

УДК 539.3

© 2006 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, Д.А. ПОЖАРСКИЙ, В.В. ТРЕПАЧЕВ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНИЧЕСКОГО КЛАПАНА

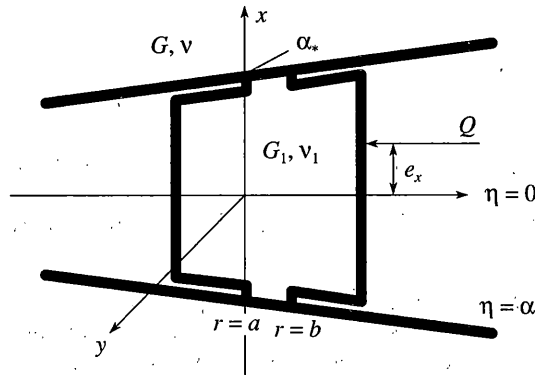
Получено интегральное уравнение пространственной контактной задачи для упругого конического клапана, находящегося в конической полости в упругом пространстве. При решении этого уравнения используются регулярный и сингулярный асимптотические методы с введением безразмерного параметра, характеризующего относительную удаленность области контакта от вершины конической полости. Полученные асимптотики перекрывают весь диапазон изменения этого параметра. Решение трехмерной задачи о равновесии кругового конуса основано на разложении векторных функций по полной системе векторных гармоник на поверхности конуса при помощи интегрального преобразования Меллина и рядов Фурье [1].

Асимптотические методы [2, 3] использовались ранее [4] при решении контактной задачи о жестком кольцевом бандаже на упругом конусе. Пространственная контактная задача для конуса с неизвестной областью контакта рассматривалась [5] при помощи нелинейных граничных уравнений. Особенности контактных давлений в конической точке изучались для случаев, когда на эту точку выходят кончики нескольких клиновидных штампов [6] или один клиновидный штамп [7].

1. Постановка задачи. В сферической системе координат r, η, φ рассмотрим упругое пространство с упругими характеристиками G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона), имеющее коническую полость $\{r \in (0, \infty); \eta \in (0, \alpha)\}$. В полость вставлен упругий конический клапан с упругими характеристиками G_1, ν_1 . Силы трения между клапаном и полостью не учитываем. Область контакта Ω описывается условиями $a \leq r \leq b, \eta = \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а форма основания клапана в области контакта — функцией $f(r, \varphi)$. Под действием внешней силы Q , параллельной оси конической полости, клапан испытывает поступательное перемещение δ (перпендикулярно поверхности полости), а также поворачивается на углы α_* и β_* вокруг осей y и x , лежащих в плоскости, перпендикулярной оси конической полости и линии действия силы Q (фигура). Требуется найти распределение нормальных контактных напряжений под клапаном $\sigma_\eta(r, \alpha, \varphi) = q(r, \varphi), (r, \varphi) \in \Omega$. Затем при помощи трех интегральных условий равновесия клапана можно установить связь между величинами Q и δ, e_x и α_*, e_y и β_* , где e_x и e_y — проекции точки приложения вдавливающей силы Q на оси x и y .

Разложим функции $q(r, \varphi)$ и $\delta(r, \varphi) = \delta + \alpha_* r \sin \alpha \cos \varphi + \beta_* r \sin \alpha \sin \varphi - f(r, \varphi)$ в ряды Фурье

$$\begin{aligned} q(r, \varphi) &= q_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^+(r) \cos n\varphi + q_n^-(r) \sin n\varphi] \\ \delta(r, \varphi) &= \delta_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_n^+(r) \cos n\varphi + \delta_n^-(r) \sin n\varphi] \end{aligned} \quad (1.1)$$



Граничное условие контакта можно записать в виде

$$u_{\eta}(r, \alpha, \varphi) - u_{\eta}^1(r, \alpha, \varphi) = \delta(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (1.2)$$

где u_{η} и u_{η}^1 – угловые упругие перемещения поверхностей полости и клапана соответственно. Предположим, что осевой размер клапана существенно превышает $b-a$. Тогда в соответствии с теорией Герца угловое перемещение u_{η}^1 от давления q может быть с хорошей степенью точности аппроксимировано угловым перемещением упругого конуса (с обратным знаком) угла раствора 2α ($0 \leq \eta \leq \alpha$), вызванного тем же нормальным давлением. Тогда, используя полученное в [3, 4] решение пространственной задачи о нормальной сосредоточенной силе, приложенной к поверхности конуса (или пространства с конической полостью), на основе условия (1.2) для определения неизвестных функций, входящих в первое разложение (1.1), получим интегральные уравнения вида ($q_0^{\pm}(r) = q_0(r)$, $\delta_0^{\pm}(r) = \delta_0(r)$, $n = 0, 1, \dots$):

$$\int_a^b q_n^{\pm}(x) k_n(r, x) x dx = \frac{\pi}{2} \theta \delta_n^{\pm}(r) \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.3)$$

$$k_n(r, x) = \frac{1}{\sqrt{rx}} \int_0^{\infty} \frac{L_n(u, \pi - \alpha) + n_* L_n(u, \alpha)}{2} \cos\left(u \ln \frac{x}{r}\right) du$$

$$n_* = \theta/\theta_1, \quad \theta = G/(1-\nu), \quad \theta_1 = G_1/(1-\nu_1)$$

Функции $L_n(u, \alpha)$ определяются формулами (1.8) [4].

При $n = 0$ (осевая симметрия) имеем

$$L_0(u, \alpha) = \frac{u_*(P)^2 - \operatorname{ctg} \alpha P P^1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha (P^1)^2}{u_*^2 \operatorname{ctg} \alpha (P)^2 + u_* P P^1 - [u_* + 2(1-\nu) \sin^{-2} \alpha] \operatorname{ctg} \alpha (P^1)^2} \quad (1.4)$$

$$P = P_{iu-1/2}(\cos \alpha), \quad P^1 = P_{iu-1/2}^1(\cos \alpha), \quad u_* = u^2 + 1/4$$

При $n = 1$ (первая гармоника) получим

$$L_1(u, \alpha) = \frac{f_1(u)(P)^3 + f_2(u)(P)^2 P^1 + f_3(u)P(P^1)^2 + f_4(u)(P^1)^3}{g_1(u)(P)^3 + g_2(u)(P)^2 P^1 + g_3(u)P(P^1)^2 + g_4(u)(P^1)^3} \quad (1.5)$$

$$f_1(u) = u_*^2 \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha$$

$$f_2(u) = -\frac{u_*^2}{2} \cos^2 \alpha + u_* \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\frac{1}{4(1-\nu)} - 1 - 2 \cos^2 \alpha \right)$$

$$f_3(u) = u_* \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \operatorname{ctg} \alpha \right) + \operatorname{ctg} \alpha \left(2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1-\nu)} \right)$$

$$f_4(u) = -\frac{u_*^2}{2} \sin^2 \alpha - 1 - \cos^2 \alpha - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$g_1(u) = -u_*^3 \cos^2 \alpha$$

$$g_2(u) = 1/4 u_*^3 \sin 2\alpha - u_*^2 [\sin 2\alpha - (5-\nu) \operatorname{ctg} \alpha]$$

$$g_3(u) = -1/2 u_*^2 \sin^2 \alpha - u_* [\sin^2 \alpha + 4(2-\nu) \operatorname{ctg}^2 \alpha]$$

$$g_4(u) = -1/4 u_*^2 \sin 2\alpha - 1/2 u_* \sin 2\alpha (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 4(1-\nu) \operatorname{ctg}^3 \alpha$$

При $\alpha = \pi/2$ коническая полость разворачивается в полупространство, а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ решения уравнений (1.3) отвечают контактной задаче для упругого конуса и упругого кольцевого бандажа.

2. Регулярный асимптотический метод. Далее для определенности примем $n_* = 1$ ($G = G_1$, $\nu = \nu_1$). Введем безразмерные величины и обозначения по формулам (штрихи далее опускаем):

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda \ln \frac{r}{a} - 1, \quad x' = \lambda \ln \frac{x}{a} - 1, \quad k_n' \left(\ln \frac{x}{r} \right) = \sqrt{rx} k_n(r, x) \\ \lambda &= 2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}, \quad \varphi_n^\pm(\xi) = \frac{q_n^\pm(r) \left(\frac{r}{a} \right)^{3/2}}{\theta}, \quad \delta_n^\pm(\xi) = \frac{\lambda \sqrt{r} \delta_n^\pm(r)}{2a^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Безразмерный параметр λ , очевидно, характеризует относительную удаленность клапана от вершины конической полости. В обозначениях (2.1) уравнения (1.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_n^\pm(\xi) k_n \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi &= \pi \delta_n^\pm(x) \quad (|x| \leq 1) \\ k_n(t) &= \int_0^\infty \frac{K_n(u)}{u} \cos ut du, \quad K_n(u) = u \frac{L_n(u, \pi - \alpha) + L_n(u, \alpha)}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно виду функции $K(u)$ достаточно исследовать только значения $0 < \alpha < \pi/2$.

Для функций $K_n(u)$ ($n = 0, 1, \dots$) имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned} K_n(u) &= Au + O(u^3), \quad u \rightarrow 0, \quad A = \text{const} \\ K_n(u) &= 1 + c_1 u^{-2} + O(u^{-4}), \quad u \rightarrow +\infty, \quad c_1 = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Можно показать, что при $n = 0$:

$$c_1 = 1/8 \sin^2 \alpha + 2(1 - v) \operatorname{ctg} \alpha (c - 3/4 \operatorname{ctg} \alpha) - 37/128 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1/8 c \operatorname{ctg} \alpha (2 - 7/8 \cos^2 \alpha) \quad (2.4)$$

а при $n = 1$:

$$c_2 = -\frac{3}{8} - \frac{227}{256} \cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\frac{1231}{256} + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{33}{4} v \right) + \frac{7c}{128} \sin 2\alpha + c \left(\frac{321}{64} - 2v \right) \operatorname{ctg} \alpha \quad (2.5)$$

$$c = \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - 2v + \frac{7}{64} \cos^2 \alpha \right) \quad (2.6)$$

При вычислениях функций $K_n(u)$ удобно перейти от пары функций P, P^1 к паре P, P^{-1} , где $P^1 = u_* P^{-1}$ (см. соотношение 8.752.2 [8]), $P^{\pm 1} = P_{iu-1/2}^{\pm 1}(\cos \alpha)$. Тогда имеем

$$L_0(u, \alpha) = \frac{(P)^2 - \operatorname{ctg} \alpha P P^{-1} + u_* \operatorname{ctg}^2 \alpha (P^{-1})^2}{u_* [\operatorname{ctg} \alpha (P)^2 + P P^{-1} - (u_* + 2(1 - v) \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha (P^{-1})^2]} \quad (2.7)$$

$$L_1(u, \alpha) = \frac{f_1^*(u)(P)^3 + f_2^*(u)(P)^2 P^{-1} + f_3^*(u)P(P^{-1})^2 + f_4^*(u)(P^{-1})^3}{g_1^*(u)(P)^3 + g_2^*(u)(P)^2 P^{-1} + g_3^*(u)P(P^{-1})^2 + g_4^*(u)(P^{-1})^3} \quad (2.8)$$

$$f_1^*(u) = \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha$$

$$f_2^*(u) = -\frac{u_*}{2} \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\frac{1}{4(1 - v)} - 1 - 2 \cos^2 \alpha \right)$$

$$f_3^*(u) = f_3(u), \quad f_4^*(u) = u_* f_4(u)$$

$$g_1^*(u) = -u_* \cos^2 \alpha$$

$$g_2^*(u) = \frac{u_*^2}{4} \sin 2\alpha - u_* [\sin 2\alpha - (5 - v) \operatorname{ctg} \alpha]$$

$$g_3^*(u) = g_3(u), \quad g_4^*(u) = u_* g_4(u)$$

Для вычисления пары P, P^{-1} используем представления

$$P_{iu-1/2}(\cos \alpha) = F\left(\frac{1}{2} - iu, \frac{1}{2} + iu, 1; \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad (2.9)$$

$$P_{iu-1/2}^{-1}(\cos \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} F\left(\frac{1}{2} - iu, \frac{1}{2} + iu, 2; \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$

содержащие гипергеометрическую функцию F (см. формулу 8.704 [8]). При тестировании вычислений полезны таблицы [9].

На основании свойств (2.3) можно попробовать использовать аппроксимацию

$$K_n(u) \approx \operatorname{th} Au \quad (2.10)$$

и найти затем замкнутое решение уравнения (2.2) [3]. Для случая $\delta_n^\pm(x) = \delta$ получим

$$\Phi_n^\pm(x) = \frac{\pi\delta}{2A\lambda K(e)\sqrt{e}} \left[2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} \right) \right]^{-1/2}, \quad e = \exp\left(-\frac{\pi}{A\lambda}\right) \quad (2.11)$$

Для интегральной характеристики решения далее найдем

$$Q_n^\pm = \int_{-1}^1 \Phi_n^\pm(x) dx = \frac{\delta K'(e)}{K(e)}, \quad K'(e) = K(\sqrt{1-e^2}) \quad (2.12)$$

где $K(e)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Относительная погрешность решения (2.11) не превышает относительную погрешность θ_* аппроксимации (2.10). Например, при $n = 0$ и $\alpha = 3\pi/8$ имеем $\theta_* = 4.6\%$ (здесь и далее в расчетах полагаем $\nu = 0.3$). Однако эта погрешность будет удовлетворительной не для всех α . Так, для $n = 1$ и $\alpha = 3\pi/8$ имеем $\theta_* = 13.5\%$.

Применим для решения уравнения (2.2) регулярный асимптотический метод, эффективный при достаточно больших значениях λ , ограничиваясь при расчетах случаями $n = 0$ и $n = 1$. С учетом формул (2.3) ядро интегрального уравнения (2.2) можно представить в форме

$$k_n(t) = \ln|t| F_1(t) + F_2(t) \quad (2.13)$$

$$F_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^{2m}, \quad F_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{2m}$$

Асимптотическое решение уравнения (2.2) имеет вид ряда по степеням $\lambda^{-2k} \ln^m \lambda$ [2, 3].

Ограничиваясь точностью $O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda)$, при $\delta_n^\pm(x) = \delta$ имеем

$$\Phi_n^\pm(x) = \frac{Q_n^\pm}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[1 + \left(a_1 + \frac{3}{2}b_1 - b_1 \ln 2\lambda \right) (1-2x^2) \frac{1}{\lambda^2} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^4}\right) \right] \quad (2.14)$$

Далее получим

$$Q_n^\pm = \pi\delta \left[\ln 2\lambda + a_0 + (a_1 + b_1 - b_1 \ln 2\lambda) \frac{1}{\lambda^2} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^4}\right) \right]^{-1} \quad (2.15)$$

В табл. 1 даны значения нескольких постоянных, входящих в разложения (2.13) и в асимптотическое решение (2.14), (2.15).

3. Сингулярный асимптотический метод. Решение уравнения (2.2), эффективное при достаточно малых значениях λ , получим при помощи сингулярного асимптотического метода [2, 3], связанного с методом Винера–Хопфа. Здесь для функций $K_n(u)$ используем аппроксимацию

$$K_n(u) \approx \frac{\sqrt{u^2 + B^2} u^2 + D^2}{u^2 + C^2} \frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2} \left(\frac{BD^2}{C^2 E^2} = A \right) \quad (3.1)$$

Таблица 1

α	$a_0 (n=0)$	$a_1 (n=0)$	$b_1 (n=0)$	$a_0 (n=1)$	$a_1 (n=1)$	$b_1 (n=1)$
$\pi/8$	-0.914	2.816	-2.106	-15.669	-4.085	-2.861
$\pi/4$	-1.039	0.627	-0.364	0.957	0.286	-0.747
$3\pi/8$	1.554	0.0275	-0.0199	0.112	0.304	-0.301

Таблица 2

α	A	B	C	D	E	$\theta_*, \%$
$\pi/8 (n=0)$	0.882	0.682	0.471	1.871	3.493	3.5
$\pi/4 (n=0)$	2.059	0.175	0.241	1.951	2.357	2
$3\pi/8 (n=0)$	3.543	0.699	0.444	1	1	3
$\pi/4 (n=1)$	2.771	0.859	0.499	2.815	3.133	1
$3\pi/8 (n=1)$	1.066	0.194	0.251	0.491	0.834	1

Значения постоянных, входящих в аппроксимацию (3.1), и относительная погрешность этой аппроксимации θ_* даны в табл. 2.

Для случая $\delta_n^\pm(x) = \delta$ при аппроксимации (3.1) асимптотическое решение уравнения (2.2) при малых λ можно записать в аддитивной форме

$$\Phi_n^\pm(x) = \frac{\delta}{\lambda} \left[\zeta^0 \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) + \zeta^0 \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) - \frac{1}{A} \right] \quad (3.2)$$

$$\zeta^0(t) = \frac{1}{A} \Phi(\sqrt{B}t) + \frac{\exp(-Bt)}{\sqrt{\pi A t}} - \frac{(C-D)(E-D)}{D \sqrt{A(B-D)}} \exp(-Dt) \Phi(\sqrt{(B-D)t})$$

При $B < D$ в (3.2) следует заменить интеграл вероятности $\Phi(x)$ на функцию

$$-i\Phi(ix) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(u^2) du \quad (3.3)$$

Для вычисления интегральных характеристик решения (сила, момент) более подходящей является асимптотически эквивалентная (3.2) мультипликативная форма решения

$$\Phi_n^\pm(x) = \frac{\delta A}{\lambda} \zeta^0 \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) \zeta^0 \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \quad (3.4)$$

Как показывают вычисления, в определенном диапазоне изменения параметра λ , зависящем от угла конусности 2α , наблюдается смыкание асимптотических решений, регулярного и сингулярного. Результаты вычислений значений $\phi(x) = \phi_0^\pm(x)$ и $Q_0 = Q_0^\pm$ для осесимметричного случая $n=0$, $\delta_0^\pm(x) = \delta$ (конический клапан с плоским основанием), $2\alpha = 3\pi/4$ ($E=D$) приводятся в табл. 3. Согласование асимптотических решений наблюдается здесь при $\lambda \approx 1$. При малых λ вдавливающая клапан сила на основе решения (3.4) рассчитана по формуле

$$Q_0 = \int_{-1}^1 \phi(x) dx = \delta \left[\frac{2}{A\lambda} + \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{AB}} \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{AB}} \right)^2 \exp \left(-\frac{2B}{\lambda} \right) \right] \quad (3.5)$$

λ	1/4	1/2	1	2	3	4
$\varphi(0)/\delta$ (2.11)	1.16	0.675	0.458	0.347	0.304	0.279
$\varphi(0)/\delta$ (2.14)	—	—	0.446	0.341	0.300	0.277
$\varphi(0)/\delta$ (3.2)	1.20	0.720	0.398	—	—	—
Q_0/δ (2.12)	3.14	2.01	1.42	1.08	0.952	0.876
Q_0/δ (2.15)	—	—	1.38	1.07	0.938	0.864
Q_0/δ (3.5)	3.13	2.00	1.46	—	—	—

Предположим, что граничная точка $r = b$ (размерная величина) зоны контакта фиксирована. Тогда, чем меньше значение $r = a$, т.е. чем ближе клапан к вершине конической полости, тем меньше значение λ , поскольку, согласно формулам (2.1), $b/a = \exp(2/\lambda)$. Например, если $b = 1$ см, то $a = 0.607$ см при $\lambda = 4$ и $a = 3.35 \cdot 10^{-4}$ см при $\lambda = 1/4$. Так что при $\lambda = 1/4$ клапан очень близок к вершине полости. Как видно из табл. 3, при приближении области контакта к вершине конуса значительно возрастает концентрация контактных напряжений и вдавливающая клапан сила.

Полученные выше решения локально некорректны в окрестности граничных точек $x = \pm 1$ зоны контакта, где может быть построена особая асимптотика, учитывающая упругость обоих контактирующих тел [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00002-а; 04-01-00119-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
3. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
4. Пожарский Д.А. О пространственной контактной задаче для упругого конуса // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 51–60.
5. Александров В.М., Пожарский Д.А. О пространственной контактной задаче для упругого конуса с неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 36–41.
6. Пожарский Д.А. Об особенностях контактных давлений в задаче о периодической системе клиновидных штампов на конусе // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 54–57.
7. Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Об особенностях контактных напряжений в задаче о клиновидном штампе на упругом конусе // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 72–77.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. Журина М.И., Кармазина Л.Н. Таблицы и формулы для сферических функций $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 57 с.
10. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Stress singularities at vertices of composite plates with smooth or roough interfaces // Arch. Mech. 1976. V. 28. № 4. P. 693–704.

Москва

Поступила в редакцию
21.04.2004