МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006

УДК 531.381

 И.А. МУХАМЕТЗЯНОВ

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА УРАВНЕНИЙ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ КВАЗИИНВАРИАНТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРЕСЛЕДУЮЩЕГО ТЕЛА

Предлагается процедура построения множества дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих стабилизацию программной ориентации преследующего тела, совершающего движение по принципу пропорциональной навигации [1] или по кривой погони при произвольных значениях случайных параметров, входящих в выражения возмущающих функций из заданного класса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, жестко связанное с подвижной системой координат $cxyz$. Главный вектор управляющих сил $\tilde{\mathbf{u}}_2$ построим так, чтобы центр масс тела c двигался по принципу пропорциональной навигации при погоне за преследуемой точкой o при ее движении по произвольному закону $\mathbf{r}_0(t)$ относительно инерциальной системы координат $o_1x_1y_1z_1$ [1]. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{\mathbf{u}}_1$ должен быть таким, чтобы одна ось тела, например cz, асимптотически стремилась занять направление **co**. Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\upsilon} = 0, \quad \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_\upsilon = b(\boldsymbol{\omega}_e \cdot \mathbf{e}_i) \; (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – орты осей cx и cy, а k_3 – орт оси cz; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – единичные ортогональные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной линии визирования **co**; $\boldsymbol{\upsilon}$ – вектор скорости центра масс c тела; $\boldsymbol{\omega}_\upsilon$ – вектор угловой скорости вращения вектора $\boldsymbol{\upsilon}$; $\boldsymbol{\omega}_e$ – вектор угловой скорости вращения линии визирования **co**; b – заданный коэффициенте пропорциональности.

Заметим, что при выполнении условий (1.1) вектор $\boldsymbol{\upsilon}$ будет направлен по оси cz тела с ортом $\mathbf{k}_3$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}_\upsilon$ будет равен сумме компонентов вектора угловой скорости тела на оси с ортами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. При таком принципе навигации угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_e$ линии визирования и ее производные по t считаются доступными измерению в каждый момент времени.

Известно, что движение центра масс в инерциальной системе координат $o_1x_1y_1z_1$ и вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $cxyz$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} I\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 &= (I\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{M}_* + \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{R}_1\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t) \\ m\dot{\boldsymbol{\upsilon}} &= \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{u}}_2 + \tilde{R}_2\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\delta}, t) \tag{1.3}$$

где I – тензор инерции тела в точке с; $\boldsymbol{\omega}_0(p, q, r)$ – мгновенная угловая скорость тела; p, q, r – проекции $\boldsymbol{\omega}_0$ на оси cx, cy, cz; m – масса тела; $\mathbf{M}_*$ – главный момент заданных сил относительно центра масс c; $\mathbf{f}$ – главный вектор заданных сил; $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t)$ – вектор возмущений, зависящий от конечномерного вектора $\mathbf{c}$ со случайными постоянными компонентами c_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$), являющимися постоянными интегрирования заданной 6-мерной системы дифференциальных уравнений; $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ – (3×6)-мерные матрицы распределения возмущения $\boldsymbol{\delta}$ между каналами управления.

Уравнения (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = I^{-1}[(I\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{M}_*] + \mathbf{u}_1 + R_1\boldsymbol{\delta}; \quad \dot{\upsilon} = \mathbf{f}/m + \mathbf{u}_2 + R_2\boldsymbol{\delta} \\ &\mathbf{u}_1 = I^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2/m, \quad R_1 = I^{-1}\tilde{R}_1, \quad R_2 = \tilde{R}_2/m \end{aligned} \tag{1.4}$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: построить множество дифференциальных уравнений регуляторов, определяющих изменения векторов управления $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, обеспечивающих интегральность и асимптотическую устойчивость “в большом” программного многообразия (1.1) системы (1.2), подверженной действию возмущений $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t)$ при любых случайных значениях 6-мерного ограниченного постоянного вектора $\mathbf{c}$, являющегося вектором постоянных интегрирования уравнения (1.3), общим решением которого является возмущение $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t)$.

Таким образом, предполагается аппроксимация любой реализации возмущений $\boldsymbol{\delta}$ конкретным выбором постоянных параметров c_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$).

Идея метода борьбы с возмущениями $\boldsymbol{\delta}$ заключается в том, чтобы сделать заданное невозмущенное состояние (1.1) системы (1.4), замкнутой дифференциальными уравнениями регулятора, асимптотически устойчивым “в большом” не только к случайным начальным отклонениям от многообразия (1.1), но также и к случайному изменению вектора $\mathbf{c}$ для любых реализаций из некоторой заданной ограниченной области, не выводящей систему из заданной ограниченной фазовой области G.

В случае, когда в качестве невозмущенного состояния принимается одно из частных решений системы (1.4), полная инвариантность и квазиинвариантность сводятся к определениям, принятым в работах В.С. Кулебакина [2], Б.Н. Петрова [3] тесно связанными с теорией $K(D)$-изображения [4].

В этом случае многообразие невозмущенного состояния системы имеет нулевую меру и, следовательно, эти определения не охватывают в полной мере поставленную в [5] задачу о полной инвариантности программного многообразия при действии на систему произвольных возмущений, а также здесь поставленную задачу квазиинвариантности при возмущениях из заданного класса.

2. Алгоритм решения поставленной задачи. Уравнения (1.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = B(x, t) + u + R\delta \\ &B(x, t) = \left\| \begin{matrix} I^{-1}[(I\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{M}_*)] \\ \mathbf{f}/m \end{matrix} \right\|, \quad u = \left\| \begin{matrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{matrix} \right\| \\ &x = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ \boldsymbol{\upsilon} \end{matrix} \right\|, \quad R = \left\| \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\| \end{aligned} \tag{2.1}$$

Требования (1.1) представим в виде

$$\boldsymbol{\omega}_1(x, t) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_2(x, t) = 0 \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ – двумерные векторы с элементами

$$\omega_1^i = \mathbf{e}_i^T(\boldsymbol{\omega}_\upsilon - b\boldsymbol{\omega}_e), \quad \omega_2^i = \mathbf{k}_i^T \boldsymbol{\upsilon} \ (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

Условие $\det\|R\| \neq 0$ позволяет выражать вектор $\boldsymbol{\delta}$ с помощью уравнения (2.1) в виде

$$\boldsymbol{\delta} = R^{-1}(\dot{x} - B - u) \tag{2.4}$$

Дифференцируя по t (2.1), получим

$$\ddot{x} = \dot{u} + \frac{dB}{dt} + R\dot{\delta} + \frac{dR}{dt}\delta \tag{2.5}$$

Заменяя $\dot{\delta}$, δ в правой части этого уравнения их значениями (1.3) и (2.4), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{u} + \tilde{f}_0(\dot{x}, x, u, t) \\ \tilde{f}_0 &= \frac{dB}{dt} + Rf_0[R^{-1}(\dot{x} - B - u), t] + \frac{dR}{dt}R^{-1}(\dot{x} - B - u) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, вместо исходной системы (2.1) получили систему (2.6) более высокого порядка, не содержащую явно вектора возмущений $\boldsymbol{\delta}$. Теперь потребуем, чтобы многообразие (2.2) было интегральным многообразием этого уравнения (2.6). Для этого дифференцируем (2.2) два раза по t и приравниваем результат некоторой вектор-функции $\Phi(\dot{\omega}, \omega, u, \dot{x}, x, t)$, обладающей свойством $\Phi(0, 0, u, \dot{x}, x, t) \equiv 0$ и способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость “в большом” многообразия (2.2). Здесь

$$\boldsymbol{\omega} = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{matrix} \right\|$$

При этом необходимо использовать известные формулы Пуассона и выражение для вектора $\boldsymbol{\omega}_\upsilon$:

$$\dot{\mathbf{k}}_i = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{k}_i \ (i = 1, 2, 3), \quad \boldsymbol{\omega}_\upsilon = \sum_{\mu=1}^{2} \mathbf{k}_\mu^T \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{k}_\mu$$

После этой процедуры дифференцирования (2.2) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\omega}} &= \Omega\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}(\dot{x}, x, u, t) \\ \Omega &= \left\| \begin{matrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{k}_1 & \mathbf{e}_1^T\mathbf{k}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{k}_1 & \mathbf{e}_2^T\mathbf{k}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\tilde{\mathbf{f}}$ – сумма членов, не содержащих вектора $\dot{\mathbf{u}}$; Ω – (4×6)-мерная матрица.

Приравнивая правую часть уравнения (2.7) вышеупомянутой функции Φ, получим

$$\begin{aligned} \Omega\dot{u} &= Q \\ Q &= \Phi(\dot{\omega}, \omega, u, \dot{x}, x, t) - \tilde{f}(\dot{x}, x, u, t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом функция Φ должна обеспечивать асимптотическую устойчивость "в большом" тривиального решения $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0$ уравнения $\ddot{\omega} = \Phi(\dot{\omega}, \omega, u, \dot{x}, x, t)$. Для этого функцию Φ достаточно выбрать, например, в виде [6]:

$$\Phi = \Phi_0\omega + \Phi_0'\dot{\omega}$$

где Φ_0, Φ_0' – диагональные (4×4)-мерные матрицы с постоянными, не равными нулю отрицательными элементами. При этом соответствующим выбором элементов матрицы Φ_0' переходному процессу можно придать любую быстроту затухания.

Учитывая условие $\det\|\Omega\Omega^T\| \neq 0$, решение системы (2.8) 4-х уравнений с 6-ю искомыми элементами вектора $\dot{u}$ можно представить в виде [7].

$$\dot{\mathbf{u}} = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}Q + [E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega]\tilde{\mathbf{u}} \tag{2.9}$$

где E – единичная (6×6)-матрица, $\tilde{\mathbf{u}}$ – произвольная 6-мерная вектор-функция.

Полученное уравнение (2.9) является искомым множеством дифференциальных уравнений регуляторов объекта управления (2.1).

В заключение отметим, что когда система (1.2) возмущается 6-мерным вектором $\boldsymbol{\delta}$ с элементами

$$\delta_i = c_i \sin p_i t, \quad \delta_j = c_j \cos p_i t \; (i = 1, 2, 3; \; j = 4, 5, 6)$$

то компоненты вектор-функции $\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\delta}, t)$ в (1.3) можно задавать в виде

$$f_{0i} = \delta_i p_i \operatorname{ctg} p_i t, \quad f_{0j} = -\delta_j p_i \operatorname{tg} p_i t \tag{2.10}$$

где $p_i > 0$ – заданные постоянные; c_i, c_j – случайные постоянные. Заметим, что возмущения, в частности, могут задаваться 6-ю членами ряда Фурье, начиная со второго, при разложении семейства произвольных периодических функций с любым заданным периодом.

3. Алгоритм решения задачи в обобщенной постановке. Пусть дана система дифференциальных уравнений движения объекта управления в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x, u, t) + R(x, t)\delta \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x, u, \delta, t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

где x_1, φ_1, δ – s-мерные, x_2, φ_2 – $(n - s)$-мерные, u – r-мерный, $x(x_1, x_2)$ – n-мерный векторы; R – $(s \times s)$-мерная матрица.

Предполагается, что $\det\|R\| \neq 0$ в некоторой ограниченной области G.

В отличие от случая, рассмотренного в *п.* 2, будем считать, что каждая компонента вектора δ может зависеть от соответствующего количества компонент вектора $\mathbf{c}$. Следовательно, максимальная размерность вектора $\mathbf{c}$ может превышать числа s и, следовательно, порядок дифференциального уравнения (1.3) может оказаться больше порядка исходной системы (3.1).

В этом случае метод решения задачи, приведенной в *п.* 2, оказывается неприемлемым. В таких случаях для решения задачи можно предложить следующий способ.

Допустим, что удалось построить дифференциальные операторы

$$P_i[\delta_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{n_i})] = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{3.2}$$

где n_i – количество постоянных c_1^i, $c_{n_i}^i$, входящих в компоненту δ_i вектора δ.

Условие $\det\|R\| \neq 0$ в области G позволяет выражать вектор δ с помощью первого уравнения (3.1) в виде

$$\delta = R^{-1}[\dot{x}_1 - \varphi_1(x, t)] \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим векторную форму (3.2):

$$\mathbf{P}[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0 \tag{3.4}$$

Система (3.4) состоит из s дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет порядок $(1 + n_i)$. Таким образом, вместо (3.1) получается расширенная система

$$\mathbf{P}[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0 \tag{3.5}$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x, u, \delta, t) \tag{3.6}$$

Заметим, что построением системы (3.5), (3.6) вместо (3.1) достигается явная независимость системы уравнений движения от возмущений $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}, t)$, но при этом сохраняется их влияние на начальные условия.

Предположим, что система (3.5) в области G разрешима относительно старших производных переменных x. Тогда систему (3.5), (3.6) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & x_\mu^{(N)} = \tilde{\varphi}_\mu^{(N)}(x, u, t) + F_\mu(x_\mu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu - 1)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \ldots, \dot{u}, u, t) \\ & (\mu = 1, \ldots, l_1) \\ & x_\nu^{(m_\nu)} = \varphi_\nu^{(m_\nu)}(x, u, t) + F_\nu(x_\nu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu - 1)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \ldots, \dot{u}, u, t) \\ & \dot{x}_2 = \varphi_2(x, u, \delta, t) \quad (\nu = l_1 + 1, \ldots, s) \end{aligned} \tag{3.7}$$

где δ имеет выражение (3.3); N – наибольшее из чисел n_i; l_1 – количество уравнений системы (3.5) с наибольшим порядком N дифференцирования по t; x_ν – компоненты вектора x, входящие в (3.5) с порядком дифференцирования меньше N.

Теперь пусть программное многообразие задано в виде $(n - k)$-мерного многообразия

$$\omega(x, t) = 0 \tag{3.8}$$

Заметим, что k-мерная вектор-функция ω в (3.8) является непрерывной и N раз дифференцируемой в области G.

Дифференцируя (3.8) по t N раз, получим

$$\omega^{(N)} = \frac{\partial\omega}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial\psi}{\partial u}u^{(N-1)} + F(x^{(N-1)}, \ldots, \dot{x}, u^{(N-2)}, \ldots, \dot{u}, u, t) \tag{3.9}$$

где F – часть $\omega^{(N)}$, не содержащая $u^{(N-1)}$; $\tilde{x}$ – вектор с компонентами x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, l_1)$; ψ – вектор с компонентами $\tilde{\varphi}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, l_1)$.

Приравниваем правую часть (3.9) произвольной k-мерной вектор-функции

$$\Phi(\omega^{(N-1)}, \ldots, \dot{\omega}, \omega, x^{(N-1)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \ldots, \dot{u}, u, t)$$

удовлетворяющей условию

$$\Phi(0, \ldots, 0, 0, x^{(N-1)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \ldots, \dot{u}, u, t) \equiv 0$$

и обладающей способностью обеспечивать асимтотическую устойчивость "в большом" тривиального решения $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0$, …, $\omega^{(N-1)} = 0$ уравнения $\omega^{(N)} = \Phi$. Тогда для определения r компонентов вектора $u^{(N-1)}$ получим k конечных уравнений вида

$$\Omega u^{(N-1)} = Q(x^{(N-1)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \ldots, \dot{u}, u, t)$$
$$\Omega = \frac{\partial\omega}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad Q = \Phi - F \tag{3.10}$$

Предположим, что $\det|\Omega\Omega^T| \neq 0$ в области G. В этом случае общее решение системы (3.10) при $r \geq k$ имеет вид [7]:

$$\mathbf{u}^{(N-1)} = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}Q + [E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega]\tilde{\mathbf{u}} \tag{3.11}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ – произвольная r-мерная вектор-функция, E – единичная $(r \times r)$-матрица.

Уравнение (3.11) и есть множество искомых дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость "в большом" и интегральность многообразия (3.8) при действии на исходную систему возмущений $\delta(\mathbf{c}, t)$. Заметим, что при $r = k$ уравнение (3.11) становится единственным, так как при этом $[E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega] = 0$ в силу того, что матрица Ω является квадратной.

Следует особо отметить, что некоторые элементы вектора ω в (3.8) могут не содержать переменных x_μ или одновременно и переменных x_ν. При этом такие элементы вектора ω необходимо дифференцировать по t в первом случае m_ν раз, а во втором один раз. В этих случаях в систему конечных уравнений (3.10) могут войти элементы вектора u со старшими производными разных порядков. Систему (3.10) в таких случаях следует решать относительно старших производных всех элементов вектора u. Тогда система дифференциальных уравнений регуляторов будет состоять из уравнений разных порядков относительно производных элементов вектора u.

Отметим, что метод решения задачи квазиинвариантности одного из частных решений уравнения (3.1), т.е. при задании программного многообразия (3.8) с нулевой мерой, способ использования дифференциального оператора (3.2) был предложен в работе [8]. В той же работе предложен один из способов построения таких операторов и приведены некоторые операторы для наиболее характерных типов возмущений.

4. Построение уравнений регулятора системы квазиинвариантной стабилизации программной ориентации преследующего движения тела по кривой погони. Рассмотрим уравнения движения преследующего тела в виде (1.4), а программную ориентацию тела зададим в виде [5]:

$$\omega_1^i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \omega_2^i = \mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\upsilon} = 0 \ (i = 1, 2) \tag{4.1}$$

где $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – орты осей cx, cy; $\mathbf{e}$ – орт вектора $\mathbf{co}$ линии визирования; $(\cdot)$ – знак скалярного произведения. Предположим, что $\det\|R_1\| \neq 0$.

Вектор возмущений зададим в виде

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\sin(\mathbf{p}t + \mathbf{c}_3) \tag{4.2}$$

зависящем от 9-ти случайных постоянных элементов трехмерных постоянных векторов $\mathbf{c}_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$; $\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ – заданный постоянный трехмерный вектор.

Поставим задачу: построить множество дифференциальных уравнений регулятора, определяющего изменения векторов управления $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ так, чтобы обеспечивалась интегральность и асимптотическая устойчивость "в большом" программного многообразия (4.1) системы (1.4) при любых случайных значениях постоянных c_i, входящих в выражение (4.2) возмущающего вектора $\boldsymbol{\delta}$.

Заметим, что (4.2) является общим решением системы дифференциальных уравнений $\delta_i^{(3)} + \tilde{p}^2\dot{\delta}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), которая может быть представлена в следующей векторной форме:

$$\boldsymbol{\delta}^{(3)} + \tilde{p}\dot{\boldsymbol{\delta}} = 0 \tag{4.3}$$

где $\tilde{p}$ – диагональная матрица (3×3) с элементами $\tilde{p}_i^2$.

Из первого уравнения системы (1.4) имеем

$$\boldsymbol{\delta} = R_1^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - R_1^{-1}I^{-1}(I\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{M}_*) - R_1^{-1}\mathbf{u}_1 \tag{4.4}$$

Умножая (4.3) на матрицу R_1, которую будем предполагать постоянной, и подставляя в него значения $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ и $\boldsymbol{\delta}^{(3)}$, полученных дифференцированием (4.4) по t, имеем

$$\boldsymbol{\omega}_0^{(4)} = \frac{d^3}{dt^3}[I^{-1}(I\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{M}_*)] + \mathbf{u}_1^{(3)} - \tilde{p}\frac{d}{dt}[\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - I^{-1}(I\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{M}_*) - \mathbf{u}_1] \tag{4.5}$$

Присоединим к этому уравнению второе уравнение системы (1.4), подставляя в него выражение (4.4):

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = \mathbf{f}/m + \mathbf{u}_2 + R_2R_1^{-1}[\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - I^{-1}(I\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{M}_*) - \mathbf{u}_1] \tag{4.6}$$

Дифференцируя (4.1) по t, получим

$$\frac{d^5\omega_1^i}{dt^5} = \frac{d^5\mathbf{k}_i}{dt^5}\cdot\mathbf{e} + \mathbf{k}_i\cdot\frac{d^5\mathbf{e}}{dt^5}, \quad \frac{d\omega_2^i}{dt} = \frac{d\mathbf{k}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{k}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} \tag{4.7}$$

Для производных векторов $\mathbf{k}_i$ имеет место формула Пуассона $\dot{\mathbf{k}}_i = \boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{k}_i$. Следовательно, имеем

$$\mathbf{k}_i^{(\nu)} = \boldsymbol{\omega}_0^{(\nu-1)}\times\mathbf{k}_i + \boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{k}_i^{(\nu-1)} \quad (\nu = 2, 3, 4, 5)$$

Подставим эти выражения в (4.7). Тогда

$$\begin{aligned} &d^5\omega_1^i/dt^5 = \boldsymbol{\omega}_0^{(4)}\cdot(\mathbf{k}_i\times\mathbf{e}) + \boldsymbol{\omega}_0\cdot(\mathbf{k}_i^{(4)}\times\mathbf{e}) + \mathbf{k}_i\cdot\mathbf{e}^{(5)} \\ &d\omega_2^i/dt = (\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{k}_i)\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{k}_i\cdot\dot{\boldsymbol{\upsilon}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.8) выражения (4.5), (4.6), получим

$$\begin{aligned} &d^5\omega_1^i/dt^5 = (\mathbf{k}_i\times\mathbf{e})\cdot\mathbf{u}_1^{(3)} + F_1^i(\ddot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_1, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\omega}_0^{(3)}, \ddot{\boldsymbol{\omega}}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \boldsymbol{\omega}_0, t) \\ &d\omega_2^i/dt = \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{u}_2 + F_2^i(\mathbf{u}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{f}, m, I, \mathbf{M}_*, R_2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

где F_1^i – члены, не содержащие $\mathbf{u}_1^{(3)}$; F_2^i – члены, не содержащие $\mathbf{u}_2$.

Приравниваем правые части уравнений (4.9), соответственно, двумерным вектор-функциям

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = -a_1\boldsymbol{\omega}_1^{(4)} - a_2\boldsymbol{\omega}_1^{(3)} - a_3\ddot{\boldsymbol{\omega}}_1 - a_4\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - a_5\boldsymbol{\omega}_1$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = -a_6\boldsymbol{\omega}_2$$

где a_i ($i = 1, \ldots, 5, 6$) – произвольные (2×2) постоянные матрицы такие, что вещественные части корней характеристических уравнений, соответствующих системе

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(5)} + a_1\boldsymbol{\omega}_1^{(4)} + a_2\boldsymbol{\omega}_1^{(3)} + a_3\ddot{\boldsymbol{\omega}}_1 + a_4\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + a_5\boldsymbol{\omega}_1 = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + a_6\boldsymbol{\omega}_2 = 0$$

являются отрицательными. Здесь $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ двумерные векторы с элементами ω_1^i, ω_2^i.

После этого получим

$$\Omega_1\mathbf{u}_1^{(3)} = \mathbf{Q}_1, \quad \Omega_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{Q}_u = \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{F}_i \ (i = 1, 2)$$

$$\Omega_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & -(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}_3) & (\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}_2) \\ (\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}_3) & 0 & -(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}_1) \end{matrix} \right\|, \quad \Omega_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \tag{4.10}$$

где Ω_1 и Ω_2 – (2×3)-матрицы, элементы строк которых, соответственно, равны элементам векторов ($\mathbf{k}_i \times \mathbf{e}$) и $\mathbf{k}_i$.

При $\det\|\Omega_i\Omega_i^T\| \neq 0$ общее решение уравнений (4.10) может быть представлено в виде [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{(3)} &= \Omega_1^T(\Omega_1\Omega_1^T)^{-1}\mathbf{Q}_1 + [E - \Omega_1^T(\Omega_1\Omega_1^T)^{-1}\Omega_1]\mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2 &= \Omega_2^T(\Omega_2\Omega_2^T)^{-1}\mathbf{Q}_2 + [E - \Omega_2^T(\Omega_2\Omega_2^T)^{-1}\Omega_2]\mathbf{u}_2^0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где E – единичная (3×3)-матрица; $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{u}_2^0$ – произвольные трехмерные вектор-функции.

Таким образом, построено множество уравнений (4.11) регуляторов, присоединяемых к уравнениям объекта управления (1.2), которые обеспечивают интегральность и асимптотическую устойчивость "в большом" программного многообразия (4.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00664) и Минобразнауки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кан В.Л., Кельзон А.С.* Теория пропорциональной навигации. Л.: Судостроение, 1965. 423 с.
2. *Кулебакин В.С.* О применимости принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 2. С. 231–234.
3. *Петров Б.Н.* О реализуемости условий инвариантности // Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Тр. совещ. 1958. Киев: Изд-во АН УССР, 1959. С. 59–80.
4. *Уланов Г.М., Птичкин В.А.* Статистическая оптимизация и теория $K(D)$-изображений // Теория инвариантности в системах автоматического управления. Тр. 2-го Всесоюз. совещ. М.: Наука, 1964. С. 109–114.
5. *Мухаметзянов И.А.* Об условиях инвариантности и качественной стабилизации программной ориентации преследующего тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 36–42.
6. *Мухаметзянов И.А.* Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по заданной программе // Тр. Ун-та дружбы народов. Теоретическая механика. М.: Изд-во УДН, 1963. Т. 1. Вып. 1. С. 52–55.
7. *Мухаметзянов И.А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 16–23.
8. *Фоменко О.Н.* Квазиинвариантные оптимальные системы автоматического управления // Автоматика и телемеханика. 1970. № 2. С. 145–148.

Москва

Поступила в редакцию
25.02.2004