

УДК 539.376

© 2006 г. К.И. РОМАНОВ

МНОГОЧАСТОТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Склерономный стержень с нелинейной характеристикой исследовался в [1] с использованием схемы идеального двуглава на основе представления искомого прогиба в виде ряда с ограниченным числом членов. С помощью метода, разработанного в [1], в [2] было определено критическое время, характерное для реономного стержня. Ниже для решения задачи продольного изгиба предложена новая математическая модель, основанная на схеме чистого изгиба [3].

Установлена аналогия в части, касающейся результатов решения трех задач деформирования шарнирно закрепленного стержня: выпучивания при ползучести, устойчивости и поперечных колебаний в пределах упругости. Также при исследовании двухчастотной модели с двумя функциями времени найден интегрирующий множитель, позволяющий связать амплитуды первой и второй гармоник и показать аналитически то, что первая гармоника является доминирующей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим продольный изгиб шарнирно закрепленного стержня (фиг. 1) на основе уравнения состояния $\zeta = k\sigma^n$, где ζ – скорость деформации, σ – напряжение, k и n – постоянные материала при определенной температуре.

Следуя [3], представим основное уравнение задачи выпучивания в виде

$$k = \frac{kP^n}{J_n^n} |y|^{n-1} y, \quad k = -\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

где k – скорость изменения кривизны изогнутой оси стержня, y – прогиб, P – сжимающая сила, постоянная во времени, J_n – обобщенный момент инерции сечения.

Получение приближенного решения возможно на основе задания функции прогиба в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^N A_i(t) \sin \frac{i\pi z}{l} \quad (1.2)$$

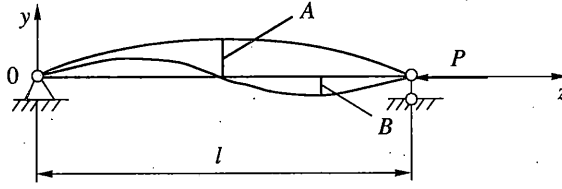
где $A_i(t)$ – функции времени, подлежащие определению, z – осевая координата, l – длина стержня, i – число полуволи, укладываемых по длине изогнутой оси стержня.

Функции $A_i(t)$ принимают в начальный момент времени заданные значения, обусловленные, например, технологическими несовершенствами.

Ставится задача определения критического времени, соответствующего неограниченному нарастанию прогиба $y(z, t)$.

2. Одночастотная модель. В частном случае представление (1.2) имеет вид

$$y = A \sin \frac{i\pi z}{l} \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Определим критическое время на основе энергетического уравнения [3]:

$$P\dot{\lambda} = \frac{k}{J_{n0}^n} \int_0^l M^{n+1} dz \quad (2.2)$$

где $M = Py$ – изгибающий момент в поперечном сечении стержня, $\dot{\lambda}$ – скорость перемещения точки приложения силы.

Вычисления с учетом (2.1) по формулам

$$\dot{\lambda} = A\dot{A} \int_0^l \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\cos \frac{i\pi z}{l}\right)^2 dz, \quad M = PA \sin \frac{i\pi z}{l}$$

приводят уравнение (2.2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (\alpha/i^2)A^n \\ \alpha &= \left(kP^n \int_0^\pi (\sin x)^{n+1} dx \right) / \left(J_n^n \left(\frac{\pi^2}{l^2}\right) \int_0^\pi \cos^2 x dx \right) = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Интегрирование уравнения (2.3) с учетом начального условия $A = A_0$ при $t = 0$ дает возможность установить амплитуду изогнутой оси в текущий момент времени ($n > 1$):

$$\frac{1}{A_0^{n-1}} - \frac{1}{A^{n-1}} = (n-1) \frac{\alpha}{i^2} t$$

Условие $A \rightarrow \infty$ приводит к формуле для критического времени

$$t_* = i^2 t_*^{(1)} \quad (2.4)$$

где $t_*^{(1)}$ – критическое время для шарнирно закрепленного стержня, изогнутого по одной полуволне синусоиды.

Формула (2.4) показывает, что критическое время пропорционально квадрату натурального числа i и одна полуволна является доминантной длиной волны (значение $i = 1$ соответствует наименьшему значению критического времени).

Аналогичные выводы имеют место для шарнирно закрепленного стержня в теории упругой устойчивости [4] относительно критической силы $P_* = i^2 P_*^{(1)}$ и в теории колебаний [5] относительно собственной частоты поперечных колебаний $p_i = i^2 p^{(1)}$. Вместе с тем необходимо учитывать, что формула (2.4) в отличие от последних двух формул является приближенной.

Дальнейшее совершенствование рассмотренного решения с одной функцией времени $A(t)$ связано с использованием многочастотной модели в виде

$$y = A(t) \sum_{i=1}^N a_i \sin \frac{i\pi z}{l} \quad (2.5)$$

где a_i – постоянные коэффициенты, определяемые разложением в ряд исходного несовершенства.

В случае использования (2.5) функция $A(t)$ может быть определена на основе энергетического уравнения (2.2). Однако бóльшая свобода предписываемой деформации изогнутой оси достигается с помощью нескольких функций времени в аппроксимации (1.2).

В связи со сказанным ниже дан пример решения на основе модели с двумя функциями времени.

3. Двухчастотная модель с двумя функциями времени. Зададимся изогнутой осью стержня в виде

$$y = A \sin \frac{\pi z}{l} + B \sin \frac{2\pi z}{l} \quad (3.1)$$

где A и B – функции времени, подлежащие определению, начальные значения которых A_0 и B_0 известны.

Подставляя (3.1) в (1.1) при нечетных n , имеем

$$\frac{\pi^2}{l^2} \left(A \sin \frac{\pi z}{l} + 4B \sin \frac{2\pi z}{l} \right) - \frac{kP^n}{J_n^n} \left(A \sin \frac{\pi z}{l} + B \sin \frac{2\pi z}{l} \right)^n \neq 0 \quad (3.2)$$

В [1, 2] для преодоления трудностей при решении задачи продольного изгиба на основе схемы идеального двутавра при $n > 1$ было предложено разложить в ряд по синусам функцию y^n , а затем, удерживая только те гармоники, которые имеют место в координатной функции (1.2), получить приближенное решение задачи. Вторая гармоника в разложении (1.2) при этом не учитывалась по соображениям симметрии. Заметим, что разработанный в [1, 2] метод аналогичен методу гармонического баланса [5] в теории нелинейных колебаний.

Ниже показано, что существует другая возможность решения поставленной задачи, связанная с использованием метода Бубнова – Галеркина – Канторовича. Применение этого метода обусловлено тем, что определение двух функций времени $A(t)$ и $B(t)$, входящих в (3.1), с помощью энергетического уравнения (2.2) невозможно.

Для получения двух независимых уравнений умножим невязку (3.2) отдельно на $\sin(\pi z/l)$ и $\sin(2\pi z/l)$ и результаты проинтегрируем по длине стержня. Тогда неравенство (3.2) приведем к системе двух дифференциальных уравнений ($n = 3$):

$$\frac{\pi^2}{l^2} A \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi z}{l} \right) dz = \frac{kP^3}{J_n^3} \int_0^l \left(A \sin \frac{\pi z}{l} + B \sin \frac{2\pi z}{l} \right)^3 \sin \frac{\pi z}{l} dz$$

$$\frac{\pi^2}{l^2} 4B \int_0^l \sin^2 \left(\frac{2\pi z}{l} \right) dz = \frac{kP^3}{J_n^3} \int_0^l \left(A \sin \frac{\pi z}{l} + B \sin \frac{2\pi z}{l} \right)^3 \sin \frac{2\pi z}{l} dz$$

Эта система может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A \frac{dA}{dt} &= 2\beta A^2(A^2 + 2B^2) \\ B \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{2}\beta B^2(B^2 + 2A^2) \\ \beta &= 3kP^3 l^2 / (8\pi^2 J_n^3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обозначим $\gamma = A^2$, $\eta = B^2$. Тогда в новых переменных получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dt} = 2\beta\gamma(\gamma + 2\eta), \quad \frac{1}{2} \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}\beta\eta(\eta + 2\gamma)$$

Данная система уравнений после деления первого уравнения на второе сводится к одному уравнению

$$-4(\gamma^2 + 2\gamma\eta) + (\eta^2 + 2\eta\gamma)d\gamma/d\eta = 0 \quad (3.4)$$

Общий интеграл этого уравнения представляется [6] в виде решения системы двух уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -4 \frac{\gamma^2 + 2\gamma\eta}{2\eta\gamma^2 + 7\gamma\eta^2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \frac{\eta^2 + 2\gamma\eta}{2\eta\gamma^2 + 7\gamma\eta^2}$$

$$\Phi(\gamma, \eta) = -\frac{1}{2\eta\gamma^2 + 7\gamma\eta^2} = \text{const}$$

где $\Phi(\gamma, \eta)$ – интегрирующий множитель уравнения (3.4).

Восстановление функции по ее полному дифференциалу [7] приводит к установлению искомой связи между амплитудами первой и второй гармоник:

$$\left(\frac{7\eta + 2\gamma}{7\eta_0 + 2\gamma_0} \right)^6 \frac{\gamma}{\gamma_0} \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^{14} = 1 \quad (3.5)$$

$$\gamma_0 = A_0^2, \quad \eta_0 = B_0^2$$

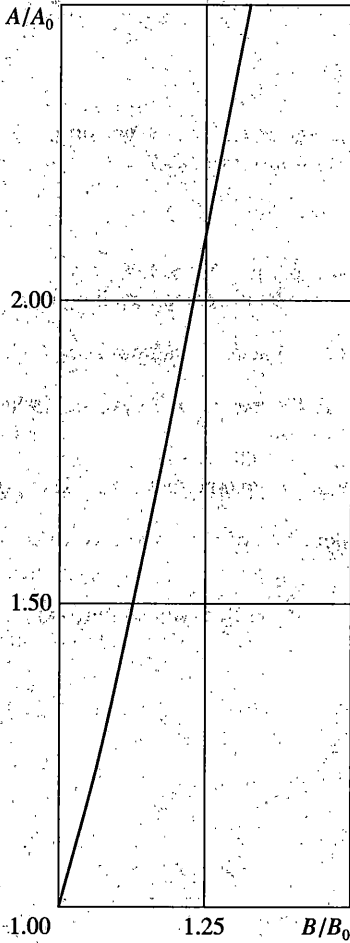
Уравнение (3.5) можно представить в виде, удобном для графического построения интегральной кривой

$$b = \frac{1}{7} \left[\left(7 \frac{\eta_0}{\gamma_0} + 2 \right) \frac{1}{c^{1/6}} - 2c \right]$$

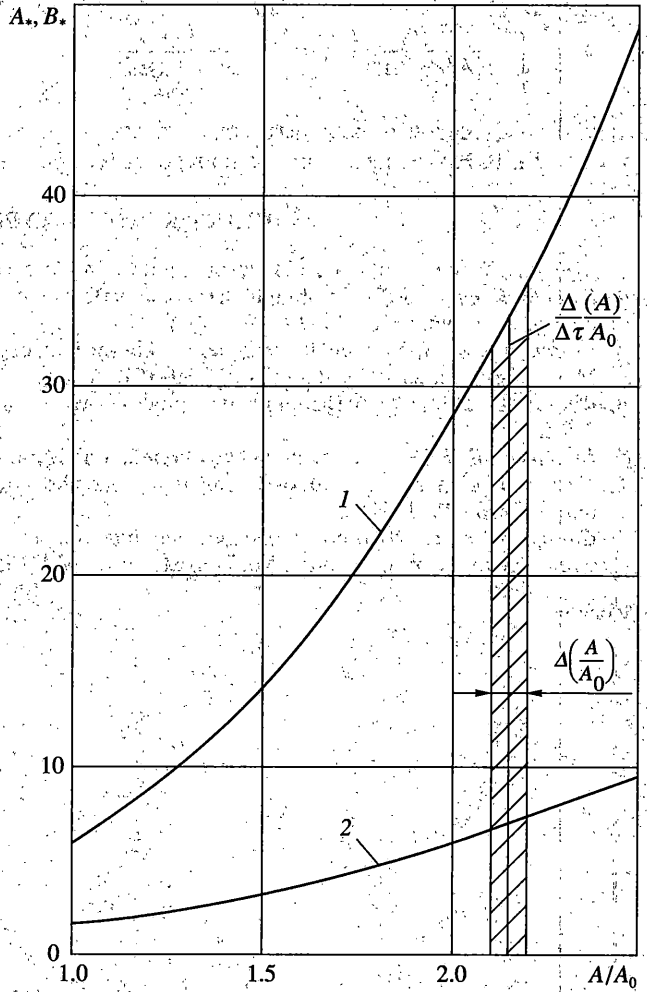
$$c = \frac{\gamma}{\gamma_0} \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^2, \quad b = \frac{\eta_0^2}{\gamma_0 \eta}$$

В частном случае $A_0 = B_0$ имеем соотношения $B/B_0 = b^{-1/2}$, $A/A_0 = (B/B_0)^2 c^{1/2}$.

Соответствующая интегральная кривая показана на фиг. 2. Вид этой кривой показывает, что первая гармоника в разложении (1.2) является доминирующей, поскольку нарастание функции $A(t)$ значительно опережает увеличение функции $B(t)$ в процессе продольного изгиба.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для определения функций $A(t)$ и $B(t)$ представим систему (3.3) в виде ($A_0 = B_0$):

$$\frac{d\left(\frac{A}{A_0}\right)}{d\tau} = 2 \frac{A}{A_0} \left(\frac{A^2}{A_0^2} + 2 \frac{B^2}{B_0^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{d\left(\frac{B}{B_0}\right)}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{B}{B_0} \left(\frac{B^2}{B_0^2} + 2 \frac{A^2}{A_0^2} \right), \quad \tau = \beta A_0^2 t$$

Установленная связь (3.5) позволяет по уравнениям (3.6) построить графики (фиг. 3) зависимостей скоростей функций времени от значений самих функций. Кривая 1 соответствует $A_* = d(A/A_0)/d\tau$, а 2 – $B_* = d(B/B_0)/d\tau$. По формулам

$$\tau = \int_1^{A/A_0} \frac{d(A/A_0)}{d(A/A_0)/d\tau}, \quad \tau = \int_1^{B/B_0} \frac{d(B/B_0)}{d(B/B_0)/d\tau}$$

можно графически определить время τ , соответствующее достигнутому уровню амплитуд A и B . Критическое время соответствует условиям $A \rightarrow \infty$ или $B \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 155 с.
2. Patel S., Kempner J. Effect of higherharmonic deflection components on the creep buckling of columns // Aeronaut. Quart. 1957. V. 8. № 3. P. 215–225.
3. Романов К.И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1993. Вып. 33. С. 139–151.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 589 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 828 с.
7. Сикорский Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложением их к некоторым техническим задачам. М.: Гостехиздат, 1940. 155 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.06.2004