**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006**

УДК 531.3

© 2006 г. **Г.Г. ДЕНИСОВ, В.В. НОВИКОВ**

К ПРОБЛЕМЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В соответствии с теоремой Кельвина неустойчивость при одних консервативных силах систем с четной степенью неустойчивости можно стабилизировать введением гироскопических сил. Обычно гироскопическая стабилизация демонстрируется на системе с двумя степенями свободы или на системе с $2n$ степенями свободы, распадающейся на n несвязанных систем. При этом для системы (или для каждой из образовавшихся независимых систем) определяется значение параметра гироскопических сил, начиная с которого имеет место стабилизация.

В данной работе рассматривается система с четырьмя взаимосвязанными степенями свободы, которая стабилизируется одними и теми же гироскопическими силами. Оказывается, что в этом случае условия стабилизации системы имеют иной вид: значения параметра гироскопических сил, обеспечивающих устойчивость системы, принадлежат некоторому конечному интервалу, т.е. в отличие от систем с двумя степенями свободы область изменения параметра оказывается ограниченной и сверху.

Классическим примером, иллюстрирующим теорему Кельвина, является задача об устойчивости волчка Лагранжа (например, [1]), уравнения движения которого можно привести к виду

$$\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - \delta\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} - H\dot{\alpha} - \delta\beta = 0$$

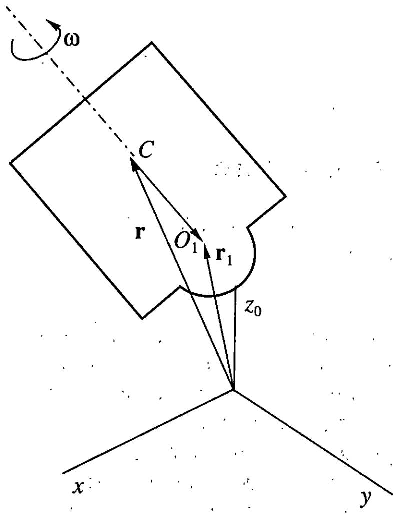
где α, β, задают малые отклонения оси симметрии волчка относительно неподвижной вертикальной оси, параметр $H = \omega C/A$ (ω – угловая скорость вращения, C/A – отношение осевого и экваториального моментов инерции), а $\delta = mgl/A$ (m – масса, l – расстояние от точки опоры до центра масс волчка).

Поскольку центр масс находится выше точки опоры, в отсутствие вращения обе координаты неустойчивы. Систему можно стабилизировать добавлением гироскопических сил. Перейдем к новым переменным $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$. В этих переменных два интеграла системы – интеграл энергии и проекции момента количества движения на вертикальное направление, имеют вид

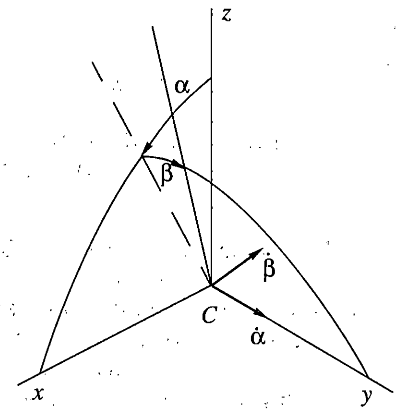
$$2E = x_2^2 + x_4^2 - \delta(x_1^2 + x_3^2)$$

$$K_z = x_2x_3 - x_1x_4 + H(x_1^2 + x_3^2)/2$$

Линейную связку интегралов $V = 2E + bK_z$ будем рассматривать в качестве функции Ляпунова [2]. Воспользовавшись критерием Сильвестра, можно убедиться, что функция V является определенно положительной при выполнении условия $H - \sqrt{H^2 - 4\delta} < b < H + \sqrt{H^2 - 4\delta}$. Отсюда следует, что при $H^2 > 4\delta$ можно образовать



Фиг. 1



Фиг. 2

определенно положительную функцию V, которая в силу уравнений движения имеет равную нулю производную по времени. Это неравенство является условием гироскопической стабилизации рассмотренной системы.

Теперь рассмотрим более сложную задачу об устойчивости тела, опирающегося без трения на вертикальный стержень, закрепленный в нижней точке. Поверхность тела в месте контакта со стержнем считается сферической (фиг. 1). Тело вращается с угловой скоростью ω. Демпфирующие силы в расчет не принимаются.

Неподвижную систему координат $Oxyz$ свяжем со стержнем так, что ось z ориентирована вдоль него. Радиус-вектор центра сферической поверхности обозначим $\mathbf{r}_1$, положение центра масс тела задается радиус-вектором $\mathbf{r}$. Связь между ними имеет вид $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = -a(\sin\alpha\cos\beta\mathbf{i} + \sin\beta\mathbf{j} + \cos\alpha\cos\beta\mathbf{k})$, a – расстояние между центром сферы и центром масс (CO_1 на фиг. 1). Углы α и β, характеризующие положение вектора $\mathbf{a}$ в системе координат $Oxyz$, показаны на фиг. 2.

Точка контакта стержня с ротором имеет координаты $(0, 0, z_0)$ и принадлежит шаровой поверхности. Отсюда следует уравнение голономной связи $x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - z_0)^2 = R^2$, где R – радиус сферической поверхности. В координатах центра масс оно запишется следующим образом:

$$(x - a\sin\alpha\cos\beta)^2 + (y - a\sin\beta)^2 + (z - a\cos\alpha\cos\beta - z_0)^2 = R^2$$

Отсюда можно выразить координату центра масс тела при малых отклонениях от состояния равновесия

$$z = z_0 + a\cos\alpha\cos\beta + (R^2 - x_1^2 - y_1^2)^{1/2} \approx z_0 + a - (\alpha^2 + \beta^2)a/2 + R - (x_1^2 + y_1^2)/2R$$

Функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид

$$L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)m/2 + (\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + \dot{\beta}^2)A/2 + (\omega + \dot{\alpha}\sin\beta)^2 C/2 - mgz$$

где m – масса, A и C – моменты инерции тела.

В дальнейшем изучаются малые колебания тела относительно состояния равновесия $\alpha_0 = \beta_0 = x_0 = y_0 = 0$, $z = z_0 + h$, h – расстояние между точкой опоры и центром масс в состоянии равновесия. Запишем функцию Лагранжа, опуская члены выше второго порядка малости и исключая z:

$$L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)m/2 + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)A/2 + \omega^2 C/2 + C\omega\dot{\alpha}\beta -$$
$$-mg\{z_0 + a - (\alpha^2 + \beta^2)a/2 - [(x - a\alpha)^2 + (y - a\beta)^2]/2R\}$$

Уравнения движения тела после перехода к безразмерным переменным и параметрам принимают вид

$$\ddot{x} = x - \delta\alpha, \quad \ddot{y} = y - \delta\beta$$

$$\ddot{\alpha} = -\delta x - H\dot{\beta} + \chi\alpha, \quad \ddot{\beta} = -\delta y + H\dot{\alpha} + \chi\beta$$

$$\delta = \frac{a}{l}, \quad \chi = \frac{(h-R)h}{l^2}, \quad H = \frac{C}{A}\sqrt{\frac{R}{g}}\omega$$

Здесь принято в качестве масштабов длины $l = (A/m)^{1/2}$, времени $t^* = (R/g)^{1/2}$.

В отсутствие вращения $\omega = 0$, и при $\chi > 0$ система неустойчива по каждой из четырех степеней свободы. С помощью прямого метода Ляпунова выясним условия ее гироскопической стабилизации. Заметим, что гироскопические силы присутствуют лишь в одной паре уравнений.

Система имеет следующие четыре интеграла, первые два из которых отвечают сохранению энергии и проекции момента количества движения тела на ось z. В переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = \alpha$, $x_6 = \dot{\alpha}$, $x_7 = \beta$, $x_8 = \dot{\beta}$ они имеют следующий вид:

$$E = V_1 = (-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - \chi x_5^2 + x_6^2 - \chi x_7^2 + x_8^2)/2 + \delta x_1 x_5 + \delta x_3 x_7$$

$$K_z = V_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_6 x_7 - x_5 x_8 + H(x_5^2 + x_7^2)/2$$

$$V_3 = x_1 x_8 - x_2 x_7 + x_4 x_5 - x_3 x_6 - \frac{H}{2\delta}(x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 - x_8^2) + \frac{1-\chi}{\delta}(x_5 x_8 - x_6 x_7)$$

$$V_4 = x_2 x_6 + x_4 x_8 + \frac{1-\chi}{2\delta}(x_6^2 + x_8^2) - H\left(x_4 x_5 - x_2 x_7 + \frac{1}{\delta}x_5 x_8 - \frac{1}{\delta}x_6 x_7\right) +$$
$$+\frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2)\delta + \frac{1}{2\delta}(H^2 + \delta^2 + \chi^2 - \chi)(x_5^2 + x_7^2) - \chi(x_1 x_5 + x_3 x_7)$$

Линейную связку этих интегралов рассмотрим в качестве функции Ляпунова

$$V = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3 + V_4 = \sum_{i,k=1}^{8} a_{ik} x_i x_k$$

где отличные от нуля коэффициенты квадратичной формы V равны

$$a_{11} = a_{33} = \delta - b_1, \quad a_{14} = -a_{23} = -b_2, \quad a_{15} = a_{37} = \delta b_1 - \chi$$

$$a_{22} = a_{44} = b_1, \quad a_{26} = a_{48} = 1, \quad a_{27} = -a_{45} = -b_3 + H$$

$$a_{18} = -a_{36} = b_3, \quad a_{55} = a_{77} = -\chi b_1 + Hb_2 - \frac{H}{\delta}b_3 + \frac{H^2+\delta^2+\chi(\chi-1)}{\delta}$$

$$a_{66} = a_{88} = b_1 + \frac{H}{\delta}b_3 + \frac{1-\chi}{\delta}, \quad a_{58} = -a_{67} = -b_2 + \frac{1-\chi}{\delta}b_3 - \frac{H}{\delta}$$

В соответствии с критерием Сильвестра функция V будет определенно положительной при условии, что все главные миноры матрицы a_{ik} будут больше нуля. Из общего числа восьми таких неравенств необходимо и достаточно удовлетворить только следующим:

$$b_1 > 0, \quad b_1(\delta - b_1) - b_2^2 > 0, \quad q_2 > 0, \quad q_1q_2 - q_3^2 > 0$$

$$q_1 = a_{55} - \frac{a_{27}^2}{b_1} - \frac{(b_1a_{15} - b_2a_{27})^2}{b_1(a_{11}b_1 - b_2^2)}, \quad q_2 = a_{66} - \frac{1}{b_1} - \frac{(b_1b_3 + b_2)^2}{b_1(a_{11}b_1 - b_2^2)}$$

$$q_3 = -a_{58} - \frac{1}{b_1}a_{27} + \frac{b_1a_{15} - b_2a_{27}}{a_{11}b_1 - b_2^2}\left(b_3 + \frac{b_2}{b_1}\right)$$

Второе неравенство эквивалентно неравенству $(b_1 - \delta/2)^2 + b_2^2 < \delta^2/4$ и означает, что b_1, b_2 принадлежат кругу радиуса $\delta/2$ с центром в точке $b_1 = \delta/2$, $b_2 = 0$. Из условия $q_2 > 0$ следует, что величина H должна быть достаточно большой, а последнее неравенство, для выполнения которого необходимо $q_1 > 0$, ограничивает H как снизу, так и сверху (неравенство квадратично по H).

Приведенные неравенства в пространстве коэффициентов b_1, b_2, b_3 выделяют область, отвечающую положительной определенности функции V, по которой определяется интервал изменения параметра гироскопических сил H, стабилизирующих систему. Эта область зависит от параметров δ и χ. Для оценки их величин рассмотрим эквивалентную исходной систему уравнений

$$\ddot{u} - u + \delta\nu = 0, \quad \ddot{\nu} - iH\dot{\nu} - \chi\nu + \delta u = 0$$

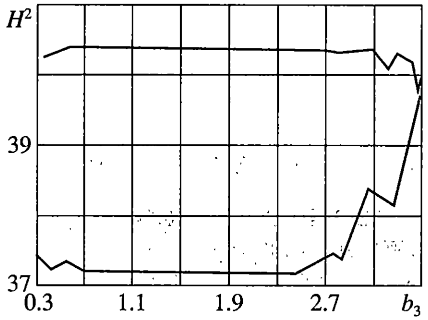
$$u = x + iy, \quad \nu = \alpha + i\beta, \quad i = \sqrt{-1}$$

Отыскивая решение в виде $u = A\exp(iqt)$, $\nu = B\exp(iqt)$, приходим к характеристическому уравнению:

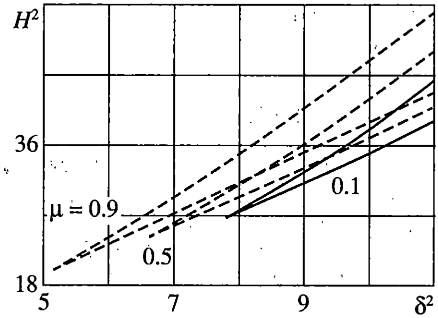
$$q^4 - Hq^3 + (1+\chi)q^2 - Hq - \delta^2 + \chi = 0$$

Устойчивость системы имеет место, когда все корни этого уравнения являются действительными и отличными от нуля. При $\chi = \delta^2$ один из корней равен нулю, а условие действительности всех корней кубического уравнения позволяет указать интервал для параметра гироскопических сил $H_1^2 < H^2 < H_2^2$, где $H_{1,2}^2 = 1/8\delta^2 + 5/2\delta^2 - 1 \mp 1/8\delta(\delta^2 - 8)^{3/2}$.

Если χ не совпадает с δ^2, но различие между ними мало ($|\delta^2 - \chi| \ll 1$), то вместо нулевого появляется малый действительный корень, а остальные корни характеристического полинома мало отличаются от корней рассмотренного кубического уравнения, оставаясь действительными при $\delta^2 > 8$, т.е. указанный интервал изменения H^2 можно считать областью устойчивости системы. Отсюда следует, что коэффициент связи между уравнениями поступательного и углового движений тела должен быть достаточно большим



Фиг. 3



Фиг. 4

$\delta^2 > 8$. С увеличением δ^2 интервал устойчивости увеличивается вместе с увеличением среднего H^2, а при $\delta^2 \to 8$ этот интервал стягивается в точку $H_{1,2}^2 = 27$.

Приведем результаты расчета области устойчивости системы в случае $\delta = 3.209$, $\chi = 10.4$ по связке интегралов V. Область положительной определенности V является частью пространства b_1, b_2, b_3 внутри цилиндра радиуса δ с центром в точке $b_1 = \delta/2$, $b_2 = 0$ и образующей, параллельной оси b_3. На фиг. 3 показаны верхняя и нижняя границы параметра H^2 в различных сечениях этой области $b_3 = \text{const}$. Отсюда находим наибольший интервал изменения H^2 – область устойчивости системы $37.1 < H^2 < 40.4$. При каждом b_3 этот интервал изменения H^2 достигается при определенных значениях двух других коэффициентов. В частности, $b_3 = 1.3$ отвечают $b_1 = 1.7$, $b_2 = -0.904$.

На фиг. 4 показаны области устойчивости системы при различных значениях величины $\mu = \chi - \delta^2$. Область устойчивости находится между двумя кривыми, имеющими общее начало и расходящимися с ростом δ^2 в виде клина, причем с увеличением параметра μ начальная точка смещается в область меньших δ^2.

Таким образом, механическая система, описываемая двумя парами взаимосвязанных уравнений, в которой действуют только потенциальные силы и которая неустойчива, может быть стабилизирована введением гироскопических сил лишь в одну пару уравнений. При этом необходимо наличие достаточно большой связи между подсистемами (достаточно большое δ^2). Величина параметра гироскопических сил H должна выбираться из интервала, зависящего от параметра δ^2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00921, 06-01-00368).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
1.12.2003