

УДК 539.3

© 2006 г. Е.А. КОРЧЕВСКАЯ, Г.И. МИХАСЕВ

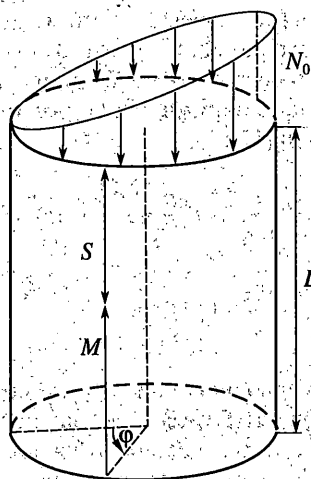
СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОСЕВЫХ СИЛ

Рассматривается задача о свободных колебаниях слоистой композитной цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого сжатия. Особенностью рассматриваемой задачи является предполагаемая локализация форм колебаний оболочки вблизи наиболее слабой образующей с учетом влияния поперечных сдвигов. С использованием асимптотических методов, в явном виде получены формулы для собственных частот и форм колебаний, учитывающие неоднородность нагружения в окружном направлении и наличие поперечных сдвигов.

В качестве примера рассмотрена задача о свободных локализованных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки. Изучено влияние физических свойств слоев на собственные частоты.

1. Введение. Исследования свободных колебаний предварительно напряженных тонких изотропных цилиндрических оболочек проводились в ряде работ [1–5]. В частности, в [1] изучено влияние однородных начальных окружных мембранных усилий, обусловленных внешним или внутренним давлением, на собственные частоты колебаний бесконечной цилиндрической оболочки. Экспериментальные исследования собственных колебаний шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении равномерно распределенными осевыми силами, выполнены в статье [2]. Аналогичный теоретический анализ влияния осевых сил на собственные частоты колебаний изотропных цилиндрических оболочек проведен в [3, 4], при этом в [4] были использованы трехмерные уравнения оболочек с учетом поперечных сдвигов и нормальных напряжений. В приведенных публикациях начальные напряжения, вызванные действием внешних статических сил, предполагались однородными, независимыми от криволинейных координат оболочки. Как следствие, в таких задачах свободные колебания сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки.

Случай нагружения цилиндрической оболочки переменными в окружном направлении осевыми силами был рассмотрен в работах [5, 6]. В частности в [5], с использованием асимптотического метода, развитого в [7], собственные формы вязкоупругих колебаний построены в виде функций, убывающих во времени и локализованных вблизи образующей, испытывающей наибольшую осевую нагрузку. Впоследствии, данный метод был применен для исследования локализованных форм потери устойчивости слоистых композитных цилиндрических оболочек под действием неоднородных осевых сил [8–10]. Установлено [8], что учет поперечных сдвигов слоев, изготовленных из изотропных материалов, может сильно влиять на критическую осевую силу и степень локализации форм потери устойчивости в случае неоднородности нагружения. Теоретические и численные расчеты с использованием метода конечных элементов, выполненные в [10], также показали, что влияние поперечных сдвигов на собственные частоты колебаний слоистой цилиндрической оболочки является более заметным в случае нагружения последней осевыми силами (постоянными в окружном направлении). Свободные колеба-



Фиг. 1

ния слоистой круговой конической оболочки при воздействии постоянной по окружности растягивающей или сжимающей осевой силы были рассмотрены в [11]. Так же как и в [3] установлено, что осевое растяжение повышает собственные частоты, а сжатие понижает.

Целью данной работы является исследование влияния поперечных сдвигов, а также осевых сил на собственные частоты и формы локализованных колебаний слоистой композитной цилиндрической оболочки в случае, когда осевая нагрузка является неоднородной в окружном направлении. В качестве исходных используются уравнения, выведенные в [12] с использованием обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко, которая позволяет описать нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от поперечной координаты.

2. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L , состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k , модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k ($k = 1, 2, \dots, N$). В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k -го слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\phi$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, ϕ и s – окружная и продольная координаты соответственно. Пусть δ_k – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей k -го слоя, u, w – тангенциальные и нормальное (прогиб) перемещения точек исходной поверхности, $u_i^{(k)}$ – тангенциальные перемещения точек k -го слоя.

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные в [12]. В частности, принимается, что тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев по нелинейному закону согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко.

Пусть оболочка подвержена действию неравномерно распределенной по контуру осевой сжимающей силы $N^0(\phi)$ (фиг. 1). Под действием этой силы в оболочке в докритическом безмоментном состоянии возникает мембранное осевое усилие (удельное усилие в принятой исходной поверхности [12]):

$$T_1^0 = -N^0(\phi)/(2\pi R) \quad (2.1)$$

В рамках принятых гипотез в [12] выведена система двенадцати уравнений, описывающих движение слоистой анизотропной оболочки. В случае, когда физические характеристики слоев различаются незначительно и в предположении об образовании большого количества волн малой длины в окружном или осевом направлении данная система сведена к системе трех уравнений [12]:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)}\left(1-\frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - T_1^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2} - \rho h\omega^2 W^* = 0$$

$$\Delta^2 F^* = \frac{Eh\partial^2 W^*}{R\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*$$
(2.2)

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2 ; E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно, F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений; W^* – нормальный прогиб, ω – частота собственных колебаний; η_3, θ, b – параметры, учитывающие поперечные сдвиги, определяемые по формулам [12]:

$$h = \sum_{k=1}^N h_k, \quad \nu = \sum_{k=1}^N \nu_k \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad E = \frac{1-\nu^2}{h} \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \quad \rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \zeta_k$$

$$\theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad b = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{Eh\eta_1}, \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, \quad h\zeta_k = h_k$$

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13}c_{12}, \quad \eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\zeta_k^2 + 3\zeta_{k-1}\zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h\zeta_n = \delta_n$$

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad c_{12} = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k$$

$$q_{44} = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \quad G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}, \quad \lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(\alpha_3) d\alpha_3$$

$$\lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(\alpha_3) f_n(\alpha_3) d\alpha_3, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{1k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(\alpha_3) d\alpha_3$$

$$g(\alpha_3) = \int_0^{\alpha_3} f_0(\alpha_3) d\alpha_3, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{2k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \alpha_3 g(\alpha_3) d\alpha_3, \quad \frac{1}{2} h^2 \pi_{3k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(\alpha_3) d\alpha_3$$

$$f_0(\alpha_3) = \frac{1}{h^2} (\alpha_3 - \delta_0)(\delta_N - \alpha_3), \quad f_k(\alpha_3) = \frac{1}{h^2} (\alpha_3 - \delta_{k-1})(\delta_k - \alpha_3)$$
(2.3)

где α_3 – поперечная координата, отсчитываемая в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности.

Уравнения (2.2) описывают движение оболочки в окрестности безмоментного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося осевыми усилиями T_1^0 . Уравнения (2.2) отличаются от классических уравнений полубезмоментной теории тонких оболочек наличием дополнительных слагаемых, пропорциональных параметрам $1/b$, θ/b , и учитывающих поперечные сдвиги слоев. Отбрасывание последних приводит к уравнениям для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой исходной оболочки. Их влияние на параметр критической нагрузки, а также собственные частоты колебаний зависит как от физических и геометрических параметров слоев, так и от характера нагружения. Например, в задаче о бифуркации слоистой цилиндрической оболочки средней длины, находящейся под действием гидростатического внешнего давления, влияния параметров $1/b$, θ/b на величину критического давления является незначительным, поэтому соответствующие слагаемые в уравнениях устойчивости, аналогичных уравнениям (2.2.), могут быть отброшены. Наоборот, при осевом сжатии слоистой цилиндрической оболочки влияние поперечных сдвигов на величину критического усилия [8], а также на собственные частоты колебаний [9] может быть значительным.

Следуя [8, 9], положим

$$K/\pi^2 = \varepsilon^2 \kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3 \tau, \quad \kappa, \tau \sim 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$K = \pi^2 h^2 / (bR^2), \quad \varepsilon^4 = h^2 \eta_3 / [12R^2(1 - \nu^2)]$$

где ε – малый параметр. При асимптотической оценке параметров K и $K\theta$ в (2.4) была принята во внимание малость параметра θ ; так для однослойной оболочки $\theta = 1/85$ [12].

Перепишем уравнения (2.2) в безразмерном виде

$$\varepsilon^4 (1 - \varepsilon^3 \tau \Delta) \Delta^2 \chi + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 t(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta) \chi - \Lambda (1 - \kappa \varepsilon^2 \Delta) \chi = 0 \quad (2.5)$$

$$\varepsilon^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2}{\partial s^2} (1 - \varepsilon^2 \kappa \Delta) \chi = 0$$

$$T_1^0(\varphi) = -Eh\varepsilon^2 t(\varphi), \quad \Lambda = \frac{\rho R^2}{E} \omega^2, \quad l = L/R, \quad \chi^* = R\chi, \quad F^* = \varepsilon^2 EhR^2 F$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, l \quad (2.6)$$

3. Метод решения. Принимая во внимание неоднородность нагружения по окружной координате, будем исследовать формы собственных колебаний, локализованные в окрестности “наиболее слабой” образующей $\varphi = \varphi_0$. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2} \xi \quad (3.1)$$

Согласно [7], решение задачи (2.5), (2.6) будем искать в виде

$$\chi = \chi_m(\varphi) \sin(p_m s / \varepsilon), \quad F = \Phi_m(\varphi) \sin(p_m s / \varepsilon), \quad p_m = m\pi\varepsilon / l \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$\chi_m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \chi_{mj}(\xi) \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}$$

$$\Phi_m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \Phi_{mj}(\xi) \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\} \quad (3.3)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots, \quad \text{Im} a > 0$$

Последнее неравенство гарантирует убывание амплитуды волн вдали от линии $\Phi = \Phi_0$.

Разложим функцию $t(\Phi)$ в ряд в окрестности этой образующей

$$t(\Phi) = t(\Phi_0) + \varepsilon^{1/2} t'(\Phi_0) \xi + \frac{1}{2} \varepsilon t''(\Phi_0) \xi^2 + \dots \quad (3.4)$$

Подставляя (3.1)–(3.4) в (2.5), (2.6), получим последовательность алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^j A_k X_{j-k} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

относительно вектора-функции $X_j = (\chi_{mj}, \Phi_{mj})^T$, где элементы матрицы A_0 задаются соотношениями

$$\begin{aligned} A_0^{(11)} &= (p_m^2 + q^2)^2 - t(\Phi_0)(p_m^2 + \kappa p_m^4 + \kappa p_m^2 q^2) - \Lambda_0(1 + \kappa(p_m^2 + q^2)) \\ A_0^{(12)} &= -p_m^2, \quad A_0^{(21)} = p_m^2(1 + \kappa(p_m^2 + q^2)) \\ A_0^{(22)} &= (p_m^2 + q^2)^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

а элементы матрицы A_j при $j \geq 1$ выражаются через производные по q и Φ_0 j -го порядка элементов матрицы A_0 [7].

Рассмотрим уравнения (3.5) последовательно. При $j = 0$ имеем однородную систему уравнений $A_0 X_0 = 0$. Из условия существования нетривиального решения этой системы находим

$$\Lambda_0(q, \Phi_0, p_m) = \frac{(p_m^2 + q^2)^2}{(1 + \kappa(p_m^2 + q^2))} + \frac{p_m^4}{(p_m^2 + q^2)^2} - t(\Phi_0) p_m^2 \quad (3.7)$$

Фиксируя число m (а значит и параметр p_m), найдем

$$\Lambda_0^0 = \min_{q, \Phi_0} \Lambda_0(q, \Phi_0, p_m) = \Lambda_0(q^0, \Phi_0^0, p_m) \quad (3.8)$$

Возможны три случая:

(А) $p_m > z_0$, (В) $p_m < z_0$, (С) $p_m \approx z_0$, где z_0 – положительный корень уравнения

$$-2(1 + \kappa p_m z)^2 + z^4(2 + \kappa p_m z) = 0 \quad (3.9)$$

В частности при $\kappa = 0$ (поперечные сдвиги отсутствуют) $z_0 = 1$.

Сначала рассмотрим первые два случая.

При $p_m > z_0$ имеем

$$\Lambda_0^0 = 1 - t(\Phi_0) p_m^2 + \frac{p_m^4}{1 + \kappa p_m^2}, \quad q^0 = 0 \quad (3.10)$$

При $p_m < z_0$ получаем

$$\Lambda_0^0 = \frac{z_0^2 p_m^2}{1 + \kappa p_m z_0} + \frac{p_m^2}{z_0^2} - t(\Phi_0) p_m^2, \quad q^0 = \sqrt{p_m(z_0 - p_m)} \quad (3.11)$$

Образующая $\varphi = \Phi_0$ находится из условия

$$t'(\Phi_0) = 0 \quad (3.12)$$

Далее считаем

$$t''(\Phi_0) < 0 \quad (3.13)$$

Решение системы (3.5) при $j = 0$ запишем в виде

$$X_0(\xi) = P_0(\xi) Y^0, \quad Y^0 = (1, -A_0^{(11)}/A_0^{(12)}) \quad (3.14)$$

где $P_0(\xi)$ – неизвестный полином, а Y^0 – двумерный вектор.

При $j = 1$ система уравнений (3.5) является неоднородной. Но при условиях (3.10), (3.12) или (3.11), (3.12) она обращается в систему тождеств.

При $j = 2$ система (3.5) является неоднородной. Условие ее совместности приводит к соотношению

$$a = i(\Lambda_{\Phi\Phi}^0/\Lambda_{qq}^0)^{1/2} \quad (3.15)$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$\frac{d^2 P_0}{d\xi^2} + ia \left[2\xi \frac{dP_0}{d\xi} + P_0 \right] + \frac{2\Lambda_1}{\Lambda_{qq}^0} P_0 + D = 0 \quad (3.16)$$

$$D = \frac{2\tau p_m^6}{\Lambda_{qq}^0 (1 + \kappa p_m^2)} P_0 \quad \text{при } p_m > z_0 \quad (3.17)$$

$$D = \frac{2\tau p_m^3 z_0^3}{\Lambda_{qq}^0 (1 + \kappa p_m z_0)} P_0 \quad \text{при } p_m < z_0 \quad (3.18)$$

Заметим, что неравенство (3.13) гарантирует положительный знак подкоренного выражения в (3.15). При

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(n)} = (1/2 + n) \sqrt{\Lambda_{qq}^0 \Lambda_{\Phi\Phi}^0} + \sigma \quad (3.19)$$

$$\sigma = \frac{\tau p_m^6}{1 + \kappa p_m^2} \quad (\text{случай } A), \quad \sigma = \frac{\tau p_m^3 z_0^3}{1 + \kappa p_m z_0} \quad (\text{случай } B)$$

уравнение (3.16) имеет решение в виде полинома Эрмита степени n :

$$P_0(\xi) = H_n(\vartheta), \quad \vartheta = \sqrt{c}\xi, \quad c = -ia \quad (3.20)$$

$$a = i \left\{ \frac{p_m^4 (1 + \kappa p_m^2)^2 [-t''(\Phi_0)]}{2p_m^4 (2 + \kappa p_m^2) - 4(1 + \kappa p_m^2)^2} \right\}^{1/2} \quad (3.21)$$

$$\Lambda_{qq}^0 = \frac{-2}{p_m^2 (1 + \kappa p_m^2)^2} \{ 2(1 + \kappa p_m^2)^2 - p_m^4 (2 + \kappa p_m^2) \} \quad \text{при } p_m > z_0.$$

$$a = i \left\{ \frac{p_m(1 + \kappa p_m z_0)^3 [-t''(\varphi_0)]}{4(z_0 - p_m)(8 + 9\kappa p_m z_0 + 3[\kappa p_m z_0]^2)} \right\}^{1/2} \quad (3.22)$$

$$\Lambda_{qq}^0 = \frac{4p_m(z_0 - p_m)(8 + 9\kappa p_m z_0 + 3[\kappa p_m z_0]^2)}{(1 + \kappa p_m z_0)^3} \quad \text{при } p_m < z_0.$$

Найденная здесь поправка Λ_1 учитывает неоднородность осевых сил в окружном направлении и наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ).

Рассмотрим теперь систему (2.5) в случае, когда $p_m \approx z_0$.

Решение уравнений (2.5) ищем в том же виде (3.2). Положим

$$p_m = p_* + \mu p', \quad \Lambda = \lambda_* + \mu^2 \lambda', \quad \varepsilon = \mu^{3/2}, \quad \varphi - \varphi_0 = \mu \eta \quad (3.23)$$

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \mu t'(\varphi_0) \eta + \frac{1}{2} \mu^2 t''(\varphi_0) \eta^2 + \dots$$

где p_* решение уравнения

$$\kappa p_*^6 + 2p_*^4 - 2(1 + \kappa p_*^2)^2 = 0 \quad (3.24)$$

Представим неизвестные χ_m и Φ_m в виде рядов:

$$\chi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \chi_m^{(k)}(\eta), \quad \Phi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Phi_m^{(k)}(\eta) \quad (3.25)$$

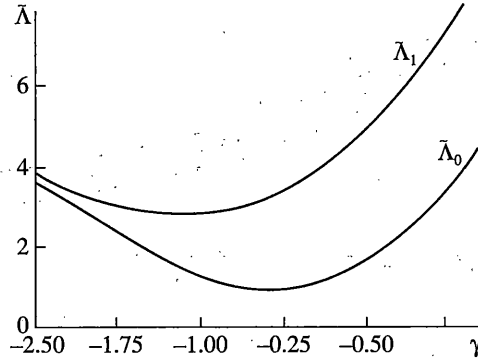
После подстановки (3.23), (3.25) в систему (2.5) в нулевом приближении приходим к системе уравнений, из условия существования нетривиального решения которой находим

$$\lambda_* = \frac{p_*^4}{1 + \kappa p_*^2} + 1 - t(\varphi_0) p_*^2 \quad (3.26)$$

Система (2.5) в первом приближении, при выполнении условий (3.24), (3.26) обращается в систему тождеств. А во втором приближении приходим к дифференциальному уравнению относительно $\chi_m^{(0)}$:

$$\left(1 + \frac{\kappa}{p_*^2} + \frac{3}{p_*^4}\right) \frac{d^4 \chi_m^{(0)}}{d\eta^4} + \left(-4p_* p' + 2\kappa p_* p' - 4 \frac{p'}{p_*}\right) \frac{d^2 \chi_m^{(0)}}{d\eta^2} + \left(-\frac{1}{2} t''(\varphi_0) p_*^2 (1 + \kappa p_*^2) \eta^2 - \lambda' (1 + \kappa p_*^2) + p'^2 (6p_*^2 - 1) - \kappa p'^2 p_*^2 \left[5 + \frac{p_*^2}{1 + \kappa p_*^2}\right]\right) \chi_m^{(0)} = 0 \quad (3.27)$$

Решение уравнения (3.27), удовлетворяющее условию затухания $\chi_m^{(0)} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$, ищем с использованием обратного преобразования Фурье:



Фиг. 2

$$\chi_m^{(0)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W^F(\tilde{\omega}) \exp(i\tilde{\omega}\eta) d\tilde{\omega} \quad (3.28)$$

Применив преобразование (3.28), получим уравнение

$$d^2 W^F / dx^2 + [\tilde{\Lambda} - (x^4 + 2\gamma x^2 + \gamma^2 [1 + Q(\kappa)])] W^F = 0 \quad (3.29)$$

$$\tilde{\Lambda} = \lambda' \left(\frac{1 + \kappa p_*^2}{[p_*^4 + \kappa p_*^2 + 3] [-t''(\varphi_0)/2]^2} \right)^{1/3}, \quad \alpha(\kappa) = \left[\frac{(-t''(\varphi_0)/2) p_*^6 (1 + \kappa p_*^2)}{p_*^4 + \kappa p_*^2 + 3} \right]^{1/6}$$

$$x = \alpha(\kappa)^{-1} \tilde{\omega}, \quad \gamma = p_* C(\kappa), \quad C(\kappa) = \frac{2 + 2p_*^4 - \kappa p_*^4}{p_* [(-t''(\varphi_0)/2) (1 + \kappa p_*^2) (p_*^4 + \kappa p_*^2 + 3)]^{2/3}} \quad (3.30)$$

$$Q(\kappa) = \frac{A(\kappa) \alpha(\kappa)^2}{C(\kappa)^2 (-t''(\varphi_0)/2) p_*^2 (1 + \kappa p_*^2)}$$

$$A(\kappa) = \frac{6p_*^2 - 1 - 6\kappa p_*^2 + 5\kappa^2 p_*^4 - 5\kappa^2 p_*^4}{1 + \kappa p_*^2} - \frac{(2 + 2p_*^4 - \kappa p_*^4)^2}{p_*^2 (p_*^4 + \kappa p_*^2 + 3)}$$

Для каждого γ существует счетное множество $\tilde{\Lambda}_i(\gamma)$ значений $\tilde{\Lambda}$, при которых существует нетривиальные решения уравнения (3.29), стремящиеся к нулю, при $x \rightarrow \pm\infty$.

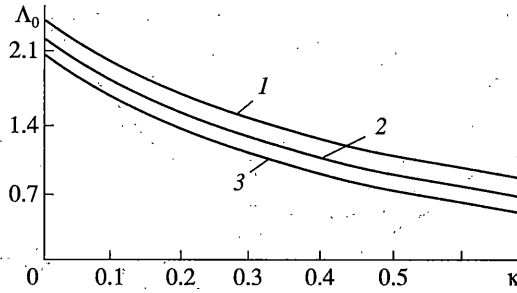
4. Анализ результатов и примеры. На фиг. 2 приведены функции $\tilde{\Lambda}_0(\gamma)$ и $\tilde{\Lambda}_1(\gamma)$ для $\kappa = 0.5$, $t(\varphi) = 0.5(1 + \cos\varphi)$, $\varphi_0 = 0$.

Функция $\tilde{\Lambda}_0(\gamma)$ принимает наименьшее значение $\tilde{\Lambda}_0 = 0.924$ при $\gamma = -0.38$. Отсюда наименьшая частота достигается при

$$p_m = 1.22 - 0.217\varepsilon^{2/3} \quad (4.1)$$

а параметр Λ из (3.23), пропорциональный собственной частоте, равен

$$\Lambda_{\min} = 0.782 + \varepsilon^{4/3} 0.553 \quad (4.2)$$



Фиг. 3

В табл. 1 приведены численные значения p_m , z_0 , λ_* , λ' и Λ_{\min} в зависимости от параметра k в случае, когда $p_m \approx z_0$. Видно, что при увеличении параметра k , характеризующего поперечный сдвиг, наименьшая частота уменьшается.

Рассмотрим тонкую трехслойную цилиндрическую оболочку радиуса $R = 150$ мм и длиной $L = 450$ мм. Первый и третий слой имеют одинаковую толщину $h_1 = h_3 = 0.3$ мм и изготовлены из алюминия с модулем Юнга $E_1 = E_3 = 70300$ Н/мм², плотностью $\rho_1 = \rho_3 = 2.7 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³, числом Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0.345$. Вторым слоем изготовлен из эпоксидной смолы с $E_2 = 3450$ Н/мм², $\rho_2 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³, $\nu_2 = 0.3$ и имеет толщину $h_2 = 0.8$ мм.

Пусть функция, характеризующая осевое усилие имеет вид

$$t(\varphi) = \delta(1 + \beta \cos \varphi) \tag{4.3}$$

Тогда "наиболее слабой" будет образующая $\varphi = 0$.

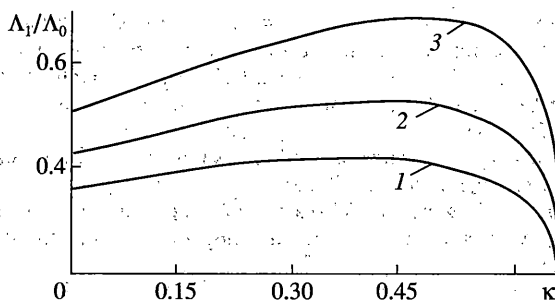
На фиг. 3 приведена зависимость Λ_0 от коэффициента поперечного сдвига k при $m = 20$ (или $p_m = 1.3$), $\delta = 0.5$ и различных значениях β . Цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, соответствующие параметрам $\beta = 0.8, 1, 1.2$ соответственно. В данном случае $p_m > z_0$ и расчеты выполнены по формулам, соответствующим варианту (А). Видно, что при

Таблица 1

k	0.037	0.1	0.25	0.4	0.5	0.6
p_m	0.993	1.017	1.077	1.142	1.186	1.229
z_0	1.014	1.039	1.102	1.171	1.220	1.271
λ_*	0.990	0.972	0.917	0.843	0.782	0.710
λ'	0.590	0.586	0.575	0.563	0.553	0.539
Λ_{\min}	1.005	0.986	0.931	0.857	0.796	0.723

Таблица 2

p_m	0.844	0.909	0.974	1.077	1.36	1.43	1.49
	$p_m < z_0$			$p_m \approx z_0$	$p_m > z_0$		
$\Lambda_0(\lambda_*)$	0.575	0.656	0.741	0.917	1.490	1.722	1.949
$\Lambda_1/\Lambda_0 (\lambda'/\lambda_*)$	1.117	0.942	0.752	0.627	0.552	0.564	0.564
$\text{Im} a$	0.285	0.347	0.448		1.588	1.167	1.026



Фиг. 4

увеличении нагрузки частота колебаний уменьшается, что согласуется с ранее полученными результатами в [11]. Увеличение параметра сдвига κ также приводит к снижению собственных частот колебаний.

На фиг. 4 представлена величина относительной поправки Δ_1/Δ_0 , учитывающей неоднородность нагружения и наличие поперечных сдвигов при $\delta = 0.5$ и различных значениях β (кривая 1 соответствует параметру $\beta = 0.8$, кривая 2 – $\beta = 1$, кривая 3 – $\beta = 1.2$). Очевидно, что с увеличением параметра β , характеризующего неоднородность нагружения, относительная поправка Δ_1/Δ_0 возрастает. При этом при каждом фиксированном β имеется максимум величины Δ_1/Δ_0 как функции параметра сдвига κ . При $\kappa > 0.65$ влияние неоднородности нагружения на частоты резко уменьшается.

В табл. 2 приведены численные значения Λ_0 , Λ_1/Λ_0 (или λ_* , λ'/λ_* для случая $p_m \approx z_0$) в зависимости от параметра p_m , пропорционального числу волн в осевом направлении. Расчеты были выполнены при $\kappa = 0.25$ и $t(\varphi) = 0.5(1 + \cos \varphi)$. Видно, что при $p_m \rightarrow z_0$ относительная поправка к частоте колебаний Δ_1/Δ_0 уменьшается, в то время как локализация колебаний (параметр Γma) возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armenakas A.E., Herrmann G. Vibrations of infinitely long cylindrical shells under initial stress // AIAA Journal. 1963. V. 1. P. 100–106.
2. Herrmann G., Shaw J. Vibration of thin shells under initial stress // Proc. ASCE. J. Eng. Mech. Division. 1965. V. 91. № 5. P. 37–59.
3. Thompson J.R., Willson A.J. The vibrations of a thin walled elastic cylinder under axial stress // Int. J. Eng. Sci. 1979. V. 17. № 6. P. 725–733.
4. Neu W.L., Reismann H. Dynamics of the prestressed solid with application to thin shells // Solid Mech. Arch. 1982. V. 7. № 2. P. 97–129.
5. Ботогова М.Г., Михасев Г.И., Рафеенко Е.Д. Свободные колебания вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого нагружения // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: УП “Технопринт”, 2001. С. 57–61.
6. Mikhasev G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Techn. Mech. 1997. Bd 17. N. 3. S. 209–216.
7. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.
8. Михасев Г.И., Згурская О.М. Локальная потеря устойчивости тонкой слоистой оболочки при неоднородном осевом сжатии // Весн. ВДУ. 2001. № 4 (22). С. 90–93.
9. Korchevskaya E., Mikhasev G., Marinkovic D., Gabbert U. Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load // Proc. Conference “6 Magdeburger Maschinenbau-Tage”. Berlin: Logos-Verl, 2003. P. 183–189.

10. *Mikhasev G., Korchevskaya E., Gabbert U., Marinkovic D.* Local buckling, stationary and non-stationary vibrations of thin composite laminated shells having the weakest spots // Proc. 4 th Intern. Conf. on Thin-Walled Structures / Ed. J. Loughlan. UK, Loughborough, 2004. P. 769–776.
11. *Tong L.* Free vibration of axially loaded laminated conical shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1999. V. 66. № 3. P. 758–763.
12. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
13. *Mikhasev G., Gabbert U., Seeger F.* Local buckling of composite laminated cylindrical shell with oblique edge under external pressure: Asymptotic and finite element simulations // Techn. Mech. 2001. Bd 21. H. 1. S. 1–12.

Витебск

Поступила в редакцию
6.06.2005