

УДК 531.01;629.195.2

© 2006 г. А.П. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ВРАЩЕНИЙ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Изучается устойчивость плоских движений спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник – твердое тело, геометрия масс которого соответствует пластинке ($C = A + B$; A, B, C – главные центральные моменты инерции). Орбита центра масс круговая. В невозмущенном движении одна из главных центральных осей инерции спутника перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается вокруг нее с произвольной угловой скоростью. Задача об устойчивости этого вращения решается в нелинейной постановке. С этой целью в статье предложен конструктивный алгоритм исследования орбитальной устойчивости периодических движений автономных гамильтоновых систем. Этот алгоритм основан на специальном способе построения и последующем анализе симплектического отображения, порождаемого уравнениями возмущенного движения на изоэнергетическом уровне, соответствующем невозмущенному периодическому движению. В случае спутника, близкого к динамически симметричному, проведено аналитическое исследование. При произвольных значениях параметров (инерционной характеристики и угловой скорости вращения спутника) использован численный анализ.

1. Системы координат. Функция Гамильтона. Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс под действием гравитационных моментов центрального ньютоновского поля. Линейные размеры спутника считаем малыми по сравнению с размером орбиты, поэтому [1] задача рассматривается в ограниченной постановке: предполагается, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс. Орбиту центра масс считаем круговой.

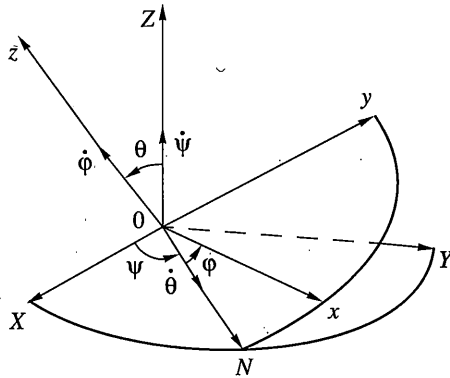
Введем необходимые для исследования системы координат. Пусть $OXYZ$ – орбитальная система координат (фиг. 1). Ее ось Z направлена по радиус – вектору центра масс O спутника относительно притягивающего центра, X – по вектору скорости центра масс, Y – по нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oxyz$ жестко связана со спутником, ее оси направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника. Взаимную ориентацию связанной и орбитальной систем координат зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, ϕ (фиг. 1).

Проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси связанной системы координат вычисляются по формулам

$$p = \dot{\psi}a_{31} + \dot{\theta}\cos\phi + \omega_0a_{21}, \quad q = \dot{\psi}a_{32} - \dot{\theta}\sin\phi + \omega_0a_{22}, \quad r = \dot{\psi}a_{33} + \dot{\phi} + \omega_0a_{23} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi\cos\theta, & a_{22} &= -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\theta \\ a_{23} &= -\cos\psi\sin\theta, & a_{31} &= \sin\phi\sin\theta, & a_{32} &= \cos\phi\sin\theta, & a_{33} &= \cos\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника, точкой обозначено дифференцирование по времени t , a_{2j} и a_{3j} – направляющие косинусы осей Y и Z в связанной системе координат $Oxyz$.



Фиг. 1

Пусть A, B и C – моменты инерции спутника относительно осей x, y и z . Для кинетической и потенциальной энергии спутника в его движении относительно центра масс имеем такие выражения [1]:

$$T = 1/2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = 3/2(Aa_{31}^2 + Ba_{32}^2 + Ca_{33}^2) \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем считать, что $C = A + B$, т.е. спутник обладает геометрией масс, соответствующей пластинке, расположенной в плоскости Oxy .

При помощи функции Лагранжа $L = T - \Pi$ введем обобщенные импульсы

$$p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi}, \quad p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta}, \quad p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} \quad (1.4)$$

Функция Гамильтона вычисляется по формуле $H = T_2 - T_0 + \Pi$, где T_2 – квадратичная относительно обобщенных скоростей $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ часть кинетической энергии, выраженная через обобщенные импульсы при помощи равенств (1.1)–(1.4); T_0 – часть кинетической энергии, не зависящая от $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$.

Обезразмерив импульсы посредством множителя $C\omega_0$ и перейдя к новой независимой переменной $v = \omega_0 t$, можно получить следующее выражение для функции Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}p_\phi^2 + \frac{3}{9-a^2} \left[\frac{3+a \cos 2\phi}{\sin^2 \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta)^2 - 2a \frac{\sin 2\phi}{\sin \theta} p_\theta (p_\psi - p_\phi \cos \theta) + (3-a \cos 2\phi) p_\theta^2 \right] - \cos \psi \operatorname{ctg} \theta p_\psi - \sin \psi p_\theta + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} p_\phi - \frac{1}{4}(3+a \cos 2\phi) \sin^2 \theta \quad (1.5)$$

$$a = 3(A-B)/C \quad (1.6)$$

Не ограничивая общности, полагаем, что $A \geq B$ (случай $A \leq B$ сводится к случаю $A \geq B$, если в (1.5) заменить угол ϕ на угол $\phi + \pi/2$). Учитывая еще неравенство треугольника для моментов инерции, в дальнейшем считаем, что $0 \leq a \leq 3$.

2. Невозмущенные плоские вращения спутника. Уравнения движения допускают семейства частных решений, для которых $\psi = \pi, \theta = \pi/2, p_\psi = 0, p_\theta = 0$, а переменные ϕ, p_ϕ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi}{dv} = p_\phi - 1, \quad \frac{dp_\phi}{dv} = -a \sin \phi \cos \phi \quad (2.1)$$

Для этого семейства решений ось z спутника направлена вдоль нормали к плоскости орбиты, а сам спутник совершает в орбитальной системе координат плоские маятникообразные движения.

Устойчивость этих движений в ряде частных случаев исследовалась ранее в линейной [2–5] и нелинейной [6–8] постановках задачи.

В публикуемой работе будем интересоваться только случаем плоских вращений при упомянутом выше ограничении на геометрию масс спутника ($C = A + B$). Этот случай вращательного движения спутника ранее не рассматривался.

Для плоских вращений угол φ – монотонная функция времени. При этом необходимо различать прямые и обратные вращения. Для прямых вращений направление вращения спутника в орбитальной системе координат и направление вращения радиус-вектора центра масс одинаковы, а угол φ монотонно возрастает. Для обратных вращений эти направления противоположны, а φ монотонно убывает.

Решение φ^* , p_φ^* уравнений (2.1), соответствующее плоским вращениям спутника, будем записывать в следующем виде:

$$\varphi = \varphi^*(v) = \pm \operatorname{am}\left(\frac{2K(k)}{\pi} v, k\right), \quad p_\varphi = p_\varphi^*(v) = 1 + (b-1) \operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)}{\pi} v, k\right) \quad (2.2)$$

$$v = \omega v, \quad \omega = \frac{\pi|b-1|}{2K(k)}, \quad k = \frac{\sqrt{a}}{|b-1|}$$

Здесь верхний знак соответствует прямым, а нижний обратным вращениям; k – модуль эллиптических функций.

Параметр b в (2.2) имеет следующий смысл. Для прямых (обратных) вращений он равен отношению наибольшего (наименьшего) значения абсолютной угловой скорости спутника r к угловой скорости его центра масс ω_0 . Если спутник динамически симметричен ($a = 0$), то $r = r_0 = \operatorname{const}$ и $b = r_0/\omega_0$.

Области допустимых значений параметров a, b для прямых и обратных вращений задаются соответственно неравенствами

$$0 \leq a \leq 3, \quad b > 1 + \sqrt{a} \quad (2.3)$$

$$0 \leq a \leq 3, \quad b < 1 - \sqrt{a} \quad (2.4)$$

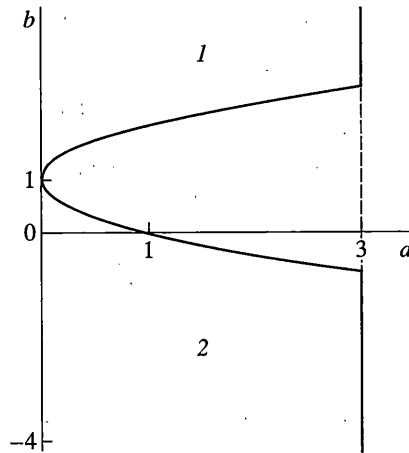
На фиг. 2 области (2.3) и (2.4) обозначены цифрами 1 и 2.

3. Гамильтониан возмущенного движения. Так как частота ω невозмущенного движения зависит от начальных условий (эта зависимость осуществляется через параметр b), то плоские вращения спутника (2.2) неустойчивы по Ляпунову. Следует рассматривать задачу об орбитальной устойчивости этих вращений.

Алгоритм построения уравнений возмущенного движения в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновых систем разработан ранее [9]. Для удобства вычислений предварительно перейдем в уравнения движения с гамильтонианом (1.5) к новой независимой переменной $v = \omega v$. А затем, пользуясь монотонностью функции $\varphi^*(v)$ из (2.2) и следуя алгоритму из [9], сделаем каноническое унивалентное преобразование $\psi, \theta, \varphi, p_\psi, p_\theta, p_\varphi \rightarrow q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \pi + q_1, \quad \theta = \pi/2 + q_2, \quad \varphi = \varphi^*(q_3) \\ p_\psi &= p_1, \quad p_\theta = p_2, \quad p_\varphi = p_\varphi^*(q_3) + \left(\frac{d\varphi^*(q_3)}{dq_3}\right)^{-1} p_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Переменные q_1, q_2, p_1, p_2, p_3 характеризуют отклонение возмущенных траекторий в фазовом пространстве от траектории невозмущенного вращения спутника (2.2).



Фиг. 2

Гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ вычисляется по формуле $\Gamma = \omega^{-1}H$, где H – функция Гамильтона (1.5), в которой сделана замена (3.1). Функцию Γ можно разложить в ряд по степеням q_1, q_2, p_1, p_2, p_3 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2k} + \dots \quad (3.2)$$

$$\Gamma_2 = p_3 + \Phi_2(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3) \quad (3.3)$$

$$\Gamma_4 = \chi(q_3)p_3^2 + p_3\Psi_2(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3) + \Phi_4(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \omega^{-1} \left\{ \frac{1}{2}p_\phi^*q_1^2 + q_1p_2 + \frac{1}{12}[(12p_\phi^{*2} + 9 - a^2)\chi_1 - 6p_\phi^*]q_2^2 + (2p_\phi^*\chi_1 - 1)q_2p_1 - \right. \\ \left. - p_\phi^*\chi_2q_2p_2 + \chi_1p_1^2 - \chi_2p_1p_2 + \left(\frac{18}{9 - a^2} - \chi_1\right)p_2^2 \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\chi_1 = \frac{3(3 + a \cos 2\varphi^*)}{9 - a^2}, \quad \chi_2 = \frac{6a \sin 2\varphi^*}{9 - a^2}, \quad \chi = \frac{\omega}{2(p_\phi^* - 1)^2} \quad (3.6)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{p_\phi^* - 1} \left[\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}(4p_\phi^*\chi_1 - 1)q_2^2 + 2\chi_1q_2p_1 - \chi_2q_2p_2 \right] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = \omega^{-1} \left\{ -\frac{p_\phi^*}{24}q_1^4 - \frac{1}{6}q_1^3p_2 + \frac{p_\phi^*}{4}q_1^2q_2^2 + \frac{1}{2}q_1^2q_2p_1 + \frac{1}{72}[2(24p_\phi^{*2} - 9 + a^2) - 15p_\phi^*]q_2^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(5p_\phi^*\chi_1 - 1)q_2^3p_1 - \frac{1}{3}\chi_2p_\phi^*q_2^3p_2 + \chi_1q_2^2p_1^2 - \frac{1}{2}\chi_2q_2^2p_1p_2 \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

где несущественная аддитивная постоянная отброшена, а Γ_{2k} – форма степени $2k$ относительно $q_4, q_2, p_1, p_2, |p_3|^{1/2}$ с π -периодическими по q_3 коэффициентами.

В переменных q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$) невозмущенное движение (2.2) записывается в виде

$$q_j = p_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad q_3 = v, \quad p_3 = 0 \quad (3.9)$$

Задача об орбитальной устойчивости движения (2.2) эквивалентна задаче об устойчивости системы с гамильтонианом (3.2) по отношению к возмущениям величин q_1, q_2, p_1, p_2, p_3 .

4. Анализ первого (линейного) приближения. 4.1. Мультипликаторы. Условия орбитальной устойчивости и неустойчивости. Линеаризованным уравнениям возмущенного движения соответствует гамильтониан Γ_2 , определенный равенством (3.3). В линеаризованной системе уравнения для q_3 и p_3 отделяются от уравнений для переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$) и имеют решение $q_3(v) = v + q_3(0), p_3(v) = p_3(0)$. Отсюда сразу следует, что линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют мультипликатор, равный единице, кратность которого не меньше двух.

Для исследования линейной задачи об орбитальной устойчивости движения (3.9) надо знать каковы остальные четыре мультипликатора. Пусть $X(q_3)$ – фундаментальная матрица системы с гамильтонианом $\Phi_2(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3)$, определяемым формулой (3.5). Ее элементы $x_{ij}(q_3)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{kj}}{dq_3} = \frac{\partial \Phi_2(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, q_3)}{\partial x_{k+2, j}}, \quad \frac{dx_{k+2, j}}{dq_3} = - \frac{\partial \Phi_2(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, q_3)}{\partial x_{k, j}} \quad (4.1)$$

$(k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$

и начальным условиям

$$X(0) = E \quad (4.2)$$

где E – единичная матрица четвертого порядка. Упомянутые четыре мультипликатора являются корнями характеристического уравнения матрицы $X(\pi)$. Это уравнение является возвратным и записывается в следующем виде:

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0 \quad (4.3)$$

где a_1 – след матрицы $X(\pi)$, a_2 – сумма всех ее главных миноров второго порядка.

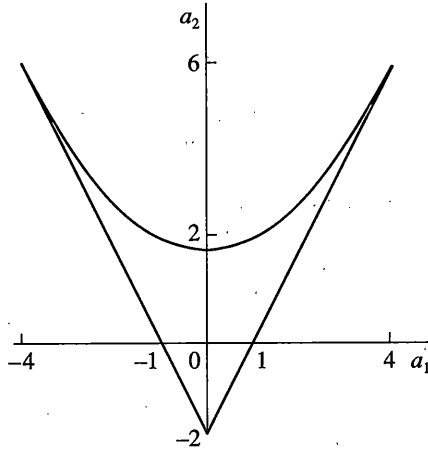
Коэффициенты уравнения (4.3) – функции параметров a и b . Если значения параметров таковы, что в плоскости a_1, a_2 точка с координатами $a_1(a, b), a_2(a, b)$ лежит внутри криволинейного треугольника, задаваемого неравенствами

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2 \quad (4.4)$$

(см. фиг. 3), то для этих значений параметров корни уравнения (4.3) (мультипликаторы) комплексно сопряженные, различные и имеют модули, равные единице [10]; характеристические показатели $\pm i\lambda_k$ ($k = 1, 2$) будут чисто мнимыми. В этом случае исследуемые плоские вращения спутника орбитально устойчивы в первом приближении. Для строгого решения задачи здесь необходимо исследование нелинейных уравнений возмущенного движения [11].

Если же параметры a и b таковы, что точка $a_1(a, b), a_2(a, b)$ лежит вне криволинейного треугольника (4.4), то характеристическое уравнение имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы. В этом случае вращение спутника орбитально неустойчиво независимо от нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения [11].

4.2. Параметрический резонанс в случае спутника, близкого к динамически симметричному. Чтобы выяснить, лежат ли параметры a и b в области орбитальной устойчивости плоского вращения спутника в первом приближении или в области его орбитальной



Фиг. 3

неустойчивости, нужно при помощи численного интегрирования системы (4.1), (4.2) выяснить, лежат ли соответствующие точки $a_1(a, b)$, $a_2(a, b)$ внутри треугольника (4.4) или вне его. При наличии малого параметра возможно аналитическое исследование.

Пусть параметр a мал ($0 \leq a \ll 1$), т.е. (см. (1.6)) спутник близок к динамически симметричному. Обозначим через $\varphi_2^{(0)}$ функцию Гамильтона линейной задачи в предельном случае $a = 0$. Из (3.5) следует, что $\varphi_2^{(0)}$ не зависит от q_3 и имеет вид

$$\varphi_2^{(0)} = \frac{1}{|b-1|} \left[\frac{1}{2} b q_1^2 + q_1 p_2 + \frac{1}{4} (4b^2 - 2b + 3) q_2^2 + (2b - 1) q_2 p_1 + p_1^2 + p_2^2 \right] \quad (4.5)$$

Характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом $\varphi_2^{(0)}$ при $-1 < b < 1/2$ имеет корень с положительной вещественной частью. Следовательно (ввиду непрерывности характеристических показателей), если a — достаточно малая величина, то при $-1 < b < 1/2$ вращение спутника орбитально неустойчиво.

Если же выполняется одно из трех неравенств

$$b > 1, \quad 1 > b > 1/2 \quad \text{или} \quad b < -1 \quad (4.6)$$

то корни характеристического уравнения чисто мнимые и равны $\pm i\omega_k$ ($k = 1, 2$), где ω_k — корни уравнения

$$(b-1)^4 \omega^4 - (4b^2 - 4b + 5)(b-1)^2 \omega^2 + 2(b+1)(2b-1) = 0 \quad (4.7)$$

В дальнейшем считаем, что $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

Можно показать, что если параметр b удовлетворяет первому или второму из неравенств (4.6), то функция (4.5) определено-положительна, а если b удовлетворяет третьему неравенству из (4.6), то функция (4.5) является знакопеременной.

При $a = 0$ в каждой из областей (4.6) вращение спутника орбитально устойчиво в первом приближении. Если же величина a мала, но отлична от нуля, то гамильтониан (3.5) линейной задачи зависит от q_3 и возможна неустойчивость из-за параметрического резонанса. Для нахождения областей неустойчивости сначала целесообразно, следуя [12],

сделать унивалентную каноническую замену переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow Q_1, Q_2, P_1, P_2$, приводящую невозмущенный гамильтониан (4.5) к нормальной форме. Эта замена может быть найдена в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{4(b-1)|b-1|\omega_1}{\sqrt{|k_1|}}P_1 - \frac{4(b^2-1)|b-1|\omega_2}{|b+1|\sqrt{|k_2|}}P_2 \\ q_2 &= \frac{2[(b-1)^2\omega_1^2+1-2b]}{\sqrt{|k_1|}}Q_1 + \frac{2[(b-1)^2\omega_2^2+1-2b]}{\sqrt{|k_2|}}Q_2 \\ p_1 &= -\frac{(b-1)^2\omega_1^2-(1-2b)^2}{\sqrt{|k_1|}}Q_1 - \frac{(b-1)^2\omega_2^2-(1-2b)^2}{\sqrt{|k_2|}}Q_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$p_2 = \frac{[(b-1)^2\omega_1^2-1]|b-1|\omega_1}{\sqrt{|k_1|}}P_1 + \frac{[(b-1)^2\omega_2^2-1]|b^2-1|\omega_2}{(b+1)\sqrt{|k_2|}}P_2$$

$$k_j = 2\omega_j|b-1|[(4b^2-8b+7)(b-1)^2\omega_j^2-(1-2b)(4b^2-8b+1)] \quad (j = 1, 2)$$

В переменных Q_j, P_j гамильтониан (4.5) принимает такую форму:

$$\varphi_2^{(0)} = 1/2\sigma_1^{(0)}(Q_1^2 + P_1^2) + 1/2\sigma_2^{(0)}(Q_2^2 + P_2^2) \quad (4.9)$$

где $\sigma_1^{(0)} = \omega_1$, а $\sigma_2^{(0)} = \omega_2$, если $b > 1$ или $1 > b > 1/2$ и $\sigma_2^{(0)} = -\omega_2$, если $b < -1$.

При малых значениях параметра a в плоскости a, b возникают области параметрического резонанса (области орбитальной неустойчивости исследуемых вращений спутника). Учитывая π -периодичность гамильтониана (3.5) по переменной q_3 , на основании теоремы Крейна – Гельфанда – Лидского [13] получаем, что порождающими точками для этих областей могут быть только такие точки оси $a = 0$, в которых величины $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$ из нормальной формы (4.9) удовлетворяют хотя бы одному из соотношений

$$\sigma_1^{(0)} = n_1, \quad \sigma_2^{(0)} = n_2, \quad \sigma_1^{(0)} + \sigma_2^{(0)} = 2n_3 \quad (4.10)$$

где n_1, n_2, n_3 – целые числа.

Анализ соотношений (4.10) с учетом уравнения (4.7) показывает, что все порождающие точки лежат на отрезке $[b_*, b_{**}]$ оси $a = 0$, причем $b_* = 0.548232$, $b_{**} = 2.323262$.

Так как ω_j ($j = 1, 2$) $\rightarrow \infty$ при $b \rightarrow 1$, то множество порождающих точек счетно. Точка $b = 1$ является предельной для множества порождающих точек как в интервале $(1, b_{**})$ области прямых вращений, так и в интервале $(b_*, 1)$ области обратных вращений. Для обратных вращений в области $b < -1$ порождающих точек нет.

Из счетного множества порождающих точек рассмотрим только первые четыре точки P_i ($0, b_i^{(0)}$), занумеровав их в порядке убывания значений параметра b : $b_1^{(0)} > b_2^{(0)} > b_3^{(0)} > b_4^{(0)}$. Тогда

$$b_1^{(0)} = b_{**}, \quad b_2^{(0)} = 2.285501, \quad b_3^{(0)} = 2.244214, \quad b_4^{(0)} = 1.725441 \quad (4.11)$$

В точках P_1, P_2, P_3, P_4 реализуются соответственно следующие резонансные соотношения:

$$\omega_1 = 3, \quad \omega_1 + \omega_2 = 4, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_1 = 4 \quad (4.12)$$

Обозначим через $b = b_i^+(a)$ и $b = b_i^-(a)$ уравнения верхней и нижней границ области параметрического резонанса, исходящей из точки P_i . При малых a для этих границ можно получить следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} b_1^+ &= b_1^{(0)} + 0.188927a + 0.016615a^2 - 0.001465a^3 + O(a^4) \\ b_1^- &= b_1^{(0)} + 0.188927a + 0.016615a^2 - 0.003279a^3 + O(a^4) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} b_2^+ &= b_2^{(0)} + 0.194477a + 0.013601a^2 - 0.002058a^3 + O(a^4) \\ b_2^- &= b_2^{(0)} + 0.194477a + 0.005979a^2 - 0.000905a^3 + O(a^4) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} b_3^+ &= b_3^{(0)} + 0.218566a - 0.006036a^2 - 0.000409a^3 + O(a^4) \\ b_3^- &= b_3^{(0)} + 0.183294a - 0.000340a^2 + 0.001519a^3 + O(a^4) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$b_4^+ = b_4^{(0)} + 0.344618a + 0.065538a^2 + O(a^3) \quad (4.16)$$

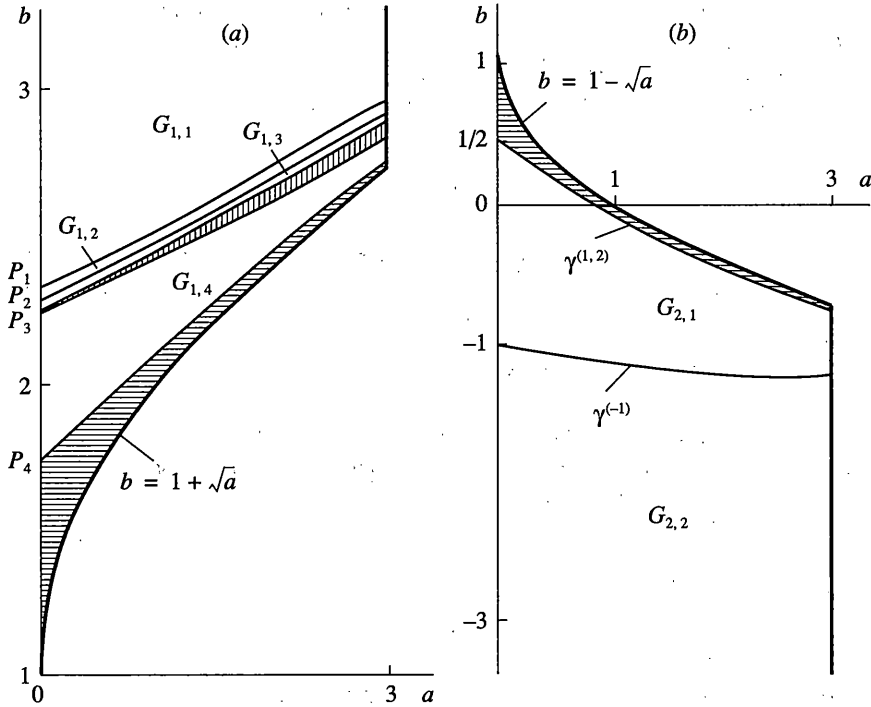
Кратко опишем процедуру получения разложений (4.13)–(4.16). Сначала в гамильтониане (3.5) делалась замена (4.8), приводящая невозмущенный гамильтониан $\phi_2^{(0)}$ к нормальной форме (4.9). Затем при помощи близкой к тождественной π -периодической по q_3 канонической замены переменных из гамильтониана исключалась переменная q_3 в членах до третьей степени включительно относительно a . После отбрасывания в преобразованном гамильтониане членов выше третьей степени получалась линейная автономная каноническая система дифференциальных уравнений четвертого порядка. Вопрос об ее устойчивости (a , следовательно, и исходной системы с гамильтонианом (3.5)) решался при помощи анализа ее биквадратного характеристического уравнения.

Упомянутые канонические преобразования, приводящие неавтономную систему к приближенной автономной, довольно громоздки. Их построение осуществлялось в виде рядов по параметру a при помощи метода Дебри – Хори [14] с использованием компьютерных систем аналитических вычислений.

4.3. Результаты численного анализа линейной задачи. Если параметр a не является малым, то для решения вопроса об устойчивости вращений спутника необходимо численное нахождение матрицы $X(\pi)$ с последующим анализом ее характеристического уравнения (4.3). Результаты численного анализа представлены на фиг. 4.

Фиг. 4, a соответствует случаю прямых вращений спутника. Горизонтальной штриховкой выделена часть области 1 допустимых значений параметров a и b , заключенная между ее граничной кривой $b = 1 + \sqrt{a}$ и кривой $b = b_4^+(a)$, являющейся верхней границей области параметрического резонанса, исходящей из точки P_4 . Эта часть области 1 содержит счетное множество областей устойчивости и неустойчивости и при численном анализе не рассматривалась.

В рассмотренной части области 1, лежащей выше кривой $b = b_4^+(a)$, существует три области параметрического резонанса. Они исходят из точек P_1 , P_2 и P_3 . При малых a границы этих областей задаются уравнениями (4.13), (4.14) и (4.15) соответственно. Верхние и нижние границы $b = b_i^+(a)$, $b = b_i^-(a)$ ($i = 1, 2$) областей, исходящих из точек P_1 и P_2 , проходят настолько близко одна от другой, что на фиг. 4, a они неразличимы. Об-



Фиг. 4

ласть параметрического резонанса, исходящая из точки P_3 , более широкая, на фиг. 4, она отмечена вертикальной штриховкой.

Если значения параметров a и b не принадлежат областям параметрического резонанса или их границам, то выполняются условия (4.4) и прямые вращения спутника орбитально устойчивы в первом приближении. В рассмотренной части области 1, лежащей выше кривой $b = b_4^+(a)$, существует четыре области $G_{1,k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) устойчивости в первом приближении. Область $G_{1,1}$ – это множество всех точек области 1, расположенных выше кривой $b = b_1^+(a)$, являющейся верхней границей области параметрического резонанса, исходящей из точки P_1 . Области $G_{1,k}$ ($k = 2, 3, 4$) заключены между кривыми $b = b_{k-1}^-(a)$ и $b = b_k^+(a)$, являющимися нижней и верхней границами областей параметрического резонанса, исходящих из точек P_{k-1} и P_k ($k = 2, 3, 4$).

Фиг. 4, b соответствует случаю обратных вращений спутника. Через $\gamma^{(1/2)}$ и $\gamma^{(-1)}$ на фиг. 4, b обозначены кривые, исходящие при $a = 0$ из граничных точек области неустойчивости $-1 < b < 1/2$ обратных вращений в предельном случае динамически симметричного спутника. В области $G_{2,1}$, заключенной между кривыми $\gamma^{(1/2)}$ и $\gamma^{(-1)}$, характеристическое уравнение (4.3) имеет корень, модуль которого больше единицы. В этой области вращение спутника орбитально неустойчиво.

В области $G_{2,2}$, образованной всеми точками области 2, лежащими ниже кривой $\gamma^{(-1)}$, имеет место орбитальная устойчивость в первом приближении.

Численное исследование области, лежащей между граничной кривой $b = 1 - \sqrt{a}$ области 2 и кривой $\gamma^{(1/2)}$ (на фиг. 4, b выделена горизонтальной штриховкой), не проводилось,

так как эта область содержит счетное множество очень узких областей параметрического резонанса и областей устойчивости в первом приближении.

4.4. *О вычислении характеристических показателей.* В областях устойчивости в первом приближении корни характеристического уравнения (4.3) (мультипликаторы) записываются в виде

$$\rho_k = \exp(i\pi\lambda_k), \quad \rho_{k+2} = \exp(-i\pi\lambda_k) \quad (k = 1, 2)$$

В предельном случае $a = 0$ мнимые части λ_k характеристических показателей совпадают с корнями ω_k уравнения (4.7). При $a \neq 0$ величины λ_k можно найти из системы уравнений [12]:

$$2(\cos\pi\lambda_1 + \cos\pi\lambda_2) = a_1, \quad 4\cos\pi\lambda_1\cos\pi\lambda_2 + 2 = a_2$$

где a_1, a_2 – коэффициенты уравнения (4.3). Из этой системы уравнений величины λ_k определяются неоднозначно. Для устранения неоднозначности воспользуемся непрерывностью характеристических показателей по параметру a .

Если ввести обозначения

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4}$$

то получим следующие формулы для вычисления величин λ_k в областях орбитальной устойчивости вращений спутника в первом приближении (см. фиг. 4.). В области $G_{1,1}$ $\lambda_1 = 2 + c_1, \lambda_2 = c_2$, в области $G_{1,2}$ $\lambda_1 = 4 - c_1, \lambda_2 = c_2$, в области $G_{1,3}$ $\lambda_1 = 4 - c_2, \lambda_2 = c_1$, в области $G_{1,4}$ $\lambda_1 = 4 - c_2, \lambda_2 = 2 - c_1$, в области $G_{2,2}$ $\lambda_1 = 2 - c_1, \lambda_2 = -c_2$.

5. Нелинейный анализ. 5.1. *Об условиях орбитальной устойчивости в нелинейной задаче.* Проведем нелинейное исследование орбитальной устойчивости вращения спутника для значений параметров a и b , лежащих в областях $G_{1,k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и $G_{2,2}$ устойчивости в первом приближении.

Согласно алгоритму из [7,9] это можно было бы сделать следующим образом. Сначала строится π -периодическая по q_3 каноническая замена переменных $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$ ($i = 1, 2, 3$), которая приводит гамильтониан возмущенного движения (3.2) к такой форме Γ , чтобы члены второй степени относительно $q'_j, p'_j, |p'_3|^{1/2}$ ($j = 1, 2$) имели нормальную форму

$$\Gamma'_2 = p'_3 + \frac{1}{2}\sigma_1(q_1'^2 + p_1'^2) + \frac{1}{2}\sigma_2(q_2'^2 + p_2'^2) \quad (5.1)$$

где $\sigma_j = \delta_j\lambda_j$ ($j = 1, 2$), а $\delta_j = \pm 1$. Конкретные значения величины δ_j определяются в процессе построения замены $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$. Отметим, что при $a = 0$ имеем $\sigma_j = \sigma_j^{(0)}$, где $\sigma_j^{(0)}$ – коэффициенты нормальной формы (4.9).

Затем делается еще одна каноническая, близкая к тождественной замена переменных $q'_i, p'_i \rightarrow q_i^*, p_i^*$ ($i = 1, 2, 3$), которая приводит к нормальной форме члены четвертой степени Γ'_4 . По коэффициентам нормальной формы можно затем сделать выводы об устойчивости исследуемого движения.

Здесь следует различать резонансный и нерезонансный случаи. Пусть параметры a и b таковы, что отсутствуют резонансы четвертого порядка, т. е. невозможно равенство

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 = n \tag{5.2}$$

где n – произвольное целое число, а k_1, k_2 – целые числа, сумма модулей которых равна четырём. Тогда нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан возмущенного движения будет иметь следующий вид:

$$\Gamma^* = L(r_1, r_2, r_3) + M(r_1, r_2, r_3) + \tilde{\Gamma}^*(r_1, r_2, r_3, \varphi_1, \varphi_2, q_3^*) \tag{5.3}$$

$$L = r_3 + \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 \tag{5.4}$$

$$M = c_{200}r_1^2 + c_{110}r_1r_2 + c_{101}r_1r_3 + c_{020}r_2^2 + c_{011}r_2r_3 + c_{002}r_3^2 \tag{5.5}$$

$$q_j^* = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j^* = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2), \quad r_3 = p_3^*$$

Здесь c_{ijk} – постоянные величины, $\tilde{\Gamma}^*$ – π -периодическая функция относительно q_3^* и $\tilde{\Gamma}^* = O((r_1 + r_2 + |r_3|)^3)$.

Если выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} & \sigma_1 \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} & \sigma_2 \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.6}$$

то исследуемое вращение спутника орбитально устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [15].

Если при $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ система уравнений

$$L = 0, \quad M = 0 \tag{5.7}$$

имеет только нулевое решение, то [16] имеет место формальная орбитальная устойчивость (т.е. орбитальная устойчивость в любом конечном приближении [17]).

Пусть теперь параметры a и b таковы, что выполняется одно из соотношений (5.2) резонанса четвертого порядка. Тогда в нормализованном гамильтониане (5.3) добавляются резонансные слагаемые

$$R = r_1^{|k_1|/2} r_2^{|k_2|/2} [\alpha_{k_1 k_2} \sin(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 - n q_3^*) + \beta_{k_1 k_2} \cos(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 - n q_3^*)] \tag{5.8}$$

где $\alpha_{k_1 k_2}, \beta_{k_1 k_2}$ – постоянные величины. Если $k_1 k_2 < 0$, то [17] имеет место (при отсутствии других резонансов) формальная устойчивость. Если же $k_1 k_2 > 0$, то при выполнении неравенства

$$|M(k_1, k_2, -n)| < |k_1|^{|k_1|/2} |k_2|^{|k_2|/2} \sqrt{\alpha_{k_1 k_2}^2 + \beta_{k_1 k_2}^2} \tag{5.9}$$

исследуемое движение орбитально неустойчиво [12]. При противоположном знаке в последнем неравенстве движение орбитально устойчиво в третьем приближении (т. е. при учете в разложении гамильтониана возмущенного движения в ряд членов до четвертой степени включительно).

Сформулированные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодического движения (вращения спутника) в системе с тремя степенями свободы совпадают с соответствующими условиями устойчивости и неустойчивости положения равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ редуцированной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описывающей возмущенные движения на изоэнергетическом уровне, отвечающем невозмущенному периодическому движению.

Действительно, пусть отсутствуют резонансы четвертого порядка. Тогда из уравнения $\Gamma^* = 0$ (см. (5.3)) находим

$$r_3 = -U(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, q_3^*) = -l(r_1, r_2) - m(r_1, r_2) + \tilde{U}(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, q_3^*) \quad (5.10)$$

$$l = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2, \quad m = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \quad (5.11)$$

$$c_{20} = c_{200} - c_{101} \sigma_1 + c_{002} \sigma_1^2, \quad c_{11} = c_{110} - c_{011} \sigma_1 - c_{101} \sigma_2 + 2c_{002} \sigma_1 \sigma_2 \quad (5.12)$$

$$c_{02} = c_{020} - c_{011} \sigma_2 + c_{002} \sigma_2^2$$

Функция \tilde{U} в (5.10) π -периодична относительно q_3^* , $\tilde{U} = O((r_1 + r_2)^3)$.

Уравнения движения на изоэнергетическом уровне $\Gamma^* = 0$ имеют гамильтонову форму (уравнения Уиттекера). Роль функции Гамильтона играет функция U , а роль независимой переменной – координата q_3^* [18]. Полученная таким путем редуцированная система с двумя степенями свободы имеет положение равновесия $r_1 = r_2 = 0$, соответствующее невозмущенному периодическому движению исходной системы с тремя степенями свободы. Если выполняется неравенство

$$c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0 \quad (5.13)$$

то это положение равновесия устойчиво для большинства начальных условий [12, 15]. Но из (5.12) следует, что левая часть последнего неравенства совпадает с левой частью неравенства (5.6).

Теперь проверим совпадение условий формальной устойчивости для исходной и редуцированной систем. Согласно [19], если форма $m(r_1, r_2)$ знакоопределенна при $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, то положение равновесия редуцированной системы формально устойчиво. Но условия знакоопределенности формы $m(r_1, r_2)$ при $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, очевидно, совпадают с условиями того, что система уравнений (5.7) имеет только нулевое решение.

И, наконец, пусть в системе есть резонанс (5.2) четвертого порядка, причем $k_1 k_2 \geq 0$. Тогда к функции U из (5.10) добавится резонансное слагаемое (5.8). При выполнении неравенства

$$|m(k_1, k_2)| < |k_1|^{k_1/2} |k_2|^{k_2/2} \sqrt{\alpha_{k_1 k_2}^2 + \beta_{k_1 k_2}^2} \quad (5.14)$$

положение равновесия редуцированной системы неустойчиво по Ляпунову, а в случае противоположного знака в неравенстве (5.14) имеет место устойчивость в третьем приближении [12]. Но из (5.12) следует, что $m(k_1, k_2) = M(k_1, k_2, -n)$, т.е. неравенства (5.9) и (5.14) совпадают.

5.2. Изоэнергетическая редукция. Алгоритм получения нормальной формы редуцированной системы. Из предыдущего следует, что при получении условий орбитальной устойчивости и неустойчивости вращения спутника можно не проводить нормализацию исходного гамильтониана возмущенного движения (3.2), а ограничиться более простой

задачей получения нормальной формы гамильтониана, описывающего возмущенное движение на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$.

Из последнего равенства получаем $p_3 = -K(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3)$, где K – π -периодическая относительно q_3 функция вида

$$K = K_2 + K_4 + \tilde{K}(q_1, q_2, p_1, p_2, q_3) \tag{5.15}$$

$$K_2 = \varphi_2, \quad K_4 = \varphi_4 - \varphi_2 \Psi_2 + \chi \varphi_2^2 \tag{5.16}$$

Здесь \tilde{K} – совокупность членов выше пятой степени относительно q_1, q_2, p_1, p_2 . Функции $\varphi_2, \Psi_2, \varphi_4, \chi$ определены формулами (3.5)–(3.8). Уравнения движения редуцированной системы имеют вид:

$$\frac{dq_j}{dq_3} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_3} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2) \tag{5.17}$$

При получении нормальной формы гамильтониана K будем проводить нормализацию не самой периодической по q_3 функции (5.15), а отображения, порождаемого системой дифференциальных уравнений (5.17). А уже затем по нормализованному отображению получим соответствующую нормальную форму гамильтониана K .

Пусть $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ ($j = 1, 2$) – начальные значения величин q_j, p_j , а $q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$ – их значения при $q_3 = \pi$. При достаточно малых $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ величины $q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$ будут аналитическими функциями относительно $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}$ и задают отображение T окрестности положения равновесия на себя. Это отображение может быть получено следующим образом. Вместо переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$) введем новые переменные u_j, v_j по формулам

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(q_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

где $\mathbf{X}(q_3)$ – фундаментальная матрица линеаризованной системы (5.17), ее элементы удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.1) и начальным условиям (4.2).

Разложение нового гамильтониана $G(u_1, u_2, v_1, v_2, q_3)$ в ряд по степеням u_1, u_2, v_1, v_2 не содержит членов второй степени:

$$G = G_4 + \dots \tag{5.19}$$

где G_4 – форма K_4 из (5.16), в которой старые переменные выражены через новые по формуле (5.18).

Замена (5.18) приводит задачу о нахождении отображения T к нахождению отображения $q_j^{(0)}, p_j^{(0)} \rightarrow u_j^{(1)}, v_j^{(1)}$ за период изменения q_3 от 0 до π . При этом $q_j^{(0)} = u_j^{(0)}$, $p_j^{(0)} = v_j^{(0)}$, а

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(\pi) \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Отображение $q_j^{(0)}, p_j^{(0)} \rightarrow u_j^{(1)}, v_j^{(1)}$ зададим неявно при помощи равенств

$$q_j^{(0)} = \frac{\partial S}{\partial p_j^{(0)}}, \quad v_j^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial u_j^{(1)}} \quad (j = 1, 2) \quad (5.21)$$

$$S = u_1^{(1)} p_1^{(0)} + u_2^{(1)} p_2^{(0)} + S_4(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) + \dots$$

где S – вычисленная при $q_3 = \pi$ функция

$$\Phi = u_1^{(1)} p_1^{(0)} + u_2^{(1)} p_2^{(0)} + \Phi_4(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, q_3) + \dots \quad (5.22)$$

удовлетворяющая уравнению Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} + G\left(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_1^{(1)}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2^{(1)}}, q_3\right) = 0 \quad (5.23)$$

и начальным условиям $\Phi_k(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, 0) = 0$ ($k = 4, 6, \dots$).

Подставив разложения (5.19), (5.22) в левую часть уравнения (5.23) и приравняв нулю совокупность членов четвертой степени, получим уравнение для формы Φ_4 :

$$\partial \Phi_4 / \partial q_3 = -G_4, \quad G_4 = G_4(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, q_3) \quad (5.24)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}$ в левой и правой частях этого уравнения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов формы Φ_4 . При $q_3 = 0$ значения коэффициентов должны равняться нулю. Так как форма G_4 зависит от элементов матрицы $\mathbf{X}(q_3)$, то эта система должна рассматриваться совместно с системой уравнений (4.1), (4.2). Проинтегрировав получающуюся таким образом систему от $q_3 = 0$ до $q_3 = \pi$, получим функцию S_4 и потом из равенств (5.20), (5.21) найдем явный вид отображения T :

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(\pi) \begin{pmatrix} q_1^{(0)} - \frac{\partial S_4}{\partial p_1^{(0)}} + O_5 \\ q_2^{(0)} - \frac{\partial S_4}{\partial p_2^{(0)}} + O_5 \\ p_1^{(0)} + \frac{\partial S_4}{\partial q_1^{(0)}} + O_5 \\ p_2^{(0)} + \frac{\partial S_4}{\partial q_2^{(0)}} + O_5 \end{pmatrix}, \quad S_4 = S_4(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) \quad (5.25)$$

Здесь через O_5 обозначены члены выше четвертой степени относительно $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ ($j = 1, 2$).

Для получения нормальной формы отображения (5.25) сделаем сначала замену переменных

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

нормализующую его линейную часть. Матрица \mathbf{N} может быть построена следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_k^* = \mathbf{r}_k^* + i\mathbf{s}_k^*$ – какой-либо собственный вектор матрицы $\mathbf{X}(\pi)$, соответствующий мультипликатору $\rho_k = \exp(i\pi\lambda_k)$ ($k = 1, 2$), а g_k – скалярное произведение векторов \mathbf{r}_k^* и $\mathbf{I}\mathbf{s}_k^*$:

$$g_k = (\mathbf{r}_k^*, \mathbf{I}\mathbf{s}_k^*), \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

где \mathbf{E}_2 – единичная матрица второго порядка. Можно показать [12], что величины g_k ($k = 1, 2$) отличны от нуля. Введем обозначения

$$\delta_k = \text{sign } g_k, \quad \sigma_k = \delta_k \lambda_k, \quad d_k = |g_k|^{-1/2} \quad (k = 1, 2)$$

В качестве k -го и $(k + 2)$ -го столбцов матрицы \mathbf{N} примем векторы $d_k \delta_k \mathbf{r}_k^*$ и $d_k \mathbf{s}_k^*$ ($k = 1, 2$) соответственно. Непосредственной проверкой можно убедиться, что так построенная матрица \mathbf{N} симплектическая, а в новых переменных Q_j, P_j ($j = 1, 2$) отображение (5.25) будет таким

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_1^{(0)}} + O_5 \\ Q_2^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_2^{(0)}} + O_5 \\ P_1^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_1^{(0)}} + O_5 \\ P_2^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_2^{(0)}} + O_5 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \pi \sigma_1 & 0 & \sin \pi \sigma_1 & 0 \\ 0 & \cos \pi \sigma_2 & 0 & \sin \pi \sigma_2 \\ -\sin \pi \sigma_1 & 0 & \cos \pi \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sin \pi \sigma_2 & 0 & \cos \pi \sigma_2 \end{pmatrix}$$

где F_4 – это форма S_4 из (5.25), в которой $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ выражены через $Q_j^{(0)}, P_j^{(0)}$ в соответствии с заменой (5.26)

$$F_4 = \sum f_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} Q_1^{(0)\nu_1} Q_2^{(0)\nu_2} P_1^{(0)\mu_1} P_2^{(0)\mu_2} \quad (5.28)$$

Здесь и далее при использовании аналогичных представлений для форм четвертой степени суммирование производится по целым неотрицательным числам $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$, сумма которых равна четырем.

Нормализацию членов третьей степени в отображении удобнее провести в комплексных переменных. Сделаем в (5.27) унивалентное каноническое преобразование $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2$ по формулам

$$Q_k = 1/2(1+i)(x_k + y_k), \quad P_k = -1/2(1-i)(x_k - y_k) \quad (k = 1, 2) \quad (5.29)$$

В комплексных переменных x_k, y_k отображение (5.27) принимает следующий вид:

$$x_k^{(1)} = \rho_k \left(x_k^{(0)} - \frac{\partial F_4^*}{\partial y_k^{(0)}} + O_5 \right), \quad y_k^{(1)} = \rho_{k+2} \left(y_k^{(0)} + \frac{\partial F_4^*}{\partial x_k^{(0)}} + O_5 \right) \quad (k = 1, 2) \quad (5.30)$$

$$\rho_k = \exp(i\pi\sigma_k), \quad \rho_{k+2} = \exp(-i\pi\sigma_k) \quad (5.31)$$

где F_4^* – форма (5.28), в которой $Q_j^{(0)}, P_j^{(0)}$ выражены через $x_j^{(0)}, y_j^{(0)}$ по формулам (5.29):

$$F_4^* = \sum f_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^* x_1^{(0)\nu_1} x_2^{(0)\nu_2} y_1^{(0)\mu_1} y_2^{(0)\mu_2} \quad (5.32)$$

Коэффициенты $f_{2020}^*, f_{1111}^*, f_{0202}^*$ вещественны

$$\begin{aligned} f_{2020}^* &= -1/2(3f_{4000} + f_{2020} + 3f_{0040}), & f_{1111}^* &= -(f_{2200} + f_{2002} + f_{0220} + f_{0022}) \\ f_{0202}^* &= -1/2(3f_{0400} + f_{0202} + 3f_{0004}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Остальные, нужные для получения нормальной формы отображения, коэффициенты формы F_4^* являются попарно комплексно сопряженными

$$\begin{aligned} f_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^* &= 1/4(a_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} + ib_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}), & f_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2}^* &= 1/4(a_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} - ib_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}) \\ a_{4000} &= f_{2020} - f_{4000} - f_{0040}, & b_{4000} &= f_{1030} - f_{3010}, & a_{0400} &= f_{0202} - f_{0400} - f_{0004} \\ b_{0400} &= f_{0103} - f_{0301}, & a_{2200} &= f_{1111} - f_{2200} + f_{2002} - f_{0022} + f_{0220} \\ b_{2200} &= f_{1012} - f_{1210} + f_{0121} - f_{2101}, & a_{1300} &= f_{0211} + f_{1102} - f_{1300} - f_{0013} \\ b_{1300} &= f_{0112} + f_{1003} - f_{1201} - f_{0310}, & a_{3100} &= f_{2011} + f_{1120} - f_{3100} - f_{0031} \\ b_{3100} &= f_{1021} + f_{0130} - f_{2110} - f_{3001} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Вместо переменных x_j, y_j ($j = 1, 2$) введем новые переменные ξ_j, η_j при помощи канонического преобразования $x_j, y_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$, задаваемого неявно равенствами

$$y_j = \eta_j + \frac{\partial R_4}{\partial x_j}, \quad \xi_j = x_j + \frac{\partial R_4}{\partial \eta_j} \quad (j = 1, 2)$$

$$R_4 = R_4(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = \sum r_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \eta_1^{\mu_1} \eta_2^{\mu_2}$$

В новых переменных отображение (5.30) принимает вид

$$\xi_k^{(1)} = \rho_k \left(\xi_k^{(0)} - \frac{\partial W_4}{\partial \eta_k^{(0)}} + O_5 \right), \quad \eta_k^{(1)} = \rho_{k+2} \left(\eta_k^{(0)} + \frac{\partial W_4}{\partial \xi_k^{(0)}} + O_5 \right) \quad (k = 1, 2) \quad (5.35)$$

$$W_4 = F_4^*(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) + R_4(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) - R_4(\rho_1 \xi_1^{(0)}, \rho_2 \xi_2^{(0)}, \rho_3 \eta_1^{(0)}, \rho_4 \eta_2^{(0)})$$

Если представить форму W_4 в виде суммы

$$W_4 = \sum w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} \xi_1^{(0)v_1} \xi_2^{(0)v_2} \eta_1^{(0)\mu_1} \eta_2^{(0)\mu_2}$$

то для ее коэффициентов имеем такие выражения

$$w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} = f_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}^* + \left(1 - e^{i n l_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}} \right) r_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$$

$$l_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} = (v_1 - \mu_1) \sigma_1 + (v_2 - \mu_2) \sigma_2$$

Отсюда следует, что, если нет резонанса четвертого порядка, то выбором коэффициентов $r_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$ можно в функции W_4 уничтожить все одночлены, кроме тех, для которых $v_1 = \mu_1, v_2 = \mu_2$. Нормализованное в членах третьей степени отображение запишется в виде равенств (5.35), в которых

$$W_4 = f_{2020}^* \xi_1^{(0)2} \eta_1^{(0)2} + f_{1111}^* \xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} + f_{0202}^* \xi_2^{(0)2} \eta_2^{(0)2} \quad (5.36)$$

Пусть теперь в системе есть резонанс (5.2) четвертого порядка. Ограничимся рассмотрением только таких резонансов, для которых числа k_1 и k_2 неотрицательны:

$$4\sigma_1 = n, \quad 4\sigma_2 = n, \quad 2(\sigma_1 + \sigma_2) = n, \quad \sigma_1 + 3\sigma_2 = n, \quad 3\sigma_1 + \sigma_2 = n \quad (5.37)$$

В изучаемой конкретной задаче об устойчивости вращения спутника, в силу π -периодичности функции (5.15) по q_3 , целое число n в резонансных соотношениях (5.37) будет четным.

Для каждого из резонансов (5.37) в нормализованном отображении (5.35) форма W_4 , помимо одночленов (5.36), будет содержать еще два одночлена

$$f_{k_1 k_2 00}^* \xi_1^{(0)k_1} \xi_2^{(0)k_2} + f_{00 k_1 k_2}^* \eta_1^{(0)k_1} \eta_2^{(0)k_2}$$

характерных для данного конкретного резонанса.

По нормализованному отображению можно найти соответствующую π -периодическую по q_3 нормальную форму $Z(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, q_3)$ функции Гамильтона (5.15). Если нет резонансов четвертого порядка, то

$$Z = i\sigma_1 \xi_1 \eta_1 + i\sigma_2 \xi_2 \eta_2 - \frac{1}{\pi} (f_{2020}^* \xi_1^2 \eta_1^2 + f_{1111}^* \xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 + f_{0202}^* \xi_2^2 \eta_2^2) + O_6 \quad (5.38)$$

где O_6 – члены выше пятой степени относительно $\xi_j, \eta_j (j = 1, 2)$. При наличии резонанса четвертого порядка (5.37) к функции Z из (5.38) добавляются резонансные члены

$$-\frac{1}{\pi} (f_{k_1 k_2 00}^* e^{-i n q_3} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} + f_{00 k_1 k_2}^* e^{i n q_3} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2})$$

Перейдем от комплексных переменных ξ_j, η_j к вещественным канонически сопряженным переменным r_j, Φ_j , вводимым при помощи канонического унивалентного преобразования

$$\xi_j = -\frac{(1+i)}{2}\sqrt{2r_j}e^{i\Phi_j}, \quad \eta_j = \frac{(1+i)}{2}\sqrt{2r_j}e^{-i\Phi_j} \quad (j = 1, 2)$$

При отсутствии резонансов четвертого порядка нормализованный гамильтониан в новых переменных запишется в виде:

$$U = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^3) \quad (5.39)$$

а при наличии одного из резонансов (5.37):

$$U = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} (\alpha_{k_1 k_2} \sin \gamma + \beta_{k_1 k_2} \cos \gamma) + O((r_1 + r_2)^3) \quad (5.40)$$

$$c_{20} = \frac{1}{\pi} f_{2020}^*, \quad c_{11} = \frac{1}{\pi} f_{1111}^*, \quad c_{02} = \frac{1}{\pi} c_{0202}^* \quad (5.41)$$

$$\alpha_{k_1 k_2} = -\frac{1}{2\pi} b_{k_1 k_2 00}, \quad \beta_{k_1 k_2} = \frac{1}{2\pi} a_{k_1 k_2 00}, \quad \gamma = k_1 \Phi_1 + k_2 \Phi_2 - n q_3 \quad (5.42)$$

Подсчитав коэффициенты нормальной формы по формулам (5.33), (5.34) и (5.41), (5.42), можно на основании условий, сформулированных в п. 5.1, сделать выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости плоских вращений спутника.

5.3. Результаты нелинейного анализа. Сначала рассмотрим области $G_{1,k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), отвечающие прямым вращениям. В этих областях существует пятнадцать кривых, на которых реализуются резонансы четвертого порядка. Они начинаются в точках $(0, b_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 15$) оси $a = 0$, при $a > 0$ кривые остаются в соответствующей области $G_{1,k}$ устойчивости в первом приближении и оканчиваются на прямой $a = 3$. Занумеруем резонансные соотношения и соответствующие им резонансные кривые в порядке убывания величин b_i .

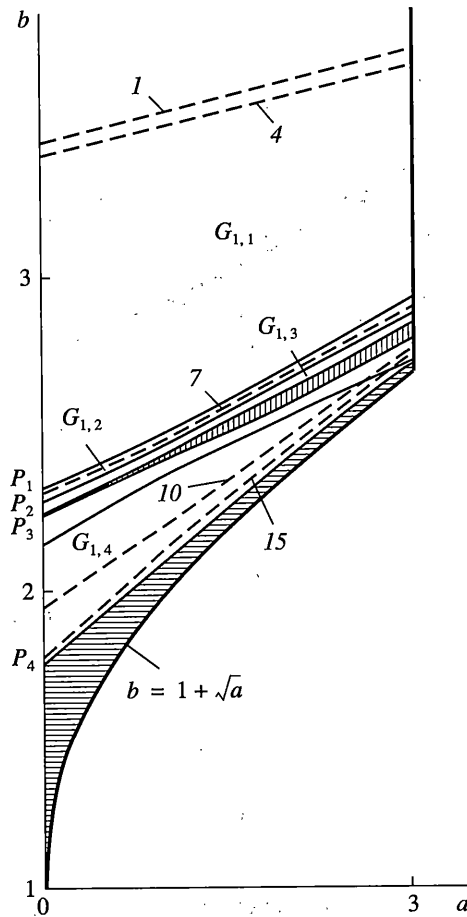
В области $G_{1,1}$ существует шесть резонансов: (1) $4\sigma_1 = 10$ ($b_1 = 3.434$); (2) $3\sigma_1 + \sigma_2 = 8$ ($b_2 = 3.420$); (3); $2(\sigma_1 + \sigma_2) = 6$ ($b_3 = 3.406$); (4) $\sigma_1 + 3\sigma_2 = 4$ ($b_4 = 3.391$); (5) $4\sigma_2 = 2$ ($b_5 = 3.376$); (6) $3\sigma_1 - \sigma_2 = 8$ ($b_6 = 2.358$).

В каждой из областей $G_{1,2}$ и $G_{1,3}$ существует по одной резонансной кривой: (7) $3\sigma_1 + \sigma_2 = 10$ ($b_7 = 2.305$) и (8) $\sigma_1 + 3\sigma_2 = 6$ ($b_8 = 2.265$).

Остальные семь резонансов реализуются на кривых, лежащих в области $G_{1,4}$: (9) $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ ($b_9 = 2.198$); (10) $4\sigma_1 = 14$ ($b_{10} = 1.930$); (11) $3\sigma_1 + \sigma_2 = 12$ ($b_{11} = 1.910$); (12) $2(\sigma_1 + \sigma_2) = 10$ ($b_{12} = 1.888$); (13) $\sigma_1 + 3\sigma_2 = 8$ ($b_{13} = 1.865$); (14) $4\sigma_2 = 6$ ($b_{14} = 1.840$); (15) $3\sigma_1 - \sigma_2 = 10$ ($b_{15} = 1.764$).

Вычисления по алгоритму п. 5.2 показали, что на всех резонансных кривых, кроме кривых 4, 7 и 10, прямые вращения спутника орбитально устойчивы в третьем приближении. На кривых 4, 7 и 10 тоже имеет место устойчивость в третьем приближении за исключением небольших отрезков, внутри которых выполняется неравенство (5.14) и, следовательно, вращения спутника орбитально неустойчивы. Граничными точками интервала неустойчивости на кривой 4 являются точки (1.3895, 3.5924) и (1.3905, 3.5927), на кривой 7 – точки (1.2380, 2.6197) и (1.2405, 2.6210), на кривой 10 – точки (1.5735, 2.6471) и (1.5737, 2.6473).

Можно также утверждать, что на резонансных кривых 6, 9 и 15 при отсутствии других резонансов (шестого, восьмого и т.д. порядков) с одинаковыми знаками k_1 и k_2 в соотношении (5.2) имеет место формальная устойчивость [17].

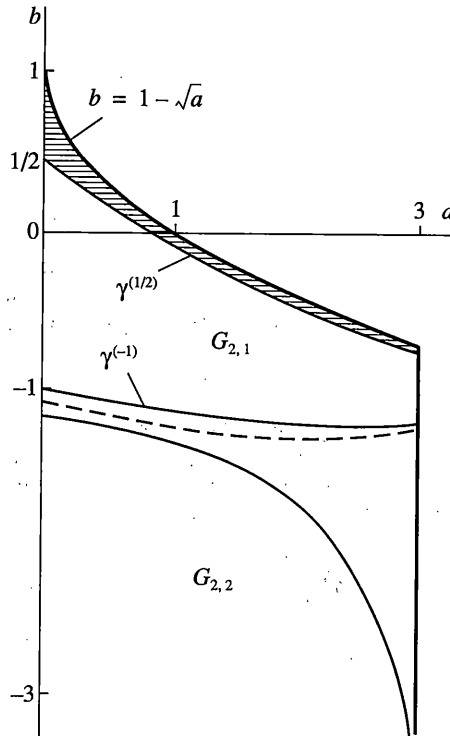


Фиг. 5

На фиг. 5 штриховыми линиями изображены только пять из пятнадцати резонансных кривых: кривая 1 (выше этой кривой нет резонансов четвертого порядка), кривая 15 (ниже этой кривой в области $G_{1,4}$ нет резонансов четвертого порядка), и кривые $4, 7$ и 10 , на которых есть упомянутые выше интервалы неустойчивости. Сами интервалы, ввиду их малости, на фиг. 5 не показаны.

Теперь рассмотрим значения параметров a и b , не принадлежащие кривым $1-15$ резонансов четвертого порядка. Вычисления (они проводились для $b \leq 10$) показали, что для таких значений параметров выполняется условие (5.13) и, следовательно, прямые вращения спутника орбитально устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

Для нерезонансных значений параметров a и b был также рассмотрен вопрос о формальной устойчивости. На фиг. 5 в области $G_{1,4}$ сплошной линией показана кривая, на которой обращается в нуль коэффициент c_{20} формы $m(r_1, r_2)$ из (5.11). Вычисления показали, что в части области $G_{1,4}$, лежащей ниже этой кривой вне кривых резонансов четвертого порядка, коэффициенты c_{20} , c_{11} , c_{02} формы $m(r_1, r_2)$ положительны. Следовательно в этой части области $G_{1,4}$ прямые вращения спутника формально орбитально устойчивы.



Фиг. 6

Результаты нелинейного исследования орбитальной устойчивости обратных вращений спутника представлены на фиг. 6. Как отмечалось в п. 4.3, в области $G_{2,1}$ эти вращения неустойчивы, что устанавливается в результате анализа линейной задачи. В области $G_{2,2}$ устойчивости в первом приближении требуется нелинейное исследование.

Оказалось, что в области $G_{2,2}$ возможен только один резонанс четвертого порядка $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 2$. Соответствующая ему резонансная кривая изображена на фиг. 6 штриховой линией. Она начинается в точке $(0, -1.041)$ и при $a > 0$ проходит вблизи границы области $G_{2,2}$. Вычисления (они проводились при $b \geq -10$) показали, что для значений параметров a, b из области $G_{2,2}$, не лежащих на этой кривой, коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} формы $m(r_1, r_2)$ из (5.11) отрицательны. Следовательно форма $m(r_1, r_2)$ определенно отрицательна при $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ и имеет место формальная орбитальная устойчивость. На самой кривой $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 2$ также будет формальная устойчивость (если нет других резонансов четного порядка с одинаковыми знаками чисел k_1 и k_2 в соотношении (5.2)).

Вычисления также показали, что для нерезонансных значений параметров a и b имеет место орбитальная устойчивость для большинства начальных условий. Исключение могут составлять только те значения параметров, которые лежат на кривой $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 0$. Эта кривая на фиг. 6 изображена в области $G_{2,2}$ сплошной линией.

6. Об устойчивости вращения спутника с заданной средней угловой скоростью. Разложение функции φ^* , описывающей невозмущенное вращение спутника (2.2), в ряд Фурье имеет вид [20]:

$$\varphi^* = \Omega \omega_0 t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin(2n\Omega\omega_0 t) \quad (6.1)$$

$$\Omega = \pm \omega = \frac{\pi(b-1)}{2K(k)}, \quad q = \exp(-\pi K(k')/K(k)), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

где Ω – отношение средней угловой скорости вращения спутника в орбитальной системе координат к угловой скорости ω_0 движения его центра масс по орбите.

Используя результаты п. 4, 5 по исследованию устойчивости плоских вращений спутника при произвольных значениях параметров a и b , рассмотрим здесь частные случаи, когда параметры a и b таковы, что средняя угловая скорость вращения спутника имеет заданное значение

$$\Omega = m \quad (6.2)$$

где m – целое число ($m \neq 0$). В этих частных случаях спутник за время одного оборота по орбите поворачивается в абсолютном пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты на угол $2\pi(m+1)$.

Соотношения (6.2) задают счетное множество кривых в плоскости a, b . Ни одна из кривых этого множества не попадает в те части области допустимых значений параметров, которые исключены из рассмотрения в п. 4, 5 (на фиг. 4–7 отмечены горизонтальной штриховкой). При малых значениях параметра a кривая (6.2) задается уравнением

$$b = m + 1 + \frac{a}{4m} + \frac{a^2}{64m^3} - \frac{a^3}{256m^5} + O(a^4)$$

При больших значениях $|m|$ и произвольных значениях a из интервала $0 < a < 3$ кривая (6.2) мало отличается от прямой $b = m + 1$.

Кривые (6.2) при положительных m лежат в областях орбитальной устойчивости в первом приближении прямых вращений спутника: кривая $\Omega = 1$ лежит в области $G_{1,4}$, а остальные кривые – в области $G_{1,1}$. Ни одна из кривых (6.2) при положительных m не пересекается с кривыми резонансов четвертого порядка.

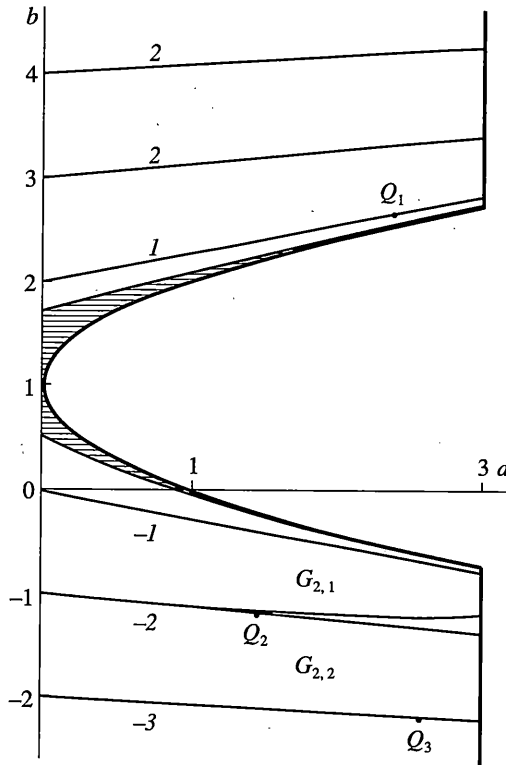
Кривая $\Omega = -1$ лежит в области $G_{2,1}$ орбитальной неустойчивости обратных вращений спутника, остальные кривые (6.2) при отрицательных m лежат в области $G_{2,2}$ орбитальной устойчивости обратных вращений в первом приближении.

На фиг. 7 изображены только шесть из кривых (6.2), для них $|m| \leq 3$. Число у кривой указывает на значение m в уравнении (6.2). Сформулируем выводы об устойчивости вращений спутника для значений параметров a и b , лежащих на этих кривых.

На кривых $\Omega = 1$, $\Omega = 2$ и $\Omega = 3$ прямые вращения спутника орбитально устойчивы для большинства начальных условий. Кривая $\Omega = 1$ пересекает кривую $c_{20} = 0$ в точке $Q_1(2.409, 2.637)$. На участке этой кривой, лежащем между точками $(0, 2)$ и Q_1 прямые вращения спутника будут еще и формально орбитально устойчивыми.

На кривой $\Omega = -1$ обратные вращения спутника соответствуют такому движению, когда спутник в абсолютном пространстве совершает колебания вокруг нормали к плоскости орбиты с периодом, равным периоду обращения центра масс по орбите. Так как кривая $\Omega = -1$ лежит в области $G_{2,1}$, то эти колебания орбитально неустойчивы.

Кривая $\Omega = -2$ пересекает резонансную кривую $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 2$ в точке $Q_2(1.537, -1.196)$, а с кривой $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 0$ у нее пересечений нет. Поэтому на всей кривой $\Omega = -2$, кроме, быть может, точки Q_2 , имеет место устойчивость для большинства начальных условий, а также и формальная устойчивость.



Фиг. 7

Кривая $\Omega = -3$ пересекает кривую $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 0$ в точке $Q_3 (2.551, -2.216)$. Всюду на этой кривой обратные вращения спутника формально орбитально устойчивы, а если исключить точку Q_3 , то и орбитально устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (НШ - 1477.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М: Наука, 1965. 416 с.
2. Kane T.R., Shippy D.J. Attitude stability of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit // J. Astronaut. Sci. 1963. V. 10. № 4. P. 114-119.
3. Kane T.R. Attitude stability of Earth - pointing satellites // AIAA Journal. 1965. V. 3. № 4. P. 726-731.
4. Meirovitch L., Wallace F. Attitude instability regions of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit // J. Astronaut. Sci. 1967. V. 14. № 3. P. 123-133.
5. Сидоренко В.В., Нейштадт А.И. Исследование устойчивости долгопериодических плоских движений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 2000. Т. 38. № 3. С. 307-321.
6. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322-336.

7. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Исследование устойчивости плоских периодических движений спутника на круговой орбите // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 46–57.
8. Markeev A.P., Bardin B.S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // *Celest. Mech. and Dynam. Astronomy*. 2003. V. 85. № 1. P. 51–66.
9. Маркеев А.П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т.66. Вып. 6. С. 929–938.
10. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
12. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
13. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
14. Giacaglia G.E.O. *Perturbation Methods in Non – Linear Systems*. Berlin etc.: Springer, 1972 = Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
16. Маркеев А.П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 753–757.
17. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
18. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 592 с.
19. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.*. 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.
20. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.10.2004