МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 531.36

© 2006 г. Б.Н. СОКОЛОВ

ОГРАНИЧЕННОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Предлагается способ построения геометрически ограниченного позиционного управления линейной динамической системой с произвольным числом степеней свободы, переводящего систему из произвольного начального положения в начало координат за конечное время. Метод основан на декомпозиции [1] системы на линейные одномерные модели и отличается от предложенного в [2] тем, что не накладывает какие-либо ограничения на область начальных состояний системы.

Рассматривается управляемая голономная механическая система, движение которой в окрестности положения равновесия описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q \tag{1}$$

Здесь M – положительно определенная матрица масс, B и C – неотрицательные матрицы вязкости и упругой энергии соответственно, q и Q – n-мерные векторы обобщенных координат и сил соответственно. Предполагается, что компоненты Q_i вектора обобщенных сил стеснены геометрическими ограничениями

$$Q\colon\quad |Q_i| \le Q_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Ставится следующая задача. Выбором допустимых обобщенных сил (2) перевести за конечное время систему (1) из произвольного исходного положения в начало координат.

Невырожденным преобразованием $q = Gx$ систему (1) можно привести к виду

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} D_{ij}\dot{x}_j + \Lambda_{ii}x_i = u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

где D_{ij} – компоненты матрицы $D = G^TBG$ и $0 \le \Lambda_{ii}$ – компоненты диагональной матрицы $\Lambda = G^TCG$, вектор управления $u(t) = G^TQ$. Наложим на вектор управления покомпонентные ограничения

$$u(t)\colon\quad |u_i| \le u_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

и выберем константы u_i^0 так, чтобы компоненты вектора $Q = (G^{-1})^Tu$ удовлетворяли неравенствам (2) при любых допустимых неравенствами (4) значениях $u_i(t)$. Для этого достаточно выполнения системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}u_j^0 \le Q_i^0, \quad u_j^0 \ge 0 \tag{5}$$

Здесь $g_{ij} = \left|(G^T)_{ij}^{-1}\right|$ – абсолютная величина компоненты ij матрицы $(G^T)^{-1}$. Система неравенств (5) неоднозначно определяет значения u_j^0. Для однозначности необходимо наложить дополнительные условия на значения u_j^0, например, потребовать, чтобы взвешенная сумма $\sum_{i=1}^{n} d_i u_i^0$ принимала максимальное значение на множестве (5). В этом случае приходим к задаче линейного программирования. Можно положить $u_i^0 = d_i\xi$, $d_i > 0$, где ξ – параметр. Тогда максимальное значение ξ, допустимое неравенствами (5), определяется соотношением

$$\xi^* = \min_k Q_k^0 \left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj} d_j \right)^{-1}, \quad u_i^0 = d_i \xi^* \tag{6}$$

Введение покомпонентных ограничений позволяет провести декомпозицию системы (3) на совокупность подсистем второго порядка и управлять каждой подсистемой в отдельности. При заданных начальных условиях коэффициенты d_i следует искать из условия одновременного обращения в нуль обобщенных координат и скоростей всех подсистем. Поставим в соответствие уравнению (3) следующие n уравнений второго порядка:

$$\ddot{y}_i + \Lambda_{ii} y_i = u_i^0 \upsilon_i(y_i, \dot{y}_i), \quad |\upsilon_i(y_i, \dot{y}_i)| \le 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

и определим позиционное управление $\upsilon_i(y_i, \dot{y}_i)$ из условия наискорейшего перевода системы (7) из произвольного начального положения $(y_i^0, \dot{y}_i^0)$ в начало координат. Такое управление известно [3, 4].

Утверждение. Управление

$$u_i(x_i, \dot{x}_i) = u_i^0 \upsilon_i(x_i, \dot{x}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

переводит систему (3) из произвольного начального положения в начало координат за конечное время.

Доказательство проведем в два этапа. Сначала покажем, что управление (8) доставляет системе (3) асимптотическую устойчивость в целом. Рассмотрим функцию

$$S(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_{ii} \neq 0} \left(\dot{x}_i^2 + \Lambda_{ii}(x_i + \Lambda_{ii}^{-1} u_i^0 \operatorname{sign} x_i)^2\right) + \sum_{\Lambda_{ii} = 0} \left(\dot{x}_i^2/2 + |x_i| u_i^0\right)$$

где $S(x, \dot{x})$ – выпуклая положительно определенная функция с изолированной точкой минимума в начале координат. Ее производная в силу системы (3) при определенном выше управлении (8) имеет вид:

$$\frac{dS(x, \dot{x})}{dt} = -(D\dot{x}, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i u_i^0 (\upsilon_i(x_i, \dot{x}_i) + \operatorname{sign} x_i) \le 0 \tag{9}$$

Первое слагаемое с учетом знака – неположительно определенная квадратичная функция фазовых скоростей. Слагаемые, стоящие под знаком суммы, – также неположительны. Действительно, линии переключения в задаче быстродействия для системы (7) таковы, что $\upsilon_i = -1$ ($\upsilon_i = 1$), если фазовая точка $(x_i, \dot{x}_i)$ лежит выше (ниже) линии переключения, а сама линия переключения проходит через вторую и четвертую четверти системы координат на фазовой плоскости. Пусть для определенности $x_i \geq 0$. Тогда каждое слагаемое под знаком суммы обращается в нуль, если точка $(x_i, \dot{x}_i)$ лежит выше линии переключения, либо равно $2\dot{x}_i u_i^0$, если точка лежит ниже. В последнем случае слагаемое отрицательно, если $\dot{x}_i \neq 0$, так как в правой полуплоскости линия переключения лежит в четвертой четверти. Таким образом, полная производная функции $S(x, \dot{x})$ (9) при выбранном управлении неположительна.

Покажем, что на любой траектории $(x(t), \dot{x}(t))$ системы (3) с управлением (8) для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой момент t_1, что при всех $t > t_1$ выполнено

$$\varepsilon > (D\dot{x}, \dot{x}) \geq 0 \tag{10}$$

Допустим, что это не так. Тогда в силу соотношения (9) наступит момент, начиная с которого значения функции $S(x, \dot{x})$ на рассматриваемой траектории будут сколь угодно близки к минимуму. В силу свойств функции $S(x, \dot{x})$ это означает, что величина $|\dot{x}|$ становится сколь угодно малой, что противоречит сделанному предположению.

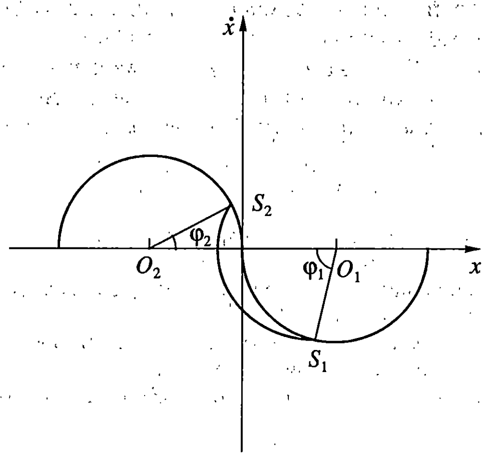
Для неотрицательно определенных квадратичных форм верно неравенство $(D\dot{x}, D\dot{x}) \leq \|D\|(D\dot{x}, \dot{x})$, где $\|D\|$ – евклидова норма матрицы D квадратичной формы.

Поэтому в силу неравенства (10) начиная с некоторого момента на любой траектории системы (3) при выбранном управлении (8) будет выполнено $\|D\dot{x}\| \leq \|D\|^{1/2}\varepsilon^{1/2} = \varepsilon_0$, где ε_0 сколь угодно мало. Из малости второго слагаемого в уравнении (3) следует, что система (3) за конечное время из любого начального состояния приходит в произвольно малую окрестность начала координат, т.е. система асимптотически устойчива в целом.

Покажем теперь, что из этой окрестности система (3) попадает в начало координат за конечное время. Пусть для определенности $\Lambda_{ii} \neq 0$. Изменением масштаба i-е уравнение (3) можно привести к виду

$$\ddot{x}_i + x_i = \upsilon_i(x_i, \dot{x}_i) + \varepsilon(t), \quad |\upsilon_i(t)| \leq 1, \quad |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 \tag{11}$$

Рассмотрим движение фазовой точки вблизи начала координат при малых значениях ε_0: $\varepsilon_0 \ll 1$, трактуя обобщенную силу вязкого трения как результат действия ограниченной по величине помехи. Покажем, что система (11) при управлении (8) переходит в начало координат за конечное время, что означает переход в начало координат и всей системы (3). Без ограничения общности предположим, что начальная точка $(x_0, \dot{x}_0)$ расположена в первой четверти. При заданном начальном положении траектория движения по фазовой плоскости при любой допустимой неравенством (11) реализации помехи будет заключаться в границах, образованных наиболее отклоняющейся влево по ходу движения (ей соответствует помеха $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \operatorname{sign}\dot{x}(t)$) и вправо ($\varepsilon(t) = -\varepsilon_0 \operatorname{sign}\dot{x}(t)$) траекториями. Поэтому при определенном выше управлении фазовая траектория при любой реализации помехи в силу неравенства $\varepsilon_0 \ll 1$ через какое-то время упрется в линию переключения (см. фигуру). Если далее окажется, что $\varepsilon(t) \geq 0$, то результирующему управ-



лению будет соответствовать скользящий режим, а фазовая точка с единичной угловой скоростью будет двигаться вдоль линии переключения к началу координат. В противном случае до очередного пересечения линии переключения траектория будет проходить по области, которой соответствует $v(x, \dot{x}) = 1$. Можно показать, что максимальное время движения по этой области достигается при помехе $\varepsilon(t) = -\varepsilon_0$. Обозначим через S_1 и S_2 две последовательные точки пересечения фазовой траекторией линии переключения, а через φ_1 и φ_2 – углы, которые образованы отрезками S_1O_1 и S_2O_2 с осью абсцисс.

Элементарными выкладками можно установить, что при малых углах φ_1 и φ_2 верно соотношение $\varphi_2/\varphi_1 = (\varepsilon_0/(2-\varepsilon_0))^{1/2} = q \ll 1$, а время движения по траектории S_1, S_2 порядка $\varphi_1 + \varphi_2$. Предполагая помеху наихудшей, т.е. $\varepsilon(x, \dot{x}) = -\varepsilon_0 v(x, \dot{x})$, что соответствует максимальному времени движения между двумя последовательными моментами переключения управления, и проводя последовательно приведенные выше рассуждения, получаем верхнюю оценку времени T движения от начальной точки до начала координат

$$T \le \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = \varphi_1/(1-q)$$

т.е. время движения конечно. Случай $\Lambda_{ii} = 0$ рассматривается аналогично. Утверждение доказано.

Аналогичный результат доставляет управление $v_i(y_i, \dot{y}_i)$, переводящее систему

$$\ddot{y}_i = \overset{0}{u}_i v_i(y_i, \dot{y}_i), \quad |v_i(y_i, \dot{y}_i)| \le 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

из произвольного начального положения в начало координат за минимальное время. Это же управление $u_i(x_i, \dot{x}_i) = \overset{0}{u}_i v_i(x_i, \dot{x}_i)$ обеспечивает перевод динамической системы (3) в начало координат за конечное время. Для доказательства достаточно рассмотреть функцию

$$S(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i^2/2 + |x_i|\overset{0}{u}_i) + (\Lambda x, x)/2$$

полная производная которой в силу системы (3) совпадает с соотношением (9), и повторить приведенные выше рассуждения. Таким образом можно сделать вывод, что появление дополнительных потенциальных и (или) диссипативных сил в динамических системах (3) не влияет на возможность за конечное время позиционным управлением (8) перевести систему в начало координат из любого начального положения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
2. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. 1980, 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.07.2004