МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006

УДК 539.3

© 2006 г. Е.Л. ГУСЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОСТАБИЛИЗИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящее время значительное внимание уделяется вопросам расчета и оптимального проектирования слоисто-неоднородных конструкций с заданным комплексом свойств [1–6]. В настоящей статье исследуется проблема оптимального проектирования слоисто-неоднородных термостабилизирующих конструкций, обеспечивающих предельные возможности по гашению температурного поля. Исследование закономерностей, возникающих при взаимодействии температурных полей со слоисто-неоднородными конструкциями, имеет важное значение для многих областей физики, техники, приборостроения. Теплозащитные конструктивные элементы находят широкое применение в энергетике, металлургии, геологии, геофизике, теплотехнике, строительстве, машиностроении и других областях. При этом одной из важных проблем является проблема поиска перспективных путей наиболее эффективного регулирования интенсивности теплового воздействия на основе направленного выбора структуры неоднородной конструкции.

1. Из теории распространения температурных волн в неоднородных средах известно, что на затухание температурных волн существенное влияние оказывают форма и геометрические размеры, составляющие конструкцию слоев. Подбирая определенным образом структуру неоднородной конструкции можно в широких пределах управлять уровнем интенсивности температурного поля [7]. При этом наибольший интерес представляют задачи эффективного предельного гашения температурного поля на основе направленного выбора структуры неоднородной среды. Наиболее общий подход к решению данной проблемы связан с вариационной постановкой. В вариационной постановке соответствующие задачи оптимального проектирования структурно-неоднородных конструкций с заданным комплексом свойств, связанные с оптимальным распределением неоднородности в конструкции, могут быть сформулированы в форме задач оптимального управления составными или многоступенчатыми системами [7, 8]. Как правило, требуется направленным выбором структуры неоднородной конструкции обеспечить наиболее эффективное гашение уровня интенсивности температурного поля на внутренней поверхности конструкции в заданном временном промежутке $0 \le t \le \tau_{max}$. Обозначим через S_0, S_1 внешнюю и внутреннюю поверхности конструкции соответственно. Тогда в вариационной постановке в качестве критерия, подлежащего оптимизации, целесообразно выбрать следующий критерий:

$$J = \int_0^{\tau_{max}} [\mathrm{mod}(T(x, y, z, t))]^2 \Big|_{(x, y, z) \in S_1} dt \Rightarrow \min \qquad (1.1)$$

Варьируемыми являются параметры, определяющие структуру конструкции, а именно: теплофизические свойства материалов слоев, толщины слоев, число слоев, а также порядок взаимного расположения материалов слоев с различными теплофизическими свойствами в конструкции. Набор материалов, используемых при проектировании, предполагается дискретным, что более соответствует реальной ситуации, чем случай, когда теплофизические характеристики материалов предполагаются имеющими непрерывную область задания. Необходимо установить структуру конструкции, реализующую предельные возможности по гашению уровня интенсивности температурного поля. Параметры, определяющие структуру такой конструкции, доставляют глобальный минимум критерию оптимизации (1.1).

2. Будем рассматривать распространение температурного поля в плоской слоисто-неоднородной конструкции. Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с наружной поверхностью конструкции, а ось z была направлена внутрь конструкции. Для исследуемого случая линейной постановки, когда материалы, используемые при проектировании, не обладают анизотропией физических свойств, и в отсутствие внутренних источников тепла, распространение температурных полей в неоднородной конструкции может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_s(x,y,z,t)}{\partial t} = a_s\nabla^2 T_s(x,y,z,t)\\
-\infty < x, y < +\infty, \quad b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \dots, N)\\
T_s(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in G_{s-1}} = T_s(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in G_{s-1}}\\
\lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,z,t)}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in G_{s-1}} = \lambda_{s-1}\frac{\partial T_{s-1}(x,y,z,t)}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in G_{s-1}} \quad (s = 2, \dots, N)\\
\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,y,z,t)}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in G_0} = \alpha_{in}(T_1(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in G_0} - T_{in}(t))\\
\lambda_N \frac{\partial T_N(x,y,z,t)}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in G_N} = \alpha_{out}(T_N(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in G_N} - T_{out}(t))
\end{gathered} \qquad (2.1)$$

В этих обозначениях $T_s(x, y, z, t)$ $(s = 1, \dots, N)$ – значение температуры внутри s-го слоя конструкции; N – число слоев конструкции; λ_s, a_s $(s = 1, \dots, N)$ – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности слоев соответственно; G_s $(s = 0, \dots, N)$ – плоские поверхности раздела слоев; n – нормаль к поверхности конструкции; α_{in}, α_{out} – коэффициенты теплообмена на внешней и внутренней поверхностях конструкции соответственно; $T_n(t)$, $T_{out}(t)$ – заданные в функции от времени температуры наружной и внутренней сред, окаймляющих конструкцию.

Будем рассматривать общий случай непериодического температурного воздействия на слоисто-неоднородную конструкцию. Тогда оно может быть представлено в форме интеграла Фурье:

$$T_{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \qquad (2.2)$$

где $F(\omega)$ – спектральная плотность функции $T_{in}(t)$.

Тогда решение краевой задачи (2.1) также представимо в виде интеграла Фурье:

$$T_s(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_s(x,y,z,\omega)\exp(i\omega t)d\omega \ (s = 1, \dots, N) \qquad (2.3)$$

В результате для спектральных плотностей $F_s(x, y, z, \omega)$ получим краевую задачу, идентичную краевой задаче (2.1). При этом частоту ω необходимо рассматривать как непрерывный параметр, изменяющийся в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$.

Критерием оптимизации в данной задаче является критерий

$$J = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega)\mathrm{mod}^2(F_N(x, y, z, \omega)|_{(x, y, z) \in G_N})d\omega \tag{2.4}$$

где $\tau(\omega)$ $(0 \le \tau(\omega) \le 1)$ – весовая функция. Варьируемыми при этом является полная совокупность параметров, определяющих структуру конструкции, а именно: теплофизические свойства материалов слоев, толщины слоев, а также число слоев. Так как на дискретном наборе материалов теплофизические характеристики уже не будут являться независимыми, то выберем в качестве определяющего независимого теплофизического параметра – коэффициент теплопроводности λ. Тогда коэффициент температуропроводности a будет являться зависимым теплофизическим параметром, связанным с коэффициентом теплопроводности некоторой функциональной зависимостью $a = a(\lambda)$. Обозначим через λ множество коэффициентов теплопроводности материалов допустимого набора. Введением функционального распределения коэффициента теплопроводности по толщине конструкции можно совокупность параметров, определяющих структуру конструкции объединить в один функциональный параметр. Обозначим $\lambda(z) = \lambda_s$, $b_{s-1} \le z \le b_s$ $(s = 1, \ldots, N)$. Ограничение на функцию $\lambda(z)$ может быть записано в виде:

$$\lambda(z) \in \Lambda, \quad 0 \le z \le l \tag{2.5}$$

Тогда в рамках рассматриваемой постановки задача исследования предельных возможностей заключается в нахождении таких оптимальных распределений теплофизических свойств по толщине конструкции $\lambda^*(z)$ $(0 \le z \le l)$, которые доставляют точную нижнюю грань критерию (2.4). Обозначим через U^* полную совокупность решений, доставляющих точную нижнюю грань критерию (2.4):

$$U^* = \{\lambda^*(z) \in \Lambda : J(\{\lambda^*(z)\}) = \inf_{\lambda(z) \in \Lambda} J(\{\lambda(z)\})\} \tag{2.6}$$

Рассмотрим вопрос о построении для сформулированной задачи оптимального синтеза эффективных методов выделения полной совокупности глобально-оптимальных решений вида (2.6).

3. Для случая, когда материалы допустимого набора являются изотропными, исследуемая задача о распространении температурного поля в структурно-неоднородной конструкции приобретает симметрию. В этом случае можно показать, что краевая задача относительно спектральных плотностей $F_s(x, y, z, \omega)$ $(s = 1, \ldots, N)$ допускает решение методом разделения переменных. В этом случае функции $F_s(x, y, z, \omega)$ $(s = 1, \ldots, N)$ допускают представление в форме $F_s(x, y, z, \omega) = f_s(z, \omega)Y_s(x, y)$ $(s = 1, \ldots, N)$. При этом системы дифференциальных уравнений относительно функций $f_s(z, \omega)$ и $Y_s(x, y)$ разделяются.

Применение вычислительных процедур оптимизации игольчатого типа на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина для построения оптимальных теплоустойчивых слоистых конструкций рассматривалось в [9–13]. Однако поскольку принцип максимума Л.С. Понтрягина является необходимым условием локального минимума, а число решений, удовлетворяющих принципу максимума Л.С. Понтрягина, может быть достаточно велико, то в данных работах не решен вопрос построения решений, реализующих предельные возможности по гашению температурного воздействия, т.е. доставляющих глобальный минимум функционалу качества в соответствующей вариационной постановке.

Рассмотрим случай гармонического температурного воздействия с частотой ω. Введем обозначения:

$$f(z,\omega) = f_s(z,\omega), \quad g(z,\omega) = \frac{1}{\lambda(z)}\frac{\partial f_s(z,\omega)}{\partial z}, \quad b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \ldots, N)$$

Пусть $\psi(z,\omega)$ $(0 \le z \le l)$ решение сопряженной системы для системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение температурного поля в слоисто-неоднородной конструкции [7]. Обозначим

$$p(z,\omega) = -\frac{1}{i\omega\gamma(z)}\frac{\partial \psi(z,\omega)}{\partial z}, \quad 0 \le z \le l$$

$$\gamma(z) = \lambda(z)/a(z), \quad a(z) = a_s, \quad b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \ldots, N)$$

Конструктивный анализ исходной и сопряженной систем позволяет получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \psi(l,\omega)f(l,\omega) + p(l,\omega)g(l,\omega) &= -2\tau(\omega)\mathrm{mod}^2(f(l,\omega)) \\ \psi(0,\omega)f(0,\omega) + p(0,\omega)g(0,\omega) &= -2\tau(\omega)\mathrm{mod}^2(f(l,\omega)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Учет краевых условий для исходной и сопряженной систем позволяет получить следующие выражения для решений сопряженной системы при $z = 0$:

$$\psi(0,\omega) = -2\tau(\omega)\mathrm{mod}^2(f(l,\omega)), \quad \frac{\partial \psi(0,\omega)}{\partial z} = -i\frac{4\tau(\omega)\lambda_1\delta_1^2}{\alpha_{in}}\mathrm{mod}^2(f(l,\omega)) \tag{3.2}$$

$$\delta_s = \sqrt{\omega/2a_s} \ (s = 1, \ldots, N) \tag{3.3}$$

Решение исходной системы функцию $f(z,\omega)$ при $z = 0$ представим в показательной форме:

$$f(0,\omega) = \rho(\omega)\exp(i\varphi(\omega)) \tag{3.4}$$

Тогда, с учетом этих обозначений

$$\frac{\partial f(0,\omega)}{\partial z} = \frac{\alpha_{in}}{\lambda_1}[\rho(\omega)\exp(i\varphi(\omega)) - 1] \tag{3.5}$$

Обозначим

$$\eta(\omega) = \mathrm{mod}(f(l,\omega)) \tag{3.6}$$

При этом

$$0 \le \rho(\omega), \quad \eta(\omega) \le 1, \quad 0 \le \varphi(\omega) \le 2\pi \tag{3.7}$$

С учетом структуры исходной и сопряженной систем можно показать, что для рассматриваемой задачи оптимального синтеза функции Гамильтона допускают представление [7]:

$$\begin{gathered} H(;\lambda)|_z = \gamma(\lambda)\alpha_s(z,\omega) + \frac{1}{\lambda}\beta_s(z,\omega), \quad b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \ldots, N) \\ \alpha_s(z,\omega) = -\frac{1}{\gamma_s}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial \psi_s(z,\omega)}{\partial z}f_s(z,\omega)\right], \quad \beta_s(z,\omega) = \lambda_s\mathrm{Re}\left[\frac{\partial f_s(z,\omega)}{\partial z}\psi_s(z,\omega)\right] \end{gathered} \tag{3.8}$$

Конструктивный анализ исходной и сопряженной систем позволяет установить следующую связь межу функциями $\alpha_s(z, \omega)$ и $\beta_s(z, \omega)$:

$$\frac{1}{\lambda_s}\beta_s(z, \omega) = -\gamma_s\alpha_s(z, \omega) + L_s, \quad b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \ldots, N)$$

Здесь $L_s(\omega)$ не зависят от z. При этом следствием свойства повышенной гладкости функций Гамильтона на оптимальном решении является условие $L_s^*(\omega) \equiv L^*(\omega)$ $(s = 1, \ldots, N)$. Поэтому на оптимальном решении функции Гамильтона могут быть записаны в виде:

$$H(*; \lambda)|_z = \alpha_s^*(z, \omega)\frac{1}{\lambda}[\lambda\gamma(\lambda) - \lambda_s^*\gamma_s^*] + \frac{\lambda_s^*}{\lambda}L^*(\omega), \quad b_{s-1}^* \le z \le b_s^* \ (s = 1, \ldots, N^*) \tag{3.9}$$

На основе исследования свойств исходной и сопряженной систем можно получить следующую связь между функциями $\alpha_s(z, \omega)$ и $\beta_s(z, \omega)$ на произвольном допустимом решении:

$$\frac{1}{\lambda_1}\beta_1(0, \omega) = R_1(\omega) \pm P_1(\omega)\sqrt{Q_1(\omega) - \gamma_1^2\alpha_1^2(0, \omega)} \tag{3.10}$$

$$P_1(\omega) = \frac{\alpha_{in}}{2\lambda_1^2\delta_1^2}, \quad R_1(\omega) = \frac{2\tau(\omega)\alpha_{in}\eta^2}{\lambda_1}, \quad Q_1(\omega) = \frac{4\tau(\omega)\lambda_1\delta_1^2\eta^2}{\alpha_{in}}\rho \tag{3.11}$$

Тогда получим

$$L_1(\omega) = \gamma_1\alpha_1(0, \omega) + R_1(\omega) \pm P_1(\omega)\sqrt{Q_1^2(\omega) - \gamma_1^2\alpha_1(0, \omega)} \tag{3.12}$$

Выразим величины $\alpha_1(0, \omega)$, $\beta_1(0, \omega)$ как функции параметров φ, ρ, η:

$$\begin{aligned} \alpha_1(0, \omega) &= -\frac{1}{\gamma_1}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\psi_1(0, \omega)}{\partial z}f_1(0, \omega)\right] = -\frac{4\tau(\omega)\lambda_1\delta_1^2\eta^2}{\alpha_{in}\gamma_1}\rho\sin\varphi \\ \beta_1(0, \omega) &= \lambda_1\mathrm{Re}\left[\frac{\partial f_1(0, \omega)}{\partial z}\psi_1(0, \omega)\right] = -2\tau(\omega)\alpha_{in}\eta^2(\rho\cos\varphi - 1) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Решение исходной и сопряженной систем допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} f_s(z, \omega) &= A_s(\omega)\exp(ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) + B_s(\omega)\exp(-ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) \\ \psi_s(z, \omega) &= C_s(\omega)\exp(ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) + D_s(\omega)\exp(-ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) \\ & b_{s-1} \le z \le b_s \ (s = 1, \ldots, N), \quad k_s(\omega) = i\delta_s(\omega)(i + 1) \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $A_s(\omega)$, $B_s(\omega)$, $C_s(\omega)$, $D_s(\omega)$ – неопределенные комплексные параметры, определяемые на основе решения исходной и сопряженной систем.

В результате функции $\alpha_s(z, \omega)$, $\beta_s(z, \omega)$ могут быть преобразованы к виду

$$\alpha_s(z, \omega) = -\frac{1}{\gamma_s(\omega)}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\psi_s(z, \omega)}{\partial z}f_s(z, \omega)\right] = -\frac{1}{\gamma_s(\omega)}\mathrm{Re}\{ik_s(\omega)(C_s(\omega)\exp(ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) -$$

$$- D_s(\omega)\exp(-ik_s(\omega)(z - b_{s-1})))(A_2(\omega)\exp(ik_s(z - b_{s-1}))) + B_s(\omega)\exp(-ik_s(z - b_{s-1}))\}$$

$$\beta_s(z, \omega) = \lambda_s\mathrm{Re}\left[\frac{\partial f_s(z, \omega)}{\partial z}\psi_s(z, \omega)\right] = \lambda_s\mathrm{Re}\{ik_s(\omega)(A_s(\omega)\exp(ik_s(\omega)(z - b_{s-1})) -$$

$$- B_s(\omega)\exp(-ik_s(\omega)(z - b_{s-1})))(C_s(\omega)\exp(ik_s(z - b_{s-1}))) + D_s(\omega)\exp(-ik_s(z - b_{s-1}))\}$$

Комплексные переменные $A_s(\omega)$, $B_s(\omega)$, $C_s(\omega)$, $D_s(\omega)$ ($s = 1, \ldots, N$) находятся на основе решения исходной и сопряженной систем. Построим выражения для $A_1(\omega)$, $B_1(\omega)$, $C_1(\omega)$, $D_1(\omega)$, как функций параметров η, ρ, φ:

$$\begin{aligned}
A_1(\eta, \rho, \varphi, \omega) &= \frac{\rho\exp(i\varphi)}{2}\left(1 - \frac{i\alpha_{in}}{\lambda_1 k_1(\omega)}\right) + \frac{i\alpha_{in}}{2\lambda_1 k_1(\omega)} \\
B_1(\eta, \rho, \varphi, \omega) &= \frac{\rho\exp(i\varphi)}{2}\left(1 + \frac{i\alpha_{in}}{\lambda_1 k_1(\omega)}\right) - \frac{i\alpha_{in}}{2\lambda_1 k_1(\omega)} \\
C_1(\eta, \rho, \varphi, \omega) &= -\tau(\omega)\eta^2\left(1 + \frac{2\lambda_1\delta_1^2(\omega)}{k_1(\omega)\alpha_{in}}\right) \\
D_1(\eta, \rho, \varphi, \omega) &= -\tau(\omega)\eta^2\left(1 - \frac{2\lambda_1\delta_1^2(\omega)}{k_1(\omega)\alpha_{in}}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Погрузим рассматриваемую задачу оптимального синтеза в трехпараметрическое семейство задач, в котором параметрами являются величины η, ρ, φ ($0 \le \eta$, $\rho \ge 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$). Тогда, учитывая полученные результаты, можно заключить, что в рассматриваемом трехпараметрическом семействе находится и искомое множество всех решений, реализующих предельные возможности по гашению температурного поля.

4. Пусть по-прежнему U^* – множество решений, реализуемых предельные возможности по гашению температурного поля в рассматриваемой задаче оптимального синтеза:

$$U^* = \{\lambda^*(z): J(\{\lambda^*(z)\}) = \min_{\lambda(z) \in \Lambda} J(\{\lambda(z)\})\} \tag{4.1}$$

Через $U^*(\eta, \rho, \varphi)$ обозначим множество решений, реализующих предельные возможности по гашению температурного поля, в трехпараметрической задаче синтеза при значениях параметров η, ρ, φ. Тогда $U^* \subset U^*(\eta, \rho, \varphi)$.

Учитывая полученные соотношения, функция Гамильтона при $z = 0$ в рассматриваемой трехпараметрической задаче оптимального синтеза может быть преобразована к виду

$$H(\eta, \rho, \varphi; \lambda)|_{z=0} = -\frac{2\tau(\omega)\eta^2}{\alpha_{in}}\left[\omega\rho\gamma(\lambda)\sin\varphi + \frac{\alpha_{in}^2(\rho\cos\varphi - 1)}{\lambda}\right] \tag{4.2}$$

Тогда в рассматриваемой трехпараметрической задаче оптимального синтеза оптимальный материал первого слоя может быть найден из следующего экстремального соотношения:

$$\lambda_1^* = \arg\min_{\lambda \in \Lambda}\left\{\left[\omega\rho\gamma(\lambda)\sin\varphi + \frac{\alpha_{in}^2(\rho\cos\varphi - 1)}{\lambda}\right]\tau(\omega)\right\} \tag{4.3}$$

С учетом полученных соотношений множество всех решений U^*, реализующих предельные возможности по гашению температурного поля в исходной задаче оптимального синтеза, может быть построено в рамках следующей схемы.

В трехпараметрической задаче оптимального синтеза находится оптимальный коэффициент теплопроводности первого слоя λ_1^* (η, ρ, φ) по формуле (4.3).

Пусть в рассматриваемой трехпараметрической задаче оптимального синтеза найдены оптимальная толщина ($s - 1$)-го слоя и оптимальный коэффициент теплопроводности s-го слоя ($s = 2, 3, \ldots$). На основании решения исходной и сопряженной систем находятся комплексные величины $A_s(\eta, \rho, \varphi; \omega)$, $B_s(\eta, \rho, \varphi; \omega)$, $C_s(\eta, \rho, \varphi; \omega)$, $D_s(\eta, \rho, \varphi; \omega)$ и вычисляются по полученным формулам функции $\alpha_s(z, \omega; \eta, \rho, \varphi)$, $\beta_s(z, \omega; \eta, \rho, \varphi)$. Затем строится функция Гамильтона $H(\eta, \rho, \varphi; \lambda)|_z$. Находится ближайшая к точке b^*_{s-1} особая точка z^* функции Гамильтона. Полагается $\Delta^*_s = z^* - b^*_{s-1}$, $\lambda^*_{s+1} = \lambda^*$, где величина λ^* определяется из экстремального соотношения:

$$H(\eta, \rho, \varphi; \lambda^*)|_z = \max_{\lambda \in \Lambda} H(\eta, \rho, \varphi; \lambda)|_z, \quad b^*_{s-1} \le z \le z^* \tag{4.4}$$

В результате искомое множество решений, реализующих предельные возможности по гашению температурного поля в рассматриваемой задаче оптимального синтеза, находится из условия

$$U^* = \left\{ \lambda^*(\eta^*, \rho^*, \varphi^*; z) : \sigma(\eta^*, \rho^*, \varphi^*) = \min_{\substack{0 \le \eta, \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi}} \sigma(\eta, \rho, \varphi) \right\} \tag{4.5}$$

$$\sigma(\eta, \rho, \varphi) = [\mathrm{mod}(f_1(0, \omega)) - \rho]^2 + [\mathrm{Arg}(f_1(0, \omega)) - \varphi]^2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kulikov G.M.* Analysis of initially stressed multilayred shells // Int. J. Solids and Struct. 2001. V. 38. № 26–27. P. 4535–4555.
2. *Соболев И.А., Попов Б.Г.* Моделирование температурных деформаций многослойных оболочечных космических конструкций // Инж. физ. ж. 2001. № 6. С. 27–31.
3. *Kim Jae-Yeol., Kwan Ik-No, War K. Taek-Jin.* A numerical analysis method for layered plate with different material constants // Comput. And Struct. 2001. V. 79. № 29–30. P. 2663–2680.
4. *Pai P.F., Palazotto A.N.* A higher order sandwich plate theory accounting for 3-D stresses // Int. J. Solids and Struct. 2001. V. 38. № 30–31. P. 5045–5062.
5. *Nathau W., Hatchinson J.W.* Optimal trus plates // Int. J. Solids and Struct. 2001. V. 38. № 30–31. P. 5165–5183.
6. *Лежнева А.А., Некрасова О.А., Полетаев В.В.* Расчет многослойных защитных преград // Вестн. ПГТУ. Динамика и прочность машин. 2001. № 3. С. 72–76.
7. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 262 с.
8. *Гусев Е.Л.* Оптимальное проектирование многоступенчатых систем. Якутск, 1985. 36 с.
9. *Бабе Г.Д., Гусев Е.Л.* Необходимые условия оптимальности для некоторого класса разрывных систем // БНТИ. ЯФ СО АН СССР. 1980. С. 3–6.
10. *Бабе Г.Д., Гусев Е.Л.* Численный расчет оптимальных теплоустойчивых конструкций // БНТИ. ЯФ СО АН СССР. 1980. С. 6–8.
11. *Бабе Г.Д., Гусев Е.Л.* Оптимальное проектирование многослойных теплозащитных полимерных конструкций // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 480–485.
12. *Уржумцев Ю.С., Никитина Л.М., Бабе Г.Д.* Оптимизация многослойных ограждающих конструкций по теплоустойчивости // Механика композитных материалов. 1981. № 6. С. 689–695.
13. *Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С.* Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.

Якутск

Поступила в редакцию
25.06.2004