma-3J(h)\pi\upsilon\right\}+$$

$$+h^2\left\{\int\limits_{\omega}\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_1(h)}{h^2}-\frac{\kappa_1}{3}\right]C^{-1}\varepsilon^0(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma+\right. \tag{9.40}$$

$$\left.+\int\limits_{\omega}\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{\alpha}_2(h)}{h^2}-\frac{1}{3}\right]C^{-1}\varepsilon^1(\upsilon_h)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma\right\}=0$$

При $\upsilon\in H^1(\omega)^N\times H^1(\omega)^N\times L^2(\omega)^N$ выражение $J(h)\upsilon$ стремится к $J(0)\upsilon$ при $h\to 0$, и в силу слабой сходимости интеграл стремится к выражению

$$\frac{1}{3}\left\{\int\limits_{\omega}\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(w)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)+C^{-1}\varepsilon^1(\pi w)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma-3J(0)\pi\upsilon\right\}$$

Слагаемые порядка h^2 ограничены величиной

$$ch^2(\|\varepsilon^0(\upsilon_h)\|+\|\varepsilon^1(\upsilon_h)\|)\|\varepsilon^1(\pi\upsilon)\|\le c'h\|\varepsilon^1(\pi\upsilon)\|$$

в силу ограниченности $\|\varepsilon^0(\upsilon_h)\|$ и $h\|\varepsilon^1(\upsilon_h)\|$ при $h\to 0$. Следовательно, w есть решение уравнения

$$\int\limits_{\omega}\kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(w)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)+C^{-1}\varepsilon^1(\pi w)\cdot\cdot\,\varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma-3J(0)\pi\upsilon=0 \tag{9.41}$$

Но система уравнений (9.41), (9.39) совпадает с системой (9.7), а значит, в силу единственности решения имеем $w=\hat{\upsilon}$.

2. *Сильная сходимость*. Сначала оценим член

$$\delta_h\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\omega}C^{-1}(\varepsilon_h^0-\hat{\varepsilon}^0)\cdot\cdot\,(\varepsilon_h^0-\hat{\varepsilon}^0)d\Gamma$$

С помощью первого уравнения системы (9.7) находим

$$\delta_h=\int\limits_{\omega}C^{-1}\varepsilon_h^0\cdot\cdot\,\varepsilon_h^0+C^{-1}\hat{\varepsilon}^0\cdot\cdot\,(\hat{\varepsilon}^0-2\varepsilon_h^0)d\Gamma=$$

$$=\int\limits_{\omega}C^{-1}\varepsilon_h^0\cdot\cdot\,\varepsilon_h^0-I(0)\upsilon_h+I(0)(\hat{\upsilon}-\upsilon_h)d\Gamma$$

Полагая $I(h)=I(0)+h^2J(0)+h^4K(h)$ и $\upsilon=\upsilon_h$ в (9.38), получаем выражение для первого слагаемого с обратным знаком:

$$-\left\{\int\limits_{\omega}C^{-1}\varepsilon_h^0\cdot\cdot\,\varepsilon_h^0-I(0)\upsilon_h\right\}=$$

$$= \frac{h^2}{3}\left\{\int_\omega \kappa_2 C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + \kappa_1(C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0) + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma - 3J(0)v_h\right\} +$$

$$+ h^4\left\{\int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_0(h)-1}{h^2} - \frac{\kappa_2}{3}\right] C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0 + \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right](C^{-1}\varepsilon_h^0 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 + C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^0) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon_h^1 \cdot\cdot\, \varepsilon_h^1 d\Gamma - K(h)v_h\right\}$$

Как и при доказательстве п. 1, слагаемые порядка h^2 и h^4 ограничены соответственно величинами ch и ch^3 при $h \to 0$. Но здесь необходимо использовать дополнительные условия (8.43)–(8.45) для модели $P(2, 1)$ и условия (8.35)–(8.37), вытекающие из допущения 8.1, для моделей $P(2_n, 1)$ и $P(1, 1)$. При этом член $I(0)(\hat{v} - v_h)$ стремится к нулю в силу слабой сходимости в E_π^{01} и условия (8.35)/(8.43). Поэтому $\delta_h \to 0$ при $h \to 0$. Оценим теперь второе слагаемое

$$\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v})) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))d\Gamma$$

Возьмем в качестве пробной функции $v = \pi(v_h - \hat{v})$ (которая принадлежит E^{01}) и вычтем второе уравнение системы (9.7), деленное на 3, из (9.40). В результате получим

$$\frac{1}{3}\int_\omega \kappa_1 C^{-1}\varepsilon^0(v_h - \hat{v}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v})) + C^{-1}\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v})) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))d\Gamma +$$

$$+ h^2\left\{\int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_1(h)}{h^2} - \frac{\kappa_1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon^0(v_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))d\Gamma +\right.$$

$$\left. + \int_\omega \frac{1}{h^2}\left[\frac{\overline{\alpha}_2(h)}{h^2} - \frac{1}{3}\right] C^{-1}\varepsilon^1(v_h) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))d\Gamma - K(h)\pi(v_h - \hat{v})\right\} = 0$$

Слагаемые порядка h^2 ограничены величиной ch, поскольку $\|\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))\|$, $\|\varepsilon^0(v_h)\|$ и $h\|\varepsilon^1(v_h)\|$, а также коэффициенты, ограничены. В итоге член с κ_1 стремится к нулю, т.к. $\|\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))\|$ ограничено, а тот факт, что $\|\varepsilon^0(v_h - \hat{v})\|$ стремится к нулю был установлен в первой части доказательства сильной сходимости. Следовательно, остальные слагаемые также стремятся к нулю.

9.7. Асимптотическая оболочка в случае граничных условий первого рода. Как и в случае оболочек, не имеющих границы, и оболочек с граничными условиями второго рода, обозначим через π проекцию на подпространство $\ker\varepsilon^0 = \{v \in E_{\gamma_0}^{01} : \varepsilon^0(v^0, v^1) = 0\}$, а через $E_{\gamma_0,\pi}^{01}$ пополнение пространства $E_{\gamma_0}^{01}$ по норме, связанной со скалярным произведением

$$\int_\omega \varepsilon^0(v) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(w) + \varepsilon^1(\pi v) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi w)d\Gamma$$

Будем использовать те же самые определения и допущения в отношении $I(h)$, $J(h)$ и $K(h)$. Тогда асимптотическая модель $P(1, 0)$ задается следующим образом: найти пару векторов $(\hat{\upsilon}^0, \hat{\upsilon}^1) \in E^{01}_{\gamma_0, \pi}/\ker\varepsilon^0$, таких что

$$\forall(\upsilon^0, \upsilon^1) \in E^{01}_{\gamma_0}, \quad \int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon \tag{9.42}$$

при условии: существует такая постоянная $c > 0$, что при всех (υ^0, υ^1) в $H^1_{\gamma_0}(\omega)^N \times$ $\times L^2(\omega)^N$ справедливо неравенство

$$|I(0)\upsilon| = \left|\int_\omega f^0 \cdot \upsilon^0 + g^0 \cdot \upsilon^1 d\Gamma\right| \le c\|\varepsilon^0(\upsilon^0, \upsilon^1)\|_{L^2(\omega)} \tag{9.43}$$

Второе асимптотическое уравнение задается так: найти вектор $\hat{\upsilon} \in E^{01}_{\gamma_0, \pi}$, удовлетворяющий уравнению (9.42), и такой что

$$\begin{aligned} &\int_\omega C^{-1}\hat{\varepsilon}^1\pi \cdot\cdot\, \varepsilon^1 - f^2 \cdot \upsilon^0 - (f^1 + g^2) \cdot \upsilon^1 - (f^0 + 2g^1) \cdot \upsilon^2 + \\ &+ \kappa_1(C^{-1}\hat{\varepsilon}^0 \cdot\cdot\, \varepsilon^1 - f^1 \cdot \upsilon^0 - (f^0 + g^1) \cdot \upsilon^1 - 2g^0 \cdot \upsilon^2) + \\ &+ \kappa_2(-f^0 \cdot \upsilon^0 - g^0 \cdot \upsilon^1)d\Gamma = 0, \quad \forall \upsilon \in \ker\varepsilon^0 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Тогда уравнения (9.42) и (9.44) равносильны с точки зрения поиска вектора $\hat{\upsilon} \in E^{01}_{\gamma_0, \pi}$, такого что

$$\begin{aligned} &\int_\omega C^{-1}\varepsilon^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^0(\upsilon)d\Gamma = I(0)\upsilon, \quad \forall \upsilon \in E^{01}_{\gamma_0, \pi} \\ &\int_\omega C^{-1}\varepsilon^1(\pi\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon) + \kappa_1 C^{-1}\hat{\varepsilon}^0(\hat{\upsilon}) \cdot\cdot\, \varepsilon^1(\pi\upsilon)d\Gamma = 3J(0)\pi\upsilon, \quad \forall \upsilon \in E^{01}_{\gamma_0, \pi} \end{aligned} \tag{9.45}$$

В случае граничных условий первого рода для асимптотической оболочки результаты по существованию решений и декомпозиции операторов остаются такими же.

Теорема 9.3 (об асимптотической оболочке). Пусть справедливо допущение 4.1 относительно C, ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ – границе некоторого множества из класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^N$, а γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Пусть также $I(0) : E^{01}_{\gamma_0, \pi}/\ker\varepsilon^0 \to \mathbb{R}$ и $J(0) : E^{01}_{\gamma_0} \to \mathbb{R}$ – произвольные линейные функционалы, удовлетворяющие условиям: при всех $\upsilon \in E^{01}_{\gamma_0}$:

$$|I(0)\upsilon| \le c\|\varepsilon^0(\upsilon)\|_{L^2(\omega)} \tag{9.46}$$

$$|J(0)\pi\upsilon| \le c\|\varepsilon^1(\pi\upsilon)\|_{L^2(\omega)} \tag{9.47}$$

Тогда система уравнений (9.45) имеет единственное решение $\hat{\upsilon}$ в $E^{01}_{\gamma_0, \pi}$.

Для f^0, f^1, f^2, g^0, g^1 и g^2 из $L^2(\omega)^N$ условия (9.46) и (9.47) удовлетворяются в силу допущения 8.2 для моделей $P(2_n, 1)$, $P(1, 1)$ и в силу условия (8.61) из допущения 8.2 для модели $P(2, 1)$.

Также имеет место сходимость.

Теорема 9.4. Пусть справедливы допущения 4.1 и 4.2, ω – ограниченная открытая связная липшицева область в Γ, а γ_0 – $(N-2)$-измеримое по Хаусдорфу подмножество множества γ, такое что $H_{N-2}(\gamma_0) > 0$. Пусть также $v_h \in E^{01}_{\gamma_0}$ и $\hat{v} \in E^{01}_{\gamma_0, \pi}$ – решения соответственно уравнения (4.47) и системы (9.45).

1. Если справедливо допущение 8.2, то при $h \to 0$ имеем слабую сходимость

$$v_h \rightharpoonup \hat{v} \text{ в } E^{01}_{\gamma_0, \pi} \tag{9.48}$$

и ограниченность величины $h\|\varepsilon^1(v_h)\|$.

2. Пусть для моделей $P(2_n, 1)$, $P(1, 1)$ справедливо допущение 8.2, а для модели $P(2, 1)$ выполняются условия (9.43), (8.59) и (8.60) из допущения 8.3. Тогда при $h \to 0$ имеем

$$\int_\omega \left\|\varepsilon^0(v_h - \hat{v})\right\|^2 + \left\|\varepsilon^1(\pi(v_h - \hat{v}))\right\|^2 + h^2\left\|\varepsilon^1(v_h)\right\|^2 d\Gamma \to 0 \tag{9.49}$$

где $\pi(v)$ обозначает проекцию v на подпространство $\ker\varepsilon^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in E^{01}_{\gamma_0, \pi} : \varepsilon^0(v^0, v^1) = 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Acerbi E., Buttazzo G., Percivale D.* A variational definition for the strain energy for an elastic string // J. Elasticity. 1991. V. 25. № 2. P. 137–148.
2. *Alessandrini S.M.* Some two-dimensional plate models: derivation, asymptotic properties, and numerical approximation. Ph.D. Thesis. New Brunswick, New Jersey: Rutgers University, 1991.
3. *Alessandrini S.M., Arnold D.N., Falk R.S., Madureira A.L.* Derivation and justification of plate models by variational methods // Plates and Shells / Ed. M. Fortin. CRM Proc. lect. Notes ser. V. 21. Providence: AMS Publ., 1999. P. 1–20.
4. *Bernadou M.* Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Paris, Milan, Barcelone: Masson, 1994. 361 p.
5. *Bernadou M., Ciarlet Ph.G., Miara B.* Existence theorems for two-dimensional linear shell theories // J. Elasticity. 1994. V. 34. № 2. P. 111–138.
6. *Blouza A.* Existence et unicité pour le modèle de Naghdi pour une coque peu régulière // C. r. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1997. V. 324. № 7. P. 839–844.
7. *Blouza A., Le Dret H.* Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity // Quart. Appl. Meth. 1999. V. 57. № 2. P. 317–337.
8. *Bourquin F., Ciarlet Ph.G., Geymonat G., Raoult A.* Γ-convergence et analyse asymptotique des plaques minces // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1992. V. 315. № 9. P. 1017–1024.
9. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1991. 350 p.
10. *Chapelle D., Bathe K.-J.* Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures // Computers and Structures. 1998. V. 66. № 1. P. 19–36.
11. *Chen C.* Asymptotic convergence rates for the Kirchhoff plate model. Ph.D. Thesis. Pennsylvania: University Park, 1995. 83 p.
12. *Chenais D., Paumier J.-C.* On the locking phenomenon for a class of elliptic problems // Numer. Math. 1994. V. 67. P. 427–440.
13. *Ciarlet Ph.G.* Plates and junctions in elastic multi-structures: an asymptotic analysis. Paris, Milano, Barcelona, Mexico: Masson; Berlin, New York: Springer, 1990. 215 p.

14. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Ellipticité des équations membranaires d'une coque uniformément elliptique // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1994. V. 318. № 2. P. 195–200.
15. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Analyse asymptotique des coques linéairement élastique. I. Coques membranaires // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1994. V. 318. № 9. P. 863–868.
16. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Analyse asymptotique des coques linéairement élastique. III. Une justification du modèle de W.T. Koiter // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1994. V. 319. № 3. P. 299–304.
17. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* On the ellipticity of linear membrane shell equations // J. Math. Pures Appl. 1996. V. 75. № 2. P. 107–124.
18. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Asymptotic analysis of linearly elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1996. V. 136. № 2. P. 191–200.
19. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Asymptotic analysis of linearly elastic shells. Generalized membrane shells // J. Elasticity. 1996. V. 43. № 2. P. 147–188.
20. *Ciarlet Ph.G., Lods V.* Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1996. V. 136. № 2. P. 119–161.
21. *Ciarlet Ph.G., Lods V., Miara B.* Analyse asymptotique des coques linéairement élastique. II. Coques "en flexion" // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1994. V. 319. № 1. P. 95–100.
22. *Ciarlet Ph.G., Lods V., Miara B.* Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of flexural shell equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1996. V. 136. № 2. P. 163–190.
23. *Ciarlet Ph.G., Sanchez-Palencia É.* Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations des coques membranaires // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1993. V. 317. № 8. P. 801–805.
24. *Ciarlet Ph.G., Sanchez-Palencia É.* An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations // J. Math. Pures Appl. 1996. V. 75. № 1. P. 51–67.
25. *Dauge M.* Complete asymptotics in thin elastic plates and optimal estimates for Kirchhoff-Love model. Prépublication 95-06. Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes, 1995.
26. *Dauge M., Gruais I.* Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée // C. r. Acad. Sc. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. № 3. P. 375–380.
27. *Delfour M.C.* Intrinsic P(2, 1) thin shell model and Naghdi's models without a priori assumption on the stress tensor // Proc. Intern. Conf. Optimal Control of Partial Differential Equations / Eds. K.H. Hoffmann, G. Leugering, F. Tröltzsch. Int. Ser. of Numerical Mathematics, V. 133, Basel: Burkhäuser, 1999. P. 99–113.
28. *Delfour M.C.* Membrane shell equation: characterization of the space of solutions // Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems / Eds. Shuping Chen, Xunjing Li, Jiongman Yong, Xun Yu Zhou. New York: Chapman and Hall. 1999. P. 21–29.
29. *Delfour M.C.* Characterization of the space of the membrane shell equation for arbitrary $C^{1,1}$ midsurfaces // Control and Cybernetics. 1999. V. 28. № 3. P. 481–501.
30. *Delfour M.C.* Tangential differential calculus and functional analysis on a $C^{1,1}$ submanifold // Differential-Geometric Methods in the Control of Partial Differential Equations / Eds. R. Gulliver, W. Littman and R. Triggiani. Contemporary Mathematics, AMS Publ. 1999. 34 p.
31. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Shape analysis via oriented distance functions // J. Funct. Anal. 1994. V. 123. P. 129–201.
32. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* On a variational equation for thin shells // Control and Optimal Design of Distributed Parameter Systems / Eds. J. Lagnese, D.L. Russell, and L. White. Berlin, Heidelbelrg, New York, Tokyo: Springer, 1994. P. 25–37.
33. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* A boundary differential equation for thin shells // J. Different. Equat. 1995. V. 119. № 2. P. 426–449.
34. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Tangential differential equations for dynamical thin/shallow shells // J. Different. Equat. 1996. V. 128. P. 125–167.
35. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Differential equations for linear shells: comparison between intrinsic and classical models // Advances in Mathematical Sciences–CRM's 25 years / Ed. Luc Vinet. CRM Proc. Lecture Notes. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. P. 42–124.

36. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Shape analysis via distance functions: local theory // Boundaries, Interfaces and Transitions / Ed. M. Delfour // CRM Proc. Lect. Notes Ser. Providence: AMS Publ., 1998. P. 91–123.
37. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* On the design and control of systems governed by differential equations on submanifolds // Control Cybernet. 1996. V. 25. P. 497–514.
38. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Hidden boundary smoothness for some classes of differential equations on submanifolds // Optimization Methods in Partial Differential Equations / Eds. S. Cox and I. Lasiecka. Contemp. Math., V. 209. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. P. 59–73.
39. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Intrinsic differential geometry and theory of thin shells // Lecture Notes. Pisa: Scuola Normale Superiore, 1996.
40. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Convergence to the asymptotic model for linear thin shells // Optimization Methods in Partial Differential Equations / Eds. S. Cox and I. Lasiecka. Contemp. Math. V. 209. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. P. 75–93.
41. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Convergence of the linear P(1, 1) и P(2, 1) thin shells to asymptotic shells // Plates and Shells / Ed. M. Fortin. CRM Proc. Lect. Notes. Ser. V. 21. Providence: AMS Publ., 1999. P. 125–158.
42. *Destuynder Ph.* Sur la justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. Doct. diss. Université Pierre et Marie Curie, 1980.
43. *Destuynder Ph.* Modélisation des coques minces élastiques. Paris, Milan, Barcelone:Masson, 1990. 283 p.
44. *Destuynder Ph.* Une théorie asymptotique des plaques minces en elasticité linéaire. Paris, Milan, Barcelone: Masson, 1986. 174 p.
45. *Federer H.* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93. № 3. P. 418–491.
46. *Fox D.D., Raoult A., Simo J.C.* A justification of nonlinear properly invariant plate theories // Arch. Ration. Mech. Anal. 1993. V. 124. № 2. P. 157–199.
47. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin, Heidelber, New York, Tokyo: Springer, 1983. 513 p.
48. *Le Dret H., Raoult A.* The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 74. № 6. P. 549–578.
49. *Le Dret H., Raoult A.* The membrane shell model in nonlinear elasticity: a variational asymptotic derivaiton // J. Nonlinear Sci. 1996. V. 6. P. 59–84.
50. *Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M.* A high-order theory of plate deformations Pt. 2. Laminated plates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 46. № 4. P. 663–676.
51. *Mardare C.* Modèles bi-dimensionnels de coques linéairement élastiques : estimations de l'écart entre leurs solutions // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322. № 8. P. 793–796.
52. *Mardare C.* Estimation d'erreur dans l'analyse asymptotique des coques linéairement élastiques // C. r. Acad. Sc. Paris Sér. I Math. 1996. V. 332. № 9. P. 895–898.
53. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie // Arch. Ration. Mech. Anal. 1959. V. 4. № 2. P. 145–152.
54. *Naghdi P.M.* Foundations of elastic shell theory // Progress in Solid Mechanics. V. 4. Amsterdam: North-Holland, 1963. P. 1–90.
55. *Naghdi P.M.* The theory of shells and plates // Handbuch des Physik. Bd. VI a-2. Berlin: Springer, 1972. P. 425–640.
56. *Paumier J.-C., Raoult A.* Asymptotic consistency of the polynomial approximation in the linearized plate theory. Application to the Reissner-Mindlin model // Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal. Lyon, 1995. ESAIM Proc., 2. Paris: Soc. Math. Appl. Indust., 1997. P. 203–213.
57. *Piila J.* Characterization of the membrane theory of a clamped shell. The hyperbolic case // Math. Models and Methods Appl. Sci. 1996. V. 6. P. 169–194.
58. *Pitkaranta J.* The problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells // Numer. Math. 1992. V. 61. P. 523–542.
59. *Sanchez-Palencia É.* Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1989. V. 309. № 6. P. 411–417.

60. *Sanchez-Palencia É.* Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée – Approximation membranaire // C. r. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1989. V. 309. № 7. P. 531–537.
61. *Sanchez-Palencia É.* Surfaces et coques élastiques minces: problèmes et défis //La Vie des Sciences. 1995. V. 12. № 3. P. 239–258.
62. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Coques élastiques minces, propriétés asymptotiques. Paris: Masson, 1997. 376 p.
63. *Valid R.* The nonlinear theory of shells through variatonal principles. Chichester: Wiley, 1995. 477 p.

Канада

Поступила
15.01.2005