

УДК 534.01,621.01

© 2006 г. Д.Я. БАНАХ, А.Н. НИКИФОРОВ

ВОЗДЕЙСТВИЕ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ НА БЫСТРОВРАЩАЮЩИЕСЯ РОТОРНЫЕ СИСТЕМЫ

Исследуются особенности динамики быстро вращающихся роторных систем с плавающими уплотнительными кольцами от действующих в зазорах аэрогидродинамических сил. Выявлены такие свойства системы “ротор – плавающее кольцо”, как возможность отсутствия критической скорости ротора, а также динамическое гашение колебаний роторной системы в зависимости от условий контакта кольца с корпусом, при этом рассматривается возможность вскипания слоя в зазоре. Выявлен квазиустойчивый режим, вызванный действием сухого трения на кольцо. Для данного режима методом припасовывания получены аналитические законы движений ротора и уплотнительного кольца.

1. Учет аэрогидродинамических сил в уплотнениях. Исследуемая роторная система является моделью турбонасосного агрегата и представляет собой двухопорный ротор, вращающийся внутри плавающего уплотнительного кольца (фиг. 1). В зазоре между ротором и кольцом возникают аэрогидродинамические силы, которые включают упругую, демпфирующую, а также неконсервативные составляющие. Кольцо имеет свободу радиальных перемещений и под действием этих сил отслеживает движение ротора. Самоцентрирование кольца относительно ротора способствует улучшению герметичности. Уравнения движения этой системы в комплексной форме следующие (предполагается, что крутящий момент на роторе достаточно большой):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (D + h_2) \dot{z}_1 + (k + h_1 - ih^*) z_1 - (h_1 - ih^*) z_2 &= m_1 a \omega^2 e^{i\omega t} \\ m_2 \ddot{z}_2 + h_2 \dot{z}_2 + (h_1 - ih^*) z_2 - (h_1 - ih^*) z_1 + F \operatorname{sign} \dot{z}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь a – эксцентриситет ротора, m_1 – масса ротора, m_2 – масса кольца, $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ – их комплексные перемещения, k – суммарная жесткость ротора и опор, ω – скорость вращения, $D = k\psi/(2\pi\omega)$ – демпфирование в опорах ротора, ψ – коэффициент рассеивания, $F = fSP_1$ – сухое трение на контактной поверхности уплотнительного кольца, которое определяется давлением на кольцо P_1 , площадью кольца S , воспринимающей данное давление, и коэффициентом трения скольжения f .

Гидродинамические силы представлены гидростатической жесткостью h_1 , вязким гидродинамическим сопротивлением h_2 , а также циркуляционной силой, характеризующей неодинаковое гидродинамическое трение в среде, которое учитывается коэффициентом $0.5\omega h_2$. Аэродинамическое возбуждение или так называемая венцовая сила, на турбинных колесах ротора [1] определяется коэффициентом h_3 . Для неконсервативных сил в уравнениях (1.1) введен общий коэффициент $h^* = 0.5\omega h_2 + h_3$.

Гидродинамическое демпфирование h_2 при ламинарном течении постоянно ($h_2 = \text{const}$), при турбулентном – зависит от числа Рейнольдса

$$h_2 = \frac{\pi R l^3 \mu}{12 \delta^3} [12 + 0.256 (K^2 \operatorname{Re})^{0.65}]$$

где δ – зазор, R – радиус кольца, l – длина дросселирующего канала кольца, μ – динамический коэффициент вязкости среды, K – коэффициент, зависящий от энthalпии среды, Re – число Рейнольдса. Обозначая значение коэффициента гидродинамического демпфирования при номинальной скорости вращения через h_2^n , эту зависимость можно представить в виде:

$$h_2 = h_2^n \omega / \omega_n \quad (1.2)$$

где ω_n – номинальная скорость вращения ротора.

Гидростатическая жесткость h_1 зависит от степени турбулентности течения среды в зазоре и от перепада давления на уплотнительном кольце $\Delta p = P_1 - P_2$:

$$h_1 = \frac{\pi R l \Delta p}{2\delta} \varepsilon \left[0.8\varepsilon + \frac{l}{2\delta} C_z Re^{-n} \right]^{-1}$$

где ε – коэффициент местных потерь давления, C_z – постоянная Блазиуса, n – постоянная – при ламинарном течении $n = 1$, при турбулентном – $n = 0.24$.

Коэффициент аэродинамической силы h_3 является функцией крутящего момента M на роторе равен $h_3 = M/(HR)$, где H – высота лопаток.

В [2] рассматривались роторные машины, нагруженные постоянным давлением. Для насосных и компрессорных агрегатов перепад давления Δp пропорционален квадрату частоты вращения ротора, поэтому перепад давления Δp и коэффициенты h_1, h_3 можно представить как

$$\Delta p = \Delta p_n \omega^2 / \omega_n^2, \quad h_1 = h_1^n \omega^2 / \omega_n^2, \quad h_3 = h_3^n \omega^2 / \omega_n^2 \quad (1.3)$$

где Δp_n и h_1^n, h_3^n – перепад давления и коэффициенты гидродинамических сил, соответствующие номинальной частоте вращения ω_n .

Как показывают исследования [3], в случае маловязкой жидкостной среды при большой скорости вращения жидкий слой в зазорах между ротором и кольцом вскипает. При этом плотность и вязкость среды в зазоре резко понижаются, что становится следствием уменьшения значений коэффициентов гидростатической и демпфирующей сил h_1, h_2 . Причина фазового перехода из жидкости в пар состоит в том, что при дросселировании повышается температура среды в зазоре на величину $\Delta T = \Delta p / (\rho c_p)$, где ρ – плотность жидкости, c_p – ее изобарная теплоемкость [4]. Вскипание происходит, когда изменение температуры превышает разность между температурой кипения среды и текущей рабочей температурой $\Delta T > T_b - T$. Так как явление вскипания влияет на гидродинамические коэффициенты, оно должно учитываться при расчетах в случае жидкостных сред.

В зависимости от условий контакта уплотнительного кольца с корпусом разделяют два типа уплотнений: жесткое и плавающее. Кольцо работает как жесткое целевое уплотнение, когда оно неподвижно. Плавающий тип характеризует подвижное кольцо под действием силы сухого трения.

Кольцо будет неподвижным, если гидростатическая сила, действующая в зазоре между ротором и кольцом, меньше силы сухого трения, действующей на контактной поверхности кольца

$$h_{1n} \omega^2 / \omega_n^2 |z_1 - z_2| < f S P_{1n} \omega^2 / \omega_n^2 \quad (1.4)$$

В неравенстве (1.4) жесткость h_{1n} , номинальное давление P_{1n} и площадь кольца S – фиксированные величины (2.4). При заданных параметрах, если $f > 0.4$, условие (1.4) выпол-

няется при любой частоте вращения в рассматриваемом частотном диапазоне вне зависимости от масс ротора и кольца, эксцентриситета ротора a и др.

2. Устойчивость системы “ротор – неподвижное кольцо”. В случае неподвижного уплотнительного кольца $z_2 = 0$, уравнение вынужденных колебаний ротора будет

$$m_1 \ddot{z}_1 + (D + h_2) \dot{z}_1 + (k + h_1 - ih^*) z_1 = m_1 a \omega^2 e^{i\omega t}$$

Для анализа устойчивости рассмотрим собственные колебания. Разыскивая решение в виде $z_1 = Z_1 e^{i\Lambda t}$, получим

$$m_1 \Lambda^2 - i(D + h_2) \Lambda - (k + h_1) + ih^* = 0$$

Воспользуемся критерием Рауса – Гурвица. Для условия устойчивости необходимо, чтобы главные миноры Δ_2 и Δ_4 матрицы

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 & -k + h_1 & 0 \\ 0 & -D + h_2 & h^* & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & -k + h_1 \\ 0 & 0 & -D + h_2 & h^* \end{vmatrix}$$

удовлетворяли неравенствам $-\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Первое неравенство выполняется тождественно, а из второго следует, что область устойчивости определяется отношением неконсервативных сил к демпфирующим

$$\lambda > \frac{h^*}{D + h_2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{k + h_1}{m_1}} \tag{2.1}$$

В роторных системах, работающих на закритических скоростях, демпфирование D в подшипниках мало в сравнении с гидродинамическим демпфированием h_2 . В частности, для рассматриваемого турбонасоса при скорости вращения $\omega_n = 12900 \text{ с}^{-1}$: $D = 31.2 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$, $h_2 = 350 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$. Поэтому в дальнейшем полагаем $D = 0$. Тогда выражение (2.1) запишется в виде

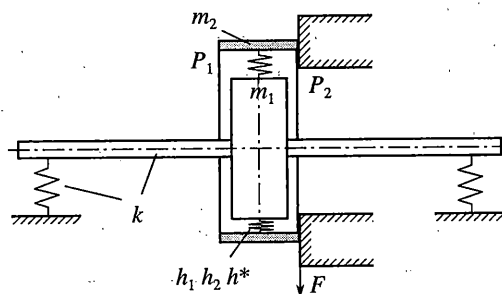
$$\lambda(\omega) > \omega/2 + h_3/h_2 = \lambda_*(\omega) \tag{2.2}$$

Из неравенства (2.2) следует, что скорость потери устойчивости ω_* может быть найдена графически точкой пересечения кривой $\lambda(\omega)$ и луча $\lambda_*(\omega)$. Для валов, вращающихся в подшипниках скольжения, данная точка характеризует возникновение асинхронной прецессии с большой амплитудой [5]. Точка пересечения кривой $\lambda(\omega)$ с лучом λ_0 ($\lambda = \omega$) определяет критическую скорость. Учитывая (1.2), (1.3) и обозначая критическую частоту невращающегося ротора $\omega_0 = \sqrt{k/m_1}$, из (2.2) находим скорость потери устойчивости системы “ротор – неподвижное кольцо”

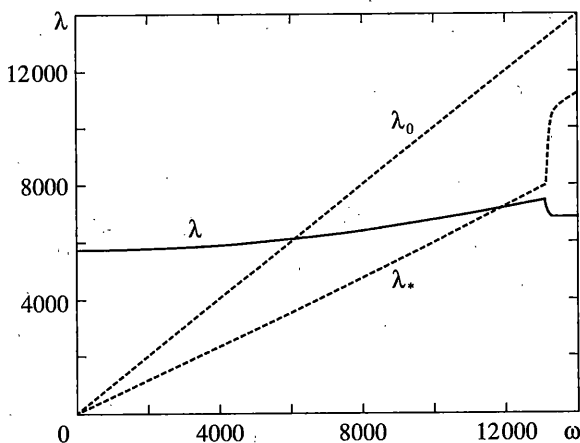
$$\omega_* = \frac{\omega_0}{\sqrt{1/4 + h_3^n/h_2^n \omega_n - h_1^n/m_1 \omega_n^2}} \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует:

при небольших перепадах давлений $\Delta p_n < 1 \text{ МПа}$ ($h_1^n/m_1 \omega_n^2 \approx 0$) и при отсутствии венозной силы ($h_3 = 0$) приходим к известному значению $\omega_* = 2\omega_0$, что аналогично валу, вращающемуся на масляной пленке подшипников [5];



Фиг. 1



Фиг. 2

при большом перепаде давления скорость потери устойчивости увеличивается $\omega_* > 2\omega_0$;

при наличии неконсервативной венцовой силы скорость потери устойчивости уменьшается $\omega_* < 2\omega_0$.

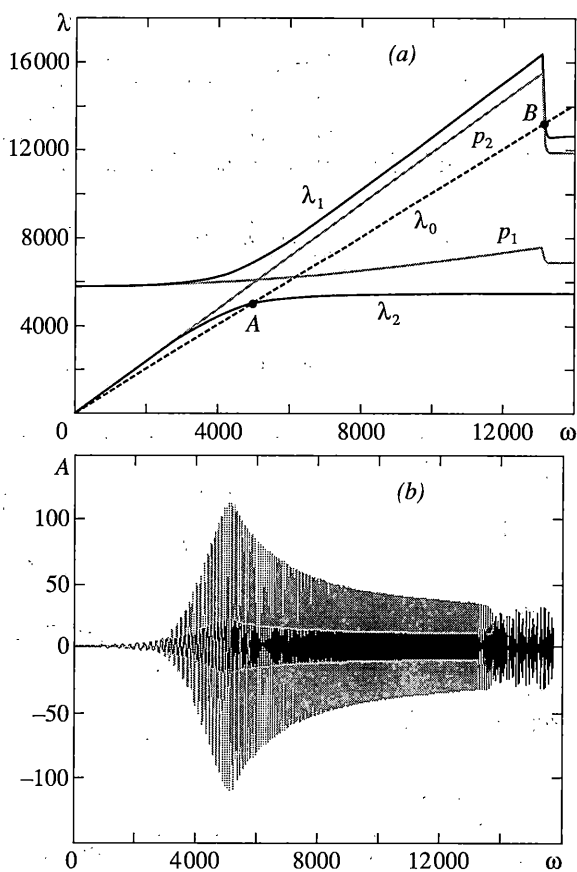
Проследим динамические особенности рассматриваемого класса систем на примере ротора турбонасоса, имеющего параметры:

$$m_1 = 1.52 \text{ кг}, \quad k = 50563 \cdot 10^3 \text{ Н/м}, \quad \omega_n = 12900 \text{ с}^{-1}, \quad \delta = 50 \text{ мкм}$$

$$h_1^n = 35000 \cdot 10^3 \text{ Н/м}, \quad h_2^n = 0.35 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с/м}, \quad h_3^n = 454 \cdot 10^3 \text{ Н/м} \quad (2.4)$$

$$P_{1n} = 13.6 \text{ МПа}, \quad \Delta p_n = 8.2 \text{ МПа}, \quad m_2 = 0.15 \text{ кг}, \quad S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

На диаграмме (фиг. 2) представлена зависимость собственной частоты ротора в неподвижном кольце от скорости вращения – $\lambda(\omega)$. Критическая скорость $\omega_{cr} = 6132 \text{ с}^{-1}$, скорость потери устойчивости $\omega_* = 11822 \text{ с}^{-1}$. При скорости $\omega_b = 13105 \text{ с}^{-1}$ жидкость в зазоре между ротором и уплотнительным кольцом вскипает. В результате уменьшения жесткости и демпфирующей способности слоя резко уменьшается собственная частота ротора $\lambda(\omega)$, а луч $\lambda_*(\omega)$ (2.2) резко возрастает. В данном случае вскипание среды проис-



Фиг. 3

ходит в области неустойчивого движения. Расчет вибраций при плавном изменении скорости вращения также показывает, что при $\omega \approx 6100 \text{ с}^{-1}$ наступает резонансное состояние, максимальная амплитуда составляет $A = 220 \text{ мкм}$; а при $\omega > 11822 \text{ с}^{-1}$ движение ротора становится неустойчивым, возникает асинхронная прецессия с нарастающей амплитудой и частотой равной критической $\omega_{\text{кр}} = 6132 \text{ с}^{-1}$.

3. Динамические особенности системы “ротор – плавающее кольцо”. При плавающем кольце ($f < 0.4$) движение системы “ротор–кольцо” описывается уравнениями (1.1). Рассмотрим ротор, вращающийся внутри плавающего кольца с параметрами, частотная диаграмма этой системы приведена на фиг. 3, а.

Покажем, что ротор и кольцо – слабосвязанные подсистемы. Действительно при $\omega < 4000 \text{ с}^{-1}$ имеем $h_1 \leq 5 \text{ МН/м} \ll h_1 + k \approx 55 \text{ МН/м}$, поэтому коэффициент упругой связи [6] между ротором и кольцом:

$$\gamma_{12} = \frac{h_1}{\sqrt{h_1(h_1 + k_1)}} \approx 0.3$$

Следовательно, частоты связанной системы отличаются от соответствующих парциальных на величину $\gamma_{12}^2 = 0.09$, что и подтверждает фиг. 3, а. В частотном диапазоне

$\omega > 6000 \text{ с}^{-1}$ слабое взаимодействие между ротором и кольцом обеспечивается расстройкой между парциальными частотами ротора и кольца; при увеличении ω парциальные частоты p_1 и p_2 расходятся. Это означает, что мал коэффициент спектральной связи

$$s_{12} = \frac{\gamma_{12} p_1 p_2}{|p_1^2 - p_2^2|}$$

Потому собственные частоты связанной системы близки к ее парциальным и в этом частотном диапазоне ($\lambda_1 \rightarrow p_2$ и $\lambda_2 \rightarrow p_1$). В зоне резонансного взаимодействия (4000–6000 с^{-1}) $p_1 \approx p_2$, s_{12} велико, парциальные и собственные частоты значительно отличаются друг от друга.

Диаграмма (фиг. 3, а) указывает на следующие динамические свойства системы “ротор – плавающее кольцо”:

первая критическая частота системы $\omega_{\text{кр}}^{\text{I}} = 4964 \text{ с}^{-1}$ (точка А – пересечение λ_2 и λ_0) соответствует критической частоте кольца;

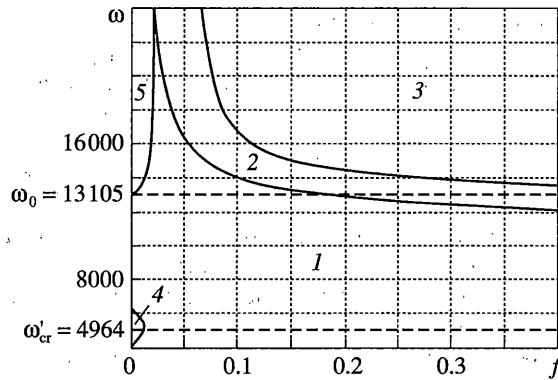
вторая критическая частота системы $\omega_{\text{кр}}^{\text{II}} = 13258 \text{ с}^{-1}$ (точка В) появляется из-за вскипания среды в зазоре и соответствует критической скорости ротора. Пока несущий слой не вскипает, критическая скорость ротора не достигается (λ_1 с λ_0 не пересекается), потому что при высоких скоростях жесткость системы увеличивается за счет гидростатической жесткости слоя $h_1^n \omega^2 / \omega_n^2$, т.е. растет быстрее скорости вращения ω .

Еще одна особенность рассматриваемой системы в том, что при скорости вращения $\omega = 5130 \text{ с}^{-1}$ парциальные частоты ротора p_1 и кольца p_2 равны между собой (фиг. 3, а).

Из-за близости частот $\omega = 5130 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{\text{кр}}^{\text{I}} = 4964 \text{ с}^{-1}$ в окрестности первой критической частоты возникает эффект динамического гашения колебаний ротора (фиг. 3, б, темн.) плавающим кольцом, при интенсивных колебаниях самого кольца (фиг. 3, б, светл.). В результате амплитуда ротора при первом резонансе $A_* = 20 \text{ мкм}$, что на порядок меньше резонансной амплитуды ротора в жестком уплотнительном кольце А. Возрастание амплитуды ротора при частотах вращения $\omega > 13105 \text{ с}^{-1}$ связано со вскипением слоя (см. п. 4, область 5).

Известно, что эффект динамического гашения сохраняется в достаточно узкой области варьирования параметров; при их малом изменении этот эффект пропадает. Рассмотрим влияние нагнетаемого давления P_1 и соответственно гидростатической жесткости. Положим, что перепад давления на номинальной скорости вращения составляет $\Delta p_n^1 = 2\Delta p_n$. Тогда коэффициент гидростатической жесткости будет равен $h_1^1 \approx 2h_1$, что приводит к повышению парциальных частот ротора и кольца, и они совпадают теперь при $\omega = 3628 \text{ с}^{-1}$. В результате отстройки $\omega = 3628 \text{ с}^{-1}$ от критической частоты, соответствующей кольцу $\omega_{\text{кр}}^{\text{I}} = 5372 \text{ с}^{-1}$, динамического гашения не происходит. В окрестности первой критической частоты амплитуда колебаний ротора повышается в 5 раз ($A_*^1 = 100 \text{ мкм}$).

При малом перепаде давления $\Delta p_n^1 = 1/2\Delta p_n$ или в случае уплотнений с лабиринтными каналами коэффициент гидростатической жесткости $h_1^1 \approx 1/2h_1$, p_1 и p_2 уменьшаются и совпадают только при $\omega = 7923 \text{ с}^{-1}$. Собственные частоты системы “ротор – плавающее кольцо” возрастают менее интенсивно, так что $\lambda_1(\omega)$ пересекает луч λ_0 , а $\lambda_2(\omega)$ прохо-



Фиг. 4

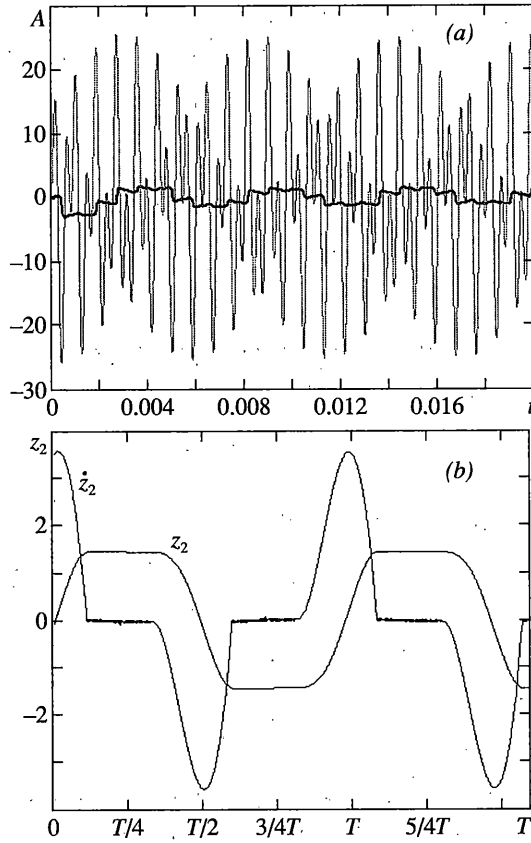
дит ниже λ_0 . Здесь, в отличие от рассмотренных выше случаев, первая критическая частота системы – $\omega_{cr}^I = 6571 \text{ с}^{-1}$ соответствует критической скорости ротора. Так как скорость совпадения парциальных частот $\omega = 7923 \text{ с}^{-1}$ далека от критической $\omega_{cr}^I = 6571 \text{ с}^{-1}$, явления гашения колебаний ротора кольцом не возникает. Резонансная амплитуда ротора составляет $A_*'' = 270 \text{ мкм}$, т.е. имеет наибольшую величину: $A_*'' > A > A_*' > A_*$.

4. Устойчивость системы “ротор – плавающее кольцо”. Плавающее кольцо должно отслеживать колебания ротора и самоцентрироваться вокруг него. Сухое трение на контактной поверхности препятствует перемещению кольца и определяет нелинейный характер его колебаний.

Численные расчеты на основе уравнений (1.1) показывают, что колебания ротора внутри плавающего кольца могут иметь 3 режима: 1 – устойчивый режим (чисто вынужденные колебания ротора); 2 – квазиустойчивый режим (колебания вблизи неустойчивости – суперпозиция собственных и вынужденных колебаний ротора); 3, 4, 5 – неустойчивые режимы (колебания ротора с нарастающей амплитудой). Области этих режимов зависят от подвижности плавающего кольца. На фиг. 4 показаны области устойчивых и неустойчивых режимов при различных коэффициентах трения скольжения на контактной поверхности кольца.

Из фиг. 4 следует, что устойчивое движение ротора в плавающем уплотнении сохраняется при скоростях, превышающих $2\omega_{cr}$. При больших коэффициентах трения скольжения область 1 устойчивых колебаний ротора сужается и скорость потери устойчивости приближается к удвоенной критической.

В области 2 колебания ротора и кольца происходят с постоянной и небольшой (равной амплитуде устойчивого режима) амплитудой (фиг. 5, а). Спектральный анализ колебаний ротора показывает: ротор, вращающийся с частотой ω , прецессирует с частотой $p_1 = \sqrt{(k + h_1)/m_1}$. Вычислительными экспериментами установлено: такая квазиустойчивая асинхронная прецессия ротора в плавающем кольце возникает при скоростях $\omega > 2\omega_{cr}$, когда амплитуда кольца становится меньше амплитуды ротора ($z_2 < z_1$). Постепенное уменьшение амплитуды кольца при возрастании угловой скорости ротора вызвано действием силы сухого трения F , пропорциональной ω . Теряя подвижность, кольцо начинает двигаться с “залипанием” (фиг. 5, а).



Фиг. 5

В области 3 (фиг. 4) асинхронная прецессия ротора с частотой p_1 сопровождается нарастанием амплитуды, т.е. становится неустойчивой.

В области 4 наблюдается неустойчивая синхронная прецессия ротора. Ограниченная область неустойчивости 4 вблизи критической частоты $\omega_{cr}^I = 4964 \text{ с}^{-1}$ порождается наличием неконсервативных сил. Действительно, для (1.1) при отсутствии диссипативных и гидродинамических консервативных сил частотное уравнение можно записать в виде

$$\left\| \begin{array}{cc} p_1^2 - \lambda^2 & ih^*/\sqrt{m_1 m_2} \\ ih^*/\sqrt{m_1 m_2} & p_2^2 - \lambda^2 \end{array} \right\| = \lambda^4 - (p_1^2 + p_2^2)\lambda^2 + p_1^2 p_2^2 + \frac{h^{*2}}{m_1 m_2} = 0$$

Откуда при равенстве парциальных частот ротора p_1 и кольца p_2 следует, что скорость потери устойчивости равна $p_1 = p_2 = \omega_*$. При $p_1 \neq p_2$ ширину области неустойчивости характеризует расстройка между парциальными частотами ротора и кольца $q = |p_1 - p_2|$.

Система неустойчива, пока $q < h^*/\sqrt{km_2}$.

Область неустойчивости 5 в системе “ротор – плавающее кольцо” возникает при малом сухом трении ($f < 0.03$). В данном случае действием сухого трения на кольцо можно

пренебречь, и систему уравнений (1.1) можно рассматривать как линейную. Подставляя в эти уравнения решения в виде $z_1 = Z_1 e^{i\Lambda t}$, $z_2 = Z_2 e^{i\Lambda t}$, получим частотное уравнение

$$a_0 \Lambda^4 + ib_1 \Lambda^3 + [a_2 + ib_2] \Lambda^2 + [a_3 + ib_3] \Lambda + a_4 + ib_4 = 0$$

$$a_0 = m_1 m_2, \quad a_2 = -m_1 h_1 - m_2(k + h_1) - h_2(D + h_2), \quad a_3 = h^*(D + h_2) + h_2 h^*,$$

$$a_4 = kh_1$$

$$b_1 = -m_1 h_2 - m_2(D + h_2), \quad b_2 = h^*(m_1 + m_2), \quad b_3 = h_1(D + h_2) + h_2(k + h_1),$$

$$b_4 = -kh^*$$

Согласно критерию Рауса – Гурвица, эта роторная система устойчива, пока главные миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

удовлетворяют неравенствам $-\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $-\Delta_6 > 0$, $\Delta_8 > 0$. Вычисление этих миноров показало, что неравенства $\Delta_4 > 0$ и $\Delta_8 > 0$ не выполняются при скорости вращения $\omega > 13105 \text{ с}^{-1}$, т.е. область неустойчивости 5 порождается вскипанием несущего слоя. Анализ колебаний ротора в области 5 показал, что происходит синхронная прецессия ротора с нарастающей амплитудой. Таким образом, при малом сухом трении на кольце ($f < 0.03$) процесс вскипания ограничивает область устойчивого движения ротора “сверху”.

5. Колебания системы “ротор – плавающее кольцо” вблизи области неустойчивости.

Применяя метод приспособывания решений, можно найти точные аналитические решения квазиустойчивых колебаний ротора и плавающего кольца с периодом $T = 2\pi/\omega$ [7]. Общее решение запишем в виде

$$z_1 = x_1 + iy_1 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t + D_1 \exp i\omega t$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = a_1 C_1 \cos p_1 t + a_1 C_2 \sin p_1 t + a_2 C_3 \cos p_2 t + a_2 C_4 \sin p_2 t + D_2 \exp i\omega t + F''$$

$$D_1 = m_1 a \omega^2 (h_1 - ih^* - m_2 \omega^2) / (k + h_1 - ih^* - m_1 \omega^2)(h_1 - ih^* - m_2 \omega^2) - (h_1 - ih^*)^2$$

$$D_2 = m_1 a \omega^2 (h_1 - ih^*) / (k + h_1 - ih^* - m_1 \omega^2)(h_1 - ih^* - m_2 \omega^2) - (h_1 - ih^*)^2 \quad (4.1)$$

$$p_1 = \sqrt{(k + h_1)/m_1}, \quad p_2 = \sqrt{h_1/m_2}, \quad F'' = -F' \text{sign}(\text{Re } \dot{z}_2) - iF' \text{sign}(\text{Im } \dot{z}_2)$$

$$F' = F / (h_1 - ih^*)$$

где $a_{1,2}$ – коэффициенты форм свободных колебаний.

Так как под действием силы сухого трения колебания кольца становятся нелинейными (фиг. 5, b), запишем условия периодичности и приспособывания $z_1(0) = iA_1$, $z_2(0) = i(A_1 + \delta)$, $z_1(T/4) = A_1$, $z_2(T/4) = A_1 + \delta$, $z_1(T/2) = -iA_1$, $z_2(T/2) = -i(A_1 + \delta)$, $z_1(3T/4) = -A_1$,

$z_2(3T/4) = -(A_1 + \delta) \dots (A_1 - \text{амплитуда ротора, действительная величина})$. На интервале $(0 \dots T/4)$: $F'' = -F' - iF'$, на интервале $(T/4 \dots T/2)$: $F'' = F' - iF'$, на интервале $(T/2 \dots 3T/4)$: $F'' = F' + iF'$, на интервале $(3T/4 \dots T)$: $F'' = -F' + iF'$ и далее.

Из этих условий находятся неизвестные постоянные:

$$A_1 = \frac{(\delta + a_1 D_1 - D_2 - F'') \operatorname{ctg} p_2 T/4 - (\delta + a_2 D_1 - D_2 - F'') \operatorname{ctg} p_1 T/4}{(1 - a_2) \operatorname{ctg} p_1 T/4 - (1 - a_1) \operatorname{ctg} p_2 T/4}$$

$$C_1 = \frac{-A_1(1 - a_2) - \delta - a_2 D_1 + D_2 + F''}{a_2 - a_1}, \quad C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} \frac{p_1 T}{4}$$

$$C_3 = \frac{A_1(1 - a_1) + \delta + a_1 D_1 - D_2 - F''}{a_2 - a_1}, \quad C_4 = -C_3 \operatorname{ctg} \frac{p_2 T}{4}$$

Подставляя значения C_i в (4.1) находим законы движения ротора и кольца

$$z_1(t) = C_1 \frac{\sin p_1(t - T/4)}{\sin p_1 T/4} - C_3 \frac{\sin p_2(t - T/4)}{\sin p_2 T/4} + D_1 \exp i\omega t$$

$$z_2(t) = -a_1 C_1 \frac{\sin p_1(t - T/4)}{\sin p_1 T/4} - a_2 C_3 \frac{\sin p_2(t - T/4)}{\sin p_2 T/4} + F'' + D_2 \exp i\omega t$$

Итак, на основании результатов о динамических свойствах быстровращающегося ротора внутри уплотнительного кольца можно сделать следующие выводы:

для ротора, вращающегося в плавающем кольце, гидродинамические силы способны обеспечить отсутствие его критической скорости;

подходящий выбор парциальных частот ротора и плавающего кольца позволяет за счет интенсивных вибраций кольца успокаивать вибрации ротора;

перед неустойчивым состоянием в системе “ротор – плавающее кольцо” возникает квазиустойчивый режим, который может служить предвестником приближения к неустойчивости в роторной системе;

наиболее устойчивое движение ротора обеспечивается в плавающем кольце, которое не слишком подвижно, но и не слишком “зажато” трением ($0.03 < f < 0.1$).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 05-01-08062-офи_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат – фундамент. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
2. Банах Л.Я., Никифоров А.Н. Динамические характеристики высокоскоростных роторов турбин с жесткими и плавающими уплотнениями // Proc. 9th Intern. Conf. Theory of Machines and Mechanisms. Liberec, 2004. С. 53–58.
3. Savin L.A., Solomin O.V. Dynamics of high-speed multi-supporting rotor systems of cryogenic turbomachines with fluid-film bearings // Proc. 11th World Congr. in Mechanism and Machine Science. Tianjin, 2004.
4. Баишта Т.М. Машиностроительная гидравлика. М.: Машгиз, 1963. 698 с.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. Банах Л.Я. Развитие методов декомпозиции при анализе колебаний механических систем // Научн. семинар под руководством акад. К.В. Фролова. М.: РАН, 1998. 290 с.
7. Закржевский М.В. Колебания существенно нелинейных механических систем. Рига: Зинатне, 1980. 190 с.