МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 539.384

© 2006 г. Д.Д. ИВЛЕВ, Л.А. МАКСИМОВА

К ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Рассматривается предельное статически определимое состояние изотропного деформируемого твердого тела, отличное от условия полной пластичности. Предполагается, что главные напряжения фиксированы. Неизвестными являются три величины, определяющие ориентацию главных напряжений в декартовой системе координат. Показано, что система уравнений для напряжений и скоростей перемещений принадлежит к гиперболическому типу, направления главных напряжений и скоростей перемещений являются характеристическими.

1. Статически определимое состояние деформируемого тела имеет место, когда наряду с уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \ (xyz) \tag{1.1}$$

имеют место три соотношения:

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.2}$$

где σ_x, σ_y, σ_z – нормальные, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} – касательные напряжения в декартовой системе координат xyz. Символ (xyz) означает, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов.

Соотношения связи между компонентами напряжений σ_{ij} и главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \ (xyz, 123) \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию ортогональных осей координат xyz направлений главных напряжений 1, 2, 3.

Имеет место равенство

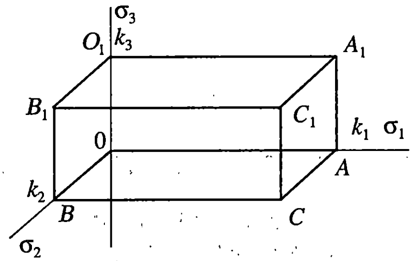
$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Из (1.2), (1.3) получим

$$\begin{aligned} & f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i) = 0 \\ & f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i) = 0, \quad f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, l_i, m_i, n_i) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для изотропного тела условия предельного состояния (1.5) не зависят от направляющих косинусов l_i, m_i, n_i:

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{1.6}$$



Из трех независимых соотношений (1.6) следуют условия предельного статически определимого состояния

$$\sigma_1 = \text{const}, \quad \sigma_2 = \text{const}, \quad \sigma_3 = \text{const} \tag{1.7}$$

Другой случай статической определимости имеет место при условии полного предельного состояния при условии полной пластичности [1]:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = f(\sigma_1) \tag{1.8}$$

В дальнейшем ограничимся случаем

$$0 \le \sigma_1 \le k_1, \quad 0 \le \sigma_2 \le k_2, \quad 0 \le \sigma_3 \le k_3 \ (k_i - \text{const}) \tag{1.9}$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{i} + \sigma_2 \mathbf{j} + \sigma_3 \mathbf{k} \tag{1.10}$$

Очевидно, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ (1.10) определен в ограниченном трехмерном пространстве (фигура).

Предположим, что

$$\sigma_1 = k_1, \quad \sigma_2 < k_2, \quad \sigma_3 < k_3 \tag{1.11}$$

При выполнении условий (1.11) вектор напряжений (1.10) достигает грани AA_1C_1C (фигура).

Инварианты тензора напряжений σ_{ij} имеют вид

$$\Sigma_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = k_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma$$

$$\Sigma_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = -[k_1(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3] \tag{1.12}$$

$$\Sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = k_1\sigma_2\sigma_3$$

Из (1.12) следует условие предельного состояния

$$f_1(\sigma_{ij}) = \Sigma_3 + k_1\Sigma_2 + 3k_1^2\sigma - k_1^3 = 0 \tag{1.13}$$

соответствующее грани AA_1C_1C.

Компоненты скорости деформации могут быть определены из (1.13) согласно соотношениям ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \partial f_1 / \partial \sigma_{ij}, \quad \lambda \ge 0 \tag{1.14}$$

Предположим, что

$$\sigma_1 = k_1, \quad \sigma_2 = k_2, \quad \sigma_3 < k_3 \tag{1.15}$$

При выполнении условий (1.15) вектор напряжений (1.10) достигает ребра CC_1. Согласно (1.15):

$$\Sigma_1 = k_1 + k_2 + \sigma_3, \quad \Sigma_2 = -[k_1k_2 + \sigma_3(k_1 + k_2)], \quad \Sigma_3 = k_1k_2\sigma_3 \tag{1.16}$$

Из (1.16) следуют два условия предельного состояния

$$\Sigma_1 - (k_1 + k_2) = -\frac{\Sigma_2 + k_1k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\Sigma_3}{k_1k_2} \tag{1.17}$$

Согласно (1.17), условия предельного состояния, соответствующие ребру CC_1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= [\Sigma_1 - (k_1 + k_2)](k_1 + k_2) + \Sigma_2 + k_1k_2 = 0 \\ f_2(\sigma_{ij}) &= [\Sigma_1 - (k_1 + k_2)]k_1k_2 - \Sigma_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Компоненты скорости деформации ε_{ij} могут быть определены из (1.18) согласно соотношениям обобщенного ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \tag{1.19}$$

Предположим, что имеет место предельное статически определимое состояние

$$\sigma_1 = k_1, \ \sigma_2 = k_2, \quad \sigma_3 = k_3 \tag{1.20}$$

Согласно (1.20) будем иметь условия предельного состояния, соответствующие достижению вектором $\boldsymbol{\sigma}$ точки C_1:

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) &= \Sigma_1 = k_1 + k_2 + k_3 = K_1 \\ f_2(\sigma_{ij}) &= \Sigma_2 = -(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) = K_2 \\ f_3(\sigma_{ij}) &= \Sigma_3 = k_1k_2k_3 = K_3 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Компоненты скорости деформации ε_{ij} могут быть определены из (1.21) согласно соотношениям обобщенного ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}} + \lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.22}$$

2. Рассмотрим свойства соотношений, определяющих предельное статически определимое состояние при условиях (1.7). Согласно (1.3), (1.4), (1.20) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= k_1 + (k_2 - k_1)m_1^2 + (k_3 - k_1)n_1^2 \\ \tau_{xy} &= (k_2 - k_1)m_1m_2 + (k_3 - k_1)n_1n_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим

$$(k_2 - k_1)m_1^2 = M_1^2, \quad (k_3 - k_1)n_1^2 = N_1^2 \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= k_1 + M_1^2 + N_1^2 \\ \tau_{xy} &= M_1 M_2 + N_1 N_2 \ (xyz, 123)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Согласно (2.3), уравнения равновесия (1.1) примут вид

$$\begin{aligned}&2M_1\frac{\partial M_1}{\partial x} + M_2\frac{\partial M_1}{\partial y} + M_1\frac{\partial M_2}{\partial y} + M_3\frac{\partial M_1}{\partial z} + M_1\frac{\partial M_3}{\partial z} + \\ &+ 2N_1\frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2\frac{\partial N_1}{\partial y} + N_1\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3\frac{\partial N_1}{\partial z} + N_1\frac{\partial N_3}{\partial z} = 0 \ (xyz, 123)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Согласно (1.4), (2.2), к трем уравнениям равновесия (2.4) следует присоединить три условия:

$$\begin{aligned}M_1^2 + M_2^2 + M_3^3 &= (k_2 - k_1)^2 \\ N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 &= (k_3 - k_1)^2 \\ M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 &= 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Система шести уравнений (2.4), (2.5), относительно шести неизвестных M_i, N_i является замкнутой. Обозначим через

$$\Psi(x, y, z) = 0 \tag{2.6}$$

уравнение характеристической поверхности. Вектор нормали к характеристической поверхности (2.6) имеет вид:

$$\operatorname{grad}\Psi = \Psi_x \mathbf{i} + \Psi_y \mathbf{j} + \Psi_z \mathbf{k}, \quad \Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \Psi_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{2.7}$$

Обозначим единичные вектора, направленные по главным направлениям

$$\mathbf{l} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + m_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k} \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.4), (2.5) принадлежит к гиперболическому типу, уравнение характеристических многообразий имеет вид

$$(\operatorname{grad}\Psi \cdot \mathbf{l})(\operatorname{grad}\Psi \cdot \mathbf{m})(\operatorname{grad}\Psi \cdot \mathbf{n}) = 0 \tag{2.9}$$

или

$$(\Psi_x l_1 + \Psi_y l_2 + \Psi_z l_3)(\Psi_x m_1 + \Psi_y m_2 + \Psi_z m_3)(\Psi_x n_1 + \Psi_y n_2 + \Psi_z n_3) = 0 \tag{2.10}$$

Согласно (2.9), (2.10), направления главных напряжений являются характеристическими, траектории главных напряжений лежат на характеристических поверхностях.

3. Для определения поля скоростей перемещений воспользуемся условием изотропии [2]:

$$\sigma_x \varepsilon_{xy} + \tau_{xy}\varepsilon_y + \tau_{xz}\varepsilon_{yz} = \varepsilon_x \tau_{xy} + \varepsilon_{xy}\sigma_y + \varepsilon_{xz}\tau_{yz} \ (xyz) \tag{3.1}$$

Переходя в уравнениях (3.1) к компонентам скоростей перемещений u, v, w по формулам Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \ (xyz, uvw) \tag{3.2}$$

и используя соотношения (2.4), получим систему трех уравнений относительно трех неизвестных $u\upsilon w$:

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)(M_1M_2+N_1N_2)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)(M_1^2-M_2^2+N_1^2-N_2^2)+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)(M_2M_3+N_2N_3)-\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)(M_1M_3+N_1N_3) = 0 \; (xyz, 123, u\upsilon w) \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.3) принадлежит к гиперболическому типу, а уравнение характеристических поверхностей имеет вид (2.9), (2.10). Таким образом, характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное (2.4), (2.5) и деформированное (3.3) состояния, совпадают между собой.

4. Рассмотрим линеаризированные уравнения в случае предельного статически определимого состояния (1.20). Линеаризированные уравнения в случае полного предельного состояния рассмотрены в [3].

Компонентам начального состояния припишем индекс градус, а компонентам возмущенного состояния – индекс "штрих". Положим

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}' \\ \sigma_x^0 = k_1, \quad l_1^0 = 1, \quad l_2^0 = l_3^0 = 0 \\ \sigma_y^0 = k_2, \quad m_2^0 = 1, \quad m_1^0 = m_3^0 = 0 \\ \sigma_z^0 = k_3, \quad n_3^0 = 1, \quad n_1^0 = n_2^0 = 0 \\ \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xz}^0 = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Из соотношений (1.3), (4.1) найдем

$$\sigma_x' = \sigma_1' = \sigma_y' = \sigma_2' = \sigma_z' = \sigma_3' = 0, \quad \tau_{xy}', \tau_{xz}', \tau_{yz}' \neq 0 \tag{4.2}$$

Из уравнений равновесия (1.1), а также из (4.1), (4.2) получим

$$\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}'}{\partial y} = 0 \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}'}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}'}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}'}{\partial x\partial z} = 0 \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) найдем

$$\begin{gathered}\tau_{xy}' = \frac{\partial}{\partial z}(U_2-U_1), \quad \tau_{yz}' = \frac{\partial}{\partial x}(U_3-U_2), \quad \tau_{xz}' = \frac{\partial}{\partial y}(U_1-U_3) \\ U_1 = U_1(y,z), \quad U_2 = U_2(x,z), \quad U_3 = U_3(x,y)\end{gathered} \tag{4.5}$$

Положим далее

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0+\varepsilon_{ij}', \quad u = u^0+u', \quad \upsilon = \upsilon^0+\upsilon', \quad w = w^0+w' \\ \varepsilon_{xy}^0 = \varepsilon_{yz}^0 = \varepsilon_{xz}^0 = 0\end{gathered} \tag{4.6}$$

Воспользуемся соотношениями изотропии (2.10). Из (3.1), (3.2), (4.1), (4.6) получим

$$\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x} = 2c\tau'_{xy}, \quad c = \frac{\varepsilon_x^0-\varepsilon_y^0}{k_1-k_2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y} = 2a\tau'_{yz}, \quad a = \frac{\varepsilon_y^0-\varepsilon_z^0}{k_2-k_3} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial z} = 2b\tau'_{xz}, \quad b = \frac{\varepsilon_z^0-\varepsilon_x^0}{k_3-k_1}$$

Если подставить в соответствие

$$u' \leftrightarrow \tau'_{yz}, \quad v' \leftrightarrow \tau'_{xz}, \quad w' \leftrightarrow \tau'_{xy} \tag{4.8}$$

то левые части уравнений (4.3), (4.7) совпадут. Следовательно, для однородной системы уравнений (4.7) при $\varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \varepsilon_z^0$, $a = b = c = 0$, вид решений для компонент u', v', w' будет определяться соотношениями, вполне аналогично (4.5).

Из (4.7) следуют уравнения

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y\partial z} = c\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial z}+b\frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial y}-a\frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial z} = a\frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial x}+c\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial z}-b\frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial y} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial y} = b\frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial y}+a\frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial x}-c\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial z}$$

где правые части определяются согласно (4.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
3. *Максимова Л.А.* О линеаризированных уравнениях пространственных течений идеально-пластических тел // Докл. РАН. 1998. Т. 385. № 6. С. 772–773.

Москва, Чебоксары

Поступила в редакцию 20.12.2004