

УДК 539.3

© 2006 г. П.П. КРАСНЮК

## **ТЕРМОУПРУГОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦА И ЦИЛИНДРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ФРИКЦИОННОМ ТЕПЛОБРАЗОВАНИИ**

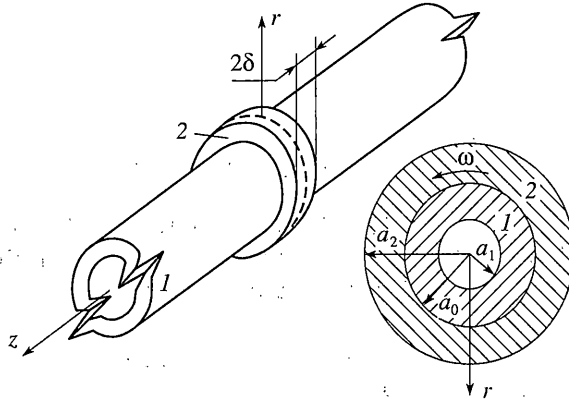
Широкое применение в машиностроении контактных узлов, состоящих из обжатого бандажом упругого цилиндра, делает актуальным исследования соответствующих контактных задач. И если взаимодействие жесткого бандажа с упругим цилиндром достаточно полно рассмотрено в [1], то контакт упругих тел еще требует своего анализа. Особую сложность здесь вызывает отсутствие точных аналитических решений дифференциальных уравнений термоупругости для ограниченных тел. Поэтому во многих исследованиях прибегают к моделированию контакта на основании обобщения классического подхода Герца. В частности, в [2] рассмотрена задача взаимодействия длинного цилиндра с упругим бандажом, когда радиальные перемещения последнего можно аппроксимировать перемещениями от тех же силовых факторов поверхности длинной цилиндрической шахты в упругом пространстве, что сделало возможным привести поставленную задачу к интегральному уравнению относительно контактного давления.

Другой подход сопряжен с использованием усреднения по площадке контакта граничных условий, что позволяет выявить основные закономерности в поведении исследуемых трибосистем и часто получить приближенные аналитические формулы для такого класса задач, точное решение которых сопряжено со значительными аналитическими и вычислительными трудностями. Этот приём в полной мере использован в [3], где проанализирован случай обжатия длинного цилиндра тонким упругим кольцом и получена аналитическая формула для контактного давления.

Используя приведенный в последней работе подход, это исследование рассматривает новую термоупругую задачу взаимодействия пустотелого цилиндра и надетой на него без натяжения кольцевой пластины постоянной толщины, когда их контакт сопровождается нестационарным теплообразованием от действия сил трения. Поставленная задача приведена к системе интегральных уравнений, для решения которой предложена эффективная методика. В частном случае стационарного теплообразования получена аналитическая формула для определения контактного давления.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим трибосистему, состоящую из длинного упругого цилиндра (фиг. 1) с внутренним радиусом  $a_1$  и внешним  $a_0$ , на который посажена тонкая кольцевая пластина с внутренним радиусом  $a_0$  и внешним  $a_2$  постоянной толщины  $2\delta$  (где  $\delta$  – мало по отношению к  $a_0$ ). На поверхностях  $r = a_j$  ( $j = 1, 2$ ) задаются радиальные напряжения  $q_j$ , зависящие от времени. Кроме того, напряжение  $q_1$  изменяется вдоль оси цилиндра, а изменением  $q_2$  вдоль боковой поверхности пластины пренебрегаем.

Предположим, что пластина вращается относительно цилиндра с малой угловой скоростью  $\omega$ , зависящей от времени. За счет действия сил трения, возникающих на соприкасаемых поверхностях тел и подчиненных закону Амонтона, происходит теплообразо-



Фиг. 1

вание. Тепловой контакт тел неидеальный, а между не контактирующими поверхностями цилиндра и пластины и окружающей средой нулевой температуры имеет место теплообмен по закону Ньютона.

Пренебрегая динамическими эффектами, которые могут возникнуть в трибосистеме от действия нагружающих факторов, определим распределение напряжений, перемещений, температуры и тепловых потоков в трибосистеме при условии учета в кольцевой пластине центробежных сил инерции.

Выбирая за нулевое сечение, проходящее через середину пластины, соотнесим эти тела с цилиндрической системой координат, где ось  $z$  совпадает с осью цилиндра. Дополнительно предполагаем, что распределение нагрузки  $q_1(z, \tau)$  является симметричным относительно оси  $z = 0$ , а его поведение на бесконечности таково, что допускает возможность использования при построении решения задачи интегрального косинус преобразования Фурье.

Тогда, при сделанных предположениях для цилиндра рассмотрим осесимметричную задачу термоупругости, которая математически приводится к построению решения системы, включающей в себя дифференциальные уравнения теплопроводности

$$\partial_r^2 T_1 + r^{-1} \partial_r T_1 + \partial_z^2 T_1 = k_1^{-1} \partial_\tau T_1 \quad (1.1)$$

равновесия

$$\partial_r \sigma_r^{(1)} + r^{-1} (\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}) + \partial_z \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \partial_r \tau_{rz}^{(1)} + r^{-1} \tau_{rz}^{(1)} + \partial_z \sigma_z^{(1)} = 0 \quad (1.2)$$

совместности деформаций

$$\partial_r \epsilon_\theta^{(1)} + r^{-1} (\epsilon_\theta^{(1)} - \epsilon_r^{(1)}) = 0, \quad r \partial_z^2 \epsilon_\theta^{(1)} + \partial_r \epsilon_z^{(1)} = \partial_z \gamma_{rz}^{(1)} \quad (1.3)$$

и соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E_1 \epsilon_r^{(1)} &= \sigma_r^{(1)} - \nu_1 (\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) + E_1 \alpha_1 T_1, & E_1 \epsilon_\theta^{(1)} &= \sigma_\theta^{(1)} - \nu_1 (\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) + E_1 \alpha_1 T_1 \\ E_1 \epsilon_z^{(1)} &= \sigma_z^{(1)} - \nu_1 (\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}) + E_1 \alpha_1 T_1, & E_1 \gamma_{rz}^{(1)} &= 2(1 + \nu_1) \tau_{rz}^{(1)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

А в пластине реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, и поэтому здесь получим систему, состоящую из уравнения теплопроводности тонких пластин [4]:

$$\partial_r^2 T_2 + r^{-1} \partial_r T_2 - \kappa^2 T_2 = k_2^{-1} \partial_\tau T_2 \quad (1.5)$$

и уравнения термоупругости с учетом центробежных сил инерции

$$\partial_r^2 u_r^{(2)} + r^{-1} \partial_r u_r^{(2)} - r^{-2} u_r^{(2)} + \omega^2(\tau) c^{-2} r = \alpha_2(1 + \nu_2) \partial_r T_2, \quad c = \sqrt{E_2 / (\rho_2(1 - \nu_2))} \quad (1.6)$$

При этом решения систем дифференциальных уравнений должны удовлетворять начальным

$$T_1(r, z, 0) = 0, \quad T_2(r, 0) = 0 \quad (1.7)$$

а также граничным и контактными условиям

$$\partial_r T_1 = \gamma_1 T_1, \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r = a_1 \quad (1.8)$$

$$\partial_r T_2 = -\gamma_2 T_2, \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2(\tau) \quad \text{при} \quad r = a_2 \quad (1.9)$$

$$\lambda_1 \langle \partial_r T_1 \rangle - \lambda_2 \partial_r T_2 = f\omega(\tau) a_0 \langle p(z, \tau) \rangle; \quad \lambda_1 \langle \partial_r T_1 \rangle + \lambda_2 \partial_r T_2 + h(\langle T_1 \rangle - T_2) = 0 \quad (1.10)$$

при  $r = a_0$

$$\langle \sigma_r^{(1)} \rangle = \sigma_r^{(2)} = -\langle p(z, \tau) \rangle, \quad \langle u_r^{(1)} \rangle = u_r^{(2)} \quad (|z| \leq \delta) \quad \text{при} \quad r = a_0 \quad (1.11)$$

$$\partial_r T_1 = -\gamma_{0,1} T_1, \quad \sigma_r^{(1)} = 0 \quad (|z| > \delta), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \quad (|z| < \infty) \quad \text{при} \quad r = a_0 \quad (1.12)$$

Здесь  $r, z$  – радиальная и осевая координаты;  $\tau$  – время;  $p(z, \tau)$  – контактное давление;  $\omega(\tau)$  – угловая скорость вращения;  $T_j$  – температура;  $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}, \sigma_z^{(1)}$  – радиальное, тангенциальное и осевое нормальные напряжения;  $\tau_{rz}^{(1)}$  – касательное напряжение;  $\varepsilon_r^{(1)}, \varepsilon_\theta^{(1)}, \varepsilon_z^{(1)}$  – радиальная, тангенциальная и осевая линейные деформации;  $\gamma_{rz}^{(1)}$  – деформация сдвига;  $u_r^{(j)}$  – радиальное перемещение;  $E_j$  – модуль Юнга;  $f, \nu_j, \lambda_j, k_j, \alpha_j, \gamma_j (\gamma_{0,1})$  – соответственно коэффициенты трения, Пуассона, теплопроводности, температуропроводности, линейного теплового расширения и теплообмена;  $h$  – термическая проводимость поверхности контакта;  $\kappa$  – коэффициент теплоотдачи с верхней и нижней плоскостями пластины;  $\rho_2$  – плотность материала пластины;  $j = 1$  соответствует цилиндру,  $j = 2$  – пластине.

Поскольку толщина цилиндрической пластины принимается малой, то на площадке контакта достаточно обеспечить выполнение усредненных по  $z$  теплофизических (1.10) и механических (1.11) контактных условий. На это указывает наличие членов в треугольных скобках для компонент, соответствующих пустотелому цилиндру, где, например

$$\langle u_r^{(1)} \rangle(r, \tau) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u_r^{(1)}(r, z, \tau) dz \quad (1.13)$$

В случае цилиндрической пластины такое соотношение является очевидным и следует из определения обобщенного плоского напряженного состояния.

**2. Построение решения и анализ численного алгоритма.** Для того чтобы иметь возможность построить решение, необходимо разделить указанную соотношениями (1.1)-(1.12) начально-граничную задачу термоупругости на две независимые. Этого можно достичь, если ввести в рассмотрение две неизвестные функции:

$$f_1(z, \tau) = (\partial_r T_1(a_0, z, \tau) + \gamma_{0,1} T_1(a_0, z, \tau)) H(\delta - |z|) \quad \text{и} \quad f_2(\tau) = -\partial_r T_2(a_0, \tau) \quad (2.1)$$

где  $H(z)$  – функция Хевисайда [5]. Тогда, применив конечное интегральное преобразование Ханкеля, интегральное преобразование Фурье (для цилиндра) и следствие инте-

грального преобразования Лапласа – теорему Дюамеля [5] к соотношениям (1.1)–(1.9), (1.12) и (2.1), для каждой из составляющих трибосистемы запишем интегральные изображения для искомых компонент температурного и напряженно-деформированного состояния тел относительно функций  $f_j$  и неизвестного контактного давления.

Опустив промежуточные выкладки, детально изложенные в [6, 7], запишем только формулы для контактной температуры и радиальных перемещений поверхности  $r = a_0$  пустотелого цилиндра и цилиндрической пластины

$$T_1(a_0, z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int \int_{0-\delta}^{\tau \delta} f_1(t, \eta) \Phi_1(a_0, z-t, \tau-\eta) dt d\eta \quad (2.2)$$

$$u_r^{(1)}(a_0, z, \tau) = \frac{1-v_1^2 a_0}{E_1 \pi} \int_{-\delta}^{\delta} p(t, \tau) \left[ \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \cos(\xi(z-t)) d\xi \right] dt - \\ - \frac{1-v_1^2 2a_1}{E_1 \pi} \int_0^{\infty} \bar{q}_1(\xi, \tau) \frac{\bar{\Delta}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \cos(\xi z) d\xi + \frac{\alpha_1}{\pi} \partial_\tau \int \int_{0-\delta}^{\tau \delta} f_1(t, \eta) H_1(z-t, \tau-\eta) dt d\eta \quad (2.3)$$

$$T_2(a_0, \tau) = \partial_\tau \int_0^{\tau} f_2(\eta) \Phi_2(a_0, \tau-\eta) d\eta \quad (2.4)$$

$$u_r^{(2)}(a_0, \tau) = -\frac{q_2(\tau)}{E_2} \frac{2a_0 a_2^2}{a_2^2 - a_0^2} + \frac{\langle p(z, \tau) \rangle}{E_2} a_0 \left( \frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + v_2 \right) + \\ + \omega^2(\tau) a_0 \frac{a_2^2(3+v_2) + a_0^2(1-v_2)}{4(1-v_2^2)c^2} - \alpha_2 \frac{2a_0}{a_2^2 - a_0^2} \partial_\tau \int_0^{\tau} f_2(\eta) H_2(\tau-\eta) d\eta \quad (2.5)$$

$$\Phi_1(r, z, \tau) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_{1, sr}(r, \xi) \cos(\xi z) d\xi - a_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_0(\mu_{1, m} r, \mu_{1, m} a_0) U_0(\mu_{1, m} a_0, \mu_{1, m} a_0)}{\mu_{1, m} N_{1, m}^2} \times \\ \times \left[ \exp(-\mu_{1, m} z) \operatorname{erfc} \left( \mu_{1, m} \sqrt{k_1} \tau - \frac{z}{2\sqrt{k_1} \tau} \right) + \exp(\mu_{1, m} z) \operatorname{erfc} \left( \mu_{1, m} \sqrt{k_1} \tau + \frac{z}{2\sqrt{k_1} \tau} \right) \right]$$

$$\bar{\Phi}_{1, sr}(r, \xi) = \\ = \frac{I_0(\xi r) [\xi K_1(\xi a_1) + \gamma_1 K_0(\xi a_1)] + K_0(\xi r) [\xi I_1(\xi a_1) - \gamma_1 I_0(\xi a_1)]}{[\xi I_1(\xi a_0) + \gamma_0 I_0(\xi a_0)] [\xi K_1(\xi a_1) + \gamma_1 K_0(\xi a_1)] - [\xi K_1(\xi a_0) - \gamma_0 K_0(\xi a_0)] [\xi I_1(\xi a_1) - \gamma_1 I_0(\xi a_1)]}$$

$$H_1(z, \tau) = \int_0^{\infty} [\bar{H}_{1, sr}(\xi) + \bar{H}_{1, n}(\xi, \tau)] \cos(\xi z) d\xi$$

$$\bar{H}_{1, sr}(\xi) = \frac{1-v_1^2}{\xi^2} \left( \frac{\bar{\Delta}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \partial_r \bar{\Phi}_{1, sr}(a_1, \xi) - \left[ \frac{\bar{\Delta}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} - \frac{1}{1-v_1} \right] \partial_r \bar{\Phi}_{1, sr}(a_0, \xi) \right)$$

$$\bar{H}_{1, n}(\xi, \tau) = 2(1+v_1) a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_0(\mu_{1, m} a_0, \mu_{1, m} a_0)}{N_{1, m}^2 (\xi^2 + \mu_{1, m}^2)^2} \left[ \xi^2 \left( a_0 \frac{\bar{\Delta}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} U_0(\mu_{1, m} a_0, \mu_{1, m} a_0) - a_1 \frac{\bar{\Delta}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \right) \times \right.$$

$$\times U_0(\mu_{1,m} a_1, \mu_{1,m} a_0) + \mu_{1,m} \left( \frac{\bar{\Delta}_3(\xi)}{\bar{\Delta}_0(\xi)} U_1(\mu_{1,m} a_1, \mu_{1,m} a_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\Delta}_4(\xi)}{\bar{\Delta}_0(\xi)} U_1(\mu_{1,m} a_0, \mu_{1,m} a_0) \right) \exp(-k_1(\xi^2 + \mu_{1,m}^2)\tau)$$

$$\Phi_2(r, \tau) = \Phi_{2,st}(r) + 2a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_0(\mu_{2,m} r, \mu_{2,m} a_0) W_0(\mu_{2,m} a_0, \mu_{2,m} a_0)}{N_{2,m}^2(\kappa^2 + \mu_{2,m}^2)} \exp(-k_2(\kappa^2 + \mu_{2,m}^2)\tau)$$

$$\Phi_{2,st}(r) = -\frac{1}{\kappa} \frac{I_0(\kappa r)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] + K_0(\kappa r)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}{\kappa I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}$$

$$H_2(\tau) = H_{2,st} + H_{2,n}(\tau)$$

$$H_{2,st} = \frac{a_0}{\kappa^2} \frac{a_2 I_1(\kappa a_2)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_2)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}{\kappa^2 I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}$$

$$H_{2,n}(\tau) = 2a_0 a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_1(\mu_{2,m} a_2, \mu_{2,m} a_0) W_0(\mu_{2,m} a_0, \mu_{2,m} a_0)}{N_{2,m}^2(\kappa^2 + \mu_{2,m}^2) \mu_{2,m}} \exp(-k_2(\kappa^2 + \mu_{2,m}^2)\tau)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_0(\xi) &= 4(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2 + a_0^2 \xi^2 + \\ &+ (2(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2)(2(1 - \nu_1) + a_0^2 \xi^2) [I_1(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)]^2 - \\ &- a_1^2 \xi^2 (2(1 - \nu_1) + a_0^2 \xi^2) [I_0(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)]^2 + \\ &+ a_1^2 a_0^2 \xi^4 [I_0(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)]^2 - \\ &- a_0^2 \xi^2 (2(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2) [I_1(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1(\xi) &= 2[1 + (2(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2) [I_1(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)]^2 - \\ &- a_1^2 \xi^2 [I_0(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)]^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_2(\xi) &= 2a_0 \xi [I_1(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)] - \\ &- 2a_1 \xi [I_0(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_3(\xi) &= 2[(2(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2) [I_1(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)] - \\ &- a_1 a_0 \xi^2 [I_0(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_4(\xi) &= -2a_0 \xi [(2(1 - \nu_1) + a_1^2 \xi^2) [I_1(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)] \times \\ &\times [I_1(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_1 \xi)] - a_1^2 \xi^2 [I_0(a_1 \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)] \times \\ &\times [I_0(a_1 \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_1 \xi)]] \end{aligned}$$

$$U_0(\mu r, \mu a_0) = J_0(\mu r) [\mu Y_1(\mu a_0) - \gamma_{0,1} Y_0(\mu a_0)] - Y_0(\mu r) [\mu J_1(\mu a_0) - \gamma_{0,1} J_0(\mu a_0)]$$

$$U_1(\mu r, \mu a_0) = J_1(\mu r)[\mu Y_1(\mu a_0) - \gamma_{0,1} Y_0(\mu a_0)] - Y_1(\mu r)[\mu J_1(\mu a_0) - \gamma_{0,1} J_0(\mu a_0)]$$

$$W_0(\mu r, \mu a_0) = J_0(\mu r) Y_1(\mu a_0) - Y_0(\mu r) J_1(\mu a_0)$$

$$W_1(\mu r, \mu a_0) = J_1(\mu r) Y_1(\mu a_0) - Y_1(\mu r) J_1(\mu a_0)$$

$$N_{1,m}^2 = a_0^2(1 + \gamma_{0,1}^2 \mu_{1,m}^{-2}) U_0^2(\mu_{1,m} a_0, \mu_{1,m} a_0) - a_1^2(1 + \gamma_{1,m}^2 \mu_{1,m}^{-2}) U_0^2(\mu_{1,m} a_1, \mu_{1,m} a_0)$$

$$N_{2,m}^2 = a_0^2 W_0^2(\mu_{2,m} a_0, \mu_{2,m} a_0) - a_2^2(1 + \gamma_{2,m}^2 \mu_{2,m}^{-2}) W_0^2(\mu_{2,m} a_2, \mu_{2,m} a_0)$$

$$\bar{q}_1(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} q_1(z, \tau) \cos(\xi z) dz$$

Здесь  $\bar{q}_1(\xi, \tau)$  – трансформанта Фурье обжимающей нагрузки [5];  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  – функции Бесселя первого и второго рода порядка  $\nu$ ;  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка  $\nu$ ;  $\operatorname{erfc}(z)$  – функция ошибок [8];  $\mu_{1,m}$  – корни характеристического уравнения  $\mu U_1(\mu a_1, \mu a_0) + \gamma_1 U_0(\mu a_1, \mu a_0) = 0$ , а  $\mu_{2,m}$  – корни трансцендентного уравнения  $\mu W_1(\mu a_2, \mu a_0) - \gamma_2 W_0(\mu a_2, \mu a_0) = 0$  ( $\mu \neq 0$ ).

Окончательное решение задачи получим, удовлетворив последние три условия, а именно соотношения контакта (1.10), (1.11). При этом необходимо определить характер изменения вдоль оси цилиндра контактного давления  $p(z, \tau)$  и функции  $f_1(z, \tau)$ .

Относительно контактного давления принимаем, согласно [3]:

$$p(z, \tau) = p_*(\tau)(\delta^2 - z^2)^{\beta-1} \quad (2.6)$$

где  $\beta$  является первым положительным корнем характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi\beta) \sin(\pi\beta) = -\frac{(1 - \nu_1^2) E_2}{(1 - \nu_2^2) E_1} (1 - 2\beta^2 - \cos(\pi\beta)) \quad (2.7)$$

Относительно функций  $f_j$  имеют место варианты, обуславливаемые видом теплофизических контактных условий. Так, при неидеальном тепловом контакте тел (теплофизические граничные условия (1.10)), пренебрегая изменением вдоль оси цилиндра температуры на участке  $r = a_0$ ,  $|z| \leq \delta$ , т.е. предположив  $T_1(a_0, z, \tau) = T_1(a_0, 0, \tau) = T_*(a_0, \tau)$  (это заключение справедливо, если учесть малость величины  $\delta$ ), запишем следующие соотношения:

$$f_1(z, \tau) = \frac{f\omega(\tau)a_0}{2\lambda_1} p(z, \tau) + \left(\gamma_{0,1} - \frac{h}{2\lambda_1}\right) T_*(a_0, \tau) + \frac{h}{2\lambda_1} T_2(a_0, \tau) \quad (2.8)$$

$$f_2(\tau) = \frac{f\omega(\tau)a_0}{2\lambda_2} \langle p(z, \tau) \rangle + \frac{h}{2\lambda_2} T_*(a_0, \tau) - \frac{h}{2\lambda_2} T_2(a_0, \tau)$$

При таком выборе функций  $f_j$  теплофизические контактные условия автоматически удовлетворяются. Поэтому необходимые условия для неизвестных  $T_*(a_0, \tau)$  и  $T_2(a_0, \tau)$  имеем из выражений для температуры цилиндра (2.2) и цилиндрической пластины (2.4). Третье интегральное уравнение получим, удовлетворив условия равенства радиальных перемещений на поверхности контакта из (1.11). Как следствие, имеем

$$T_*(a_0, \tau) - \frac{1}{\pi\delta} \left(\gamma_{0,1} - \frac{h}{2\lambda_1}\right) \partial_\tau \int_0^\tau T_*(a_0, \eta) F_1 \{ \bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau - \eta) \} d\eta -$$

$$-\frac{h}{2\lambda_1\pi\delta}\partial_\tau\int_0^\tau T_2(a_0, \eta)F_1\{\bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau-\eta)\}d\eta - \quad (2.9)$$

$$-\frac{fa_0\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1}(2\delta)^{\beta-1/2}\partial_\tau\int_0^\tau p_*(\eta)\omega(\eta)F_2\{\bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau-\eta)\}d\eta = 0$$

$$T_2(a_0, \tau) + \frac{h}{2\lambda_2}\partial_\tau\int_0^\tau T_2(a_0, \eta)\Phi_2(a_0, \tau-\eta)d\eta - \frac{h}{2\lambda_2}\partial_\tau\int_0^\tau T_*(a_0, \eta)\Phi_2(a_0, \tau-\eta)d\eta - \quad (2.10)$$

$$-\frac{fa_0\sqrt{\pi}}{4\lambda_2}\delta^{2(\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)}\partial_\tau\int_0^\tau p_*(\eta)\omega(\eta)\Phi_2(a_0, \tau-\eta)d\eta = 0$$

$$p_*(\tau)\left[\frac{1-v_1^2}{E_1}\frac{2a_0}{\sqrt{\pi}\delta}(2\delta)^{\beta-1/2}\Gamma(\beta)F_2\left\{\frac{\bar{\Delta}_1(\delta)}{\bar{\Delta}_0(\delta)}\right\} - \frac{\sqrt{\pi}a_0}{2E_2}\delta^{2(\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)}\left(\frac{a_2^2+a_0^2}{a_2^2-a_0^2}+v_2\right)\right] + \quad (2.11)$$

$$+fa_0\partial_\tau\int_0^\tau p_*(\eta)\omega(\eta)\left[\frac{\alpha_1(2\delta)^{\beta-1/2}}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1}\Gamma(\beta)F_2\{\bar{H}_1(\delta, \tau-\eta)\} +$$

$$+\frac{\alpha_2\sqrt{\pi}a_0\delta^{2(\beta-1)}}{2\lambda_2(a_2^2-a_0^2)}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)}H_2(\tau-\eta)\right]d\eta +$$

$$+\partial_\tau\int_0^\tau T_*(a_0, \eta)\left[\frac{\alpha_1}{\pi\delta}\left(\gamma_{0,1}-\frac{h}{2\lambda_1}\right)F_1\{\bar{H}_1(\delta, \tau-\eta)\} + \frac{\alpha_2a_0h}{\lambda_2(a_2^2-a_0^2)}H_2(\tau-\eta)\right]d\eta +$$

$$+\partial_\tau\int_0^\tau T_2(a_0, \eta)\left[\frac{\alpha_1h}{2\pi\delta\lambda_1}F_1\{\bar{H}_1(\delta, \tau-\eta)\} - \frac{\alpha_2a_0h}{\lambda_2(a_2^2-a_0^2)}H_2(\tau-\eta)\right]d\eta =$$

$$= \frac{1-v_1^2}{E_1}\frac{2a_1}{\pi\delta}\int_0^\infty \bar{q}_1(\xi, \tau)\frac{\bar{\Delta}_2(\xi)\sin(\xi\delta)}{\bar{\Delta}_0(\xi)\xi}d\xi - \frac{q_2(\tau)}{E_2}\frac{2a_0a_2^2}{a_2^2-a_0^2} + \frac{\omega^2(\tau)a_0}{4(1-v_2^2)c^2}[a_2^2(3+v_2)+a_0^2(1-v_2)]$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция [8], а функциональные операторы  $F_1$  и  $F_2$  определяются следующими соотношениями:

$$F_1\{f(\delta)\} = \int_0^\infty f(\xi)\frac{1-\cos(2\xi\delta)}{\xi^2}, \quad F_2\{f(\delta)\} = \int_0^\infty f(\xi)\frac{J_{\beta-1/2}(\xi\delta)\sin(\xi\delta)}{\xi^{\beta-1/2}\xi}d\xi$$

При условии идеального теплового контакта ( $h \rightarrow \infty$ ) за искомые функции выбираем  $f_{0,j}(\tau)$  и температуру области контакта  $T_*(a_0, \tau) = T_2(a_0, \tau) = T(\tau)$  при  $|z| \leq \delta$ , связанные с контактным давлением  $p(z, \tau)$  и функциями  $f_j$  следующими зависимостями:

$$f_1(z, \tau) = f_{0,1}(\tau)(\delta^2 - z^2)^{\beta-1} + \gamma_{0,1}T(\tau), \quad f_2(\tau) = f_{0,1}(\tau)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)}\delta^{2(\beta-1)} \quad (2.12)$$

$$\lambda_1 f_{0,1}(\tau) + \lambda_2 f_{0,2}(\tau) = f\omega(\tau)a_0 p_*(\tau)$$

В этом случае задача приводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$T(\tau) = \frac{\gamma_{0,1}}{\pi\delta} \partial_\tau \int_0^\tau T(\eta) F_1 \{ \bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau - \eta) \} d\eta +$$

$$+ \frac{2\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,1}(\eta) F_2 \{ \bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau - \eta) \} d\eta \quad (2.13)$$

$$T(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}\delta^{2(\beta-1)}}{2} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,2}(\eta) \Phi_2(a_0, \tau - \eta) d\eta \quad (2.14)$$

$$(\lambda_1 f_{0,1}(\tau) + \lambda_2 f_{0,2}(\tau)) \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_0}{E_1 \sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) F_2 \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(\delta)}{\bar{\Delta}_0(\delta)} \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\pi}a_0 \delta^{2(\beta-1)}}{2E_2} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \left( \frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + v_2 \right) \right] +$$

$$+ f\omega(\tau) a_0 \left[ \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,1}(\eta) F_2 \{ \bar{H}_1(\delta, \tau - \eta) \} d\eta + \frac{\alpha_2 \sqrt{\pi} a_0}{(a_2^2 - a_0^2)} \delta^{2(\beta-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,2}(\eta) H_2(\tau - \eta) d\eta + \frac{\alpha_1 \gamma_{0,1}}{\pi\delta} \partial_\tau \int_0^\tau T(\eta) F_1 \{ \bar{H}_1(\delta, \tau - \eta) \} d\eta \right] =$$

$$(2.15)$$

$$= f\omega(\tau) a_0 \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_1}{E_1 \pi\delta} \int_0^\infty \bar{q}_1(\xi, \tau) \frac{\bar{\Delta}_2(\xi) \sin(\xi\delta)}{\Delta_0(\xi) \xi} d\xi - \frac{q_2(\tau) 2a_0 a_2^2}{E_2 a_2^2 - a_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2(\tau) a_0}{4(1 - v_2^2) c^2} [a_2^2(3 + v_2) + a_0^2(1 - v_2)] \right]$$

Если же поверхность  $r = a_0$  вне площадки контакта является теплоизолированной ( $\gamma_{0,1} = 0$ ), то задача существенно упрощается: необходимо решить систему только двух интегральных уравнений относительно функций  $f_0, f(\tau)$

$$\frac{2\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,1}(\eta) F_2 \{ \bar{\Phi}_1(a_0, \delta, \tau - \eta) \} d\eta =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\delta^{2(\beta-1)}}{2} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,2}(\eta) \Phi_2(a_0, \tau - \eta) d\eta \quad (2.16)$$

$$(\lambda_1 f_{0,1}(\tau) + \lambda_2 f_{0,2}(\tau)) \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_0}{E_1 \sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \Gamma\beta F_2 \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(\delta)}{\bar{\Delta}_0(\delta)} \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\pi}a_0 \delta^{2(\beta-1)}}{2E_2} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \left( \frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + v_2 \right) \right] +$$



$$\begin{aligned}
 & + f\omega(\tau)a_0 \left[ \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,1}(\eta) F_2 \{ \bar{H}_1(\delta, \tau - \eta) \} d\eta + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha_2 \sqrt{\pi} a_0}{(a_2^2 - a_0^2)} \delta^{2(\beta-1)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + 1/2)} \partial_\tau \int_0^\tau f_{0,2}(\eta) H_2(\tau - \eta) d\eta \right] = \\
 & = f\omega(\tau)a_0 \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_1}{E_1 \pi \delta} \int_0^\infty \bar{q}_1(\xi, \tau) \frac{\bar{\Delta}_2(\xi) \sin(\xi \delta)}{\Delta_0(\xi) \xi} d\xi - \frac{q_2(\tau) 2a_0 a_2^2}{E_2 a_2^2 - a_0^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega^2(\tau) a_0}{4(1 - v_2^2) c^2} [a_2^2(3 + v_2) + a_0^2(1 - v_2)] \right]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Кроме того, если в начальный момент времени  $\omega(0) = 0$ , то  $f_{0,j}(0) = T(0) = 0$ , а контактное давление рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}
 p_*(0) & = \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_1}{E_1 \pi \delta} \int_0^\infty \bar{q}_1(\xi, 0) \frac{\bar{\Delta}_2(\xi) \sin(\xi \delta)}{\Delta_0(\xi) \xi} d\xi - \frac{q_2(0) 2a_0 a_2^2}{E_2 a_2^2 - a_0^2} \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{1 - v_1^2 2a_0}{E_1 \sqrt{\pi} \delta} (2\delta)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) F_2 \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(\delta)}{\bar{\Delta}_0(\delta)} \right\} - \frac{\sqrt{\pi} a_0 \delta^{2(\beta-1)}}{2E_2} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + 1/2)} \left( \frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + v_2 \right) \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Решив эти системы интегральных уравнений, найдем значения функции  $p_*(\tau)$ ,  $f_{0,j}(\tau)$  и температуры в области контакта. Вместе с выражениями для функций  $f_j$  и контактного давления они дают полное решение поставленной задачи, потому что на их основе можем рассчитать поля температур, напряжений и перемещений рассматриваемой трибосистемы.

Полученные выше системы интегральных уравнений решались численным методом с использованием методики дискретизации интегралов по времени на основании схемы, подробно изложенной в [6, 7]. Значения сумм по собственным значениям  $\mu_{j,m}$  в формулах для ядер определялись по методу Фейера [5]. Для получения же значений осциллирующих интегралов в функционалах  $F_1$  и  $F_2$  применялись следующие соображения: промежуток интегрирования  $[0, \infty]$  разделялся на две части  $[0, \xi^*]$  и  $(\xi^*, \infty]$ . Поскольку подинтегральные функции в функционалах убывают по  $\xi$ , то взяв значение  $\xi^*$  достаточно большим, можем пренебречь интегралами по последнему промежутку. Промежуток  $[0, \xi^*]$  разделяем на части, границами которых являются нули осциллирующих функций. Значения интегралов на этих интервалах находим по схеме трапеций [5]. Проверка вычислений производилась дроблением разбиения по времени и по координате  $\xi$ , а также удвоением промежутка интегрирования и увеличением количества членов в суммах по собственным значениям. Относительная погрешность вычислений составляла 2–3%.

**3. Анализ результатов и выводы.** Численный анализ задачи проведен для пары трения сталь–сталь ( $E_j = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_j = 0.3$ ,  $\lambda_j = 50$  Вт/(м · °К),  $k_j = 0.125 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с) и значений основных параметров:  $h = 10$  кВт/(м<sup>2</sup> · °К),  $f = 0.1$ ,  $\gamma_j = 20$  м<sup>-1</sup>,  $\gamma_{0,1} = 0$ ,  $a_1 = 3.5$  см,  $a_0 = 5$  см,  $a_2 = 6$  см,  $\kappa = 0-300$  м<sup>-1</sup>,  $\delta = 0.1-30$  см,  $\rho_2 = 7.8$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha_1 = 1-40 \cdot 10^{-6}$  °К<sup>-1</sup>,  $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$  °К<sup>-1</sup>. Нагрузка на поверхности  $r = a_0$  и относительная угловая скорость вращения изменяются по законам:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad q_2(\tau) & = q_0(1 - \exp(-\varepsilon\tau)), \quad \omega(\tau) = \omega_0 \\
 (b) \quad q_2(\tau) & = q_0, \quad \omega(\tau) = \omega_0(1 - \exp(-\varepsilon\tau))
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$q_0 = 20 \text{ МПа}, \quad \omega_0 = 0-3 \cdot 10^3 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = 0.01 \text{ с}^{-1}$$

Поверхность  $r = a_1$  свободна от напряжений.

При  $\tau \rightarrow \infty$  с использованием соотношений интегрального преобразования Лапласа [5] из полученной выше системы уравнений (2.9)–(2.11) можно получить, например, решение стационарной задачи, для которой имеет место аналитическое решение. В частности, здесь приведем соотношения для контактного давления

$$\begin{aligned}
 p_{st} = & \left[ \frac{1 - \nu_1^2 2a_1}{E_1 \pi \delta} \int_0^\infty \bar{q}_{1, st}(\xi) \frac{\bar{\Delta}_2(\xi) \sin(\xi \delta)}{\Delta_0(\xi) \xi} d\xi - \frac{q_{2, st} 2a_0 a_2^2}{E_2 a_2^2 - a_0^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega_{st}^2 a_0}{4(1 - \nu_2^2) c^2} (a_2^2(3 + \nu_2) + a_0^2(1 - \nu_2)) \right] \times \\
 & \times \left[ \frac{1 - \nu_1^2 2a_0}{E_1 \sqrt{\pi \delta}} (2\delta)^{\beta - 1/2} \Gamma(\beta) F_2 \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(\delta)}{\bar{\Delta}_0(\delta)} \right\} - \frac{\sqrt{\pi} a_0 \delta^{2(\beta - 1)}}{2E_2} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + 1/2) \left( \frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + \nu_2 \right) \right] + \\
 & + f \omega_{st} a_0 \left[ \alpha_1 \left[ \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi \delta \lambda_1}} (2\delta)^{\beta - 1/2} F_2 \{ \bar{H}_{1, st}(\delta) \} + Q_1 \frac{\gamma_{0,1}}{\pi \delta} F_1 \{ \bar{H}_{1, st}(\delta) \} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (Q_2 - Q_1) \frac{h}{2\pi \delta \lambda_1} F_1 \{ \bar{H}_{1, st}(\delta) \} \right] - \alpha_2 \left[ \frac{a_0 \sqrt{\pi} \delta^{2(\beta - 1)}}{2\lambda_2 (a_2^2 - a_0^2)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + 1/2) H_{2, st} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{a_0 h}{\lambda_2 (a_2^2 - a_0^2)} (Q_2 - Q_1) H_{2, st} \right] \right]^{-1} \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

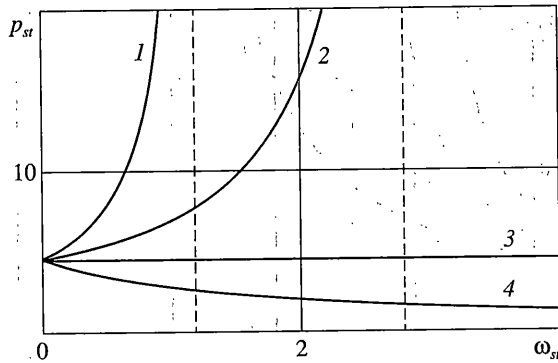
$$\begin{aligned}
 Q_1 = & \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2} \delta^{2(\beta - 1)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + 1/2) \Phi_{2, st}(a_0) \frac{h}{2\pi \delta \lambda_1} F_1 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \} + \right. \\
 & \left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi \delta \lambda_1}} (2\delta)^{\beta - 1/2} F_2 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \} \left( 1 + \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_{2, st}(a_0) \right) \right] Q^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2} \delta^{2(\beta - 1)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + 1/2) \Phi_{2, st}(a_0) \left( 1 - \frac{1}{\pi \delta} \left( \gamma_{0,1} - \frac{h}{2\lambda_1} \right) F_1 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi \delta \lambda_1}} (2\delta)^{\beta - 1/2} F_2 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \} \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_{2, st}(a_0) \right] Q^{-1}
 \end{aligned}$$

$$Q = \left( 1 + \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_{2, st}(a_0) \right) \left( 1 - \frac{\gamma_{0,1}}{\pi \delta} F_1 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \} \right) + \frac{h}{2\pi \delta \lambda_1} F_1 \{ \bar{\Phi}_{1, st}(a_0, \delta) \}$$

где  $q_{1, st}(z)$ ,  $q_{2, st}$  и  $\omega_{st}$  – стационарные значения обжимающей нагрузки и угловой скорости вращения. Для нагрузки и угловой скорости, которые изменяются по законам (3.1), имеем  $q_{1, st}(z) = 0$ ,  $q_{2, st} = q_0$  и  $\omega_{st} = \omega_0$ . Аналогичные соотношения можно получить и при других теплофизических контактных условиях.

Анализ соотношений, описывающих решение этой задачи, и численные расчеты, дают возможность сделать следующие выводы.



Фиг. 2

1. В стационарной задаче существуют критические значения относительной угловой скорости вращения  $\omega_{st}$ , при которых контактное давление (3.2) неограниченно возрастает, поскольку внешнее тело не имеет возможности расширяться настолько же, насколько расширяется при заданном теплообразовании внутреннее тело. Это критическое значение существует только при условии  $\alpha_1/\alpha_2 > \alpha_*$ , где, как видно из анализа знаменателя выражения (3.2):

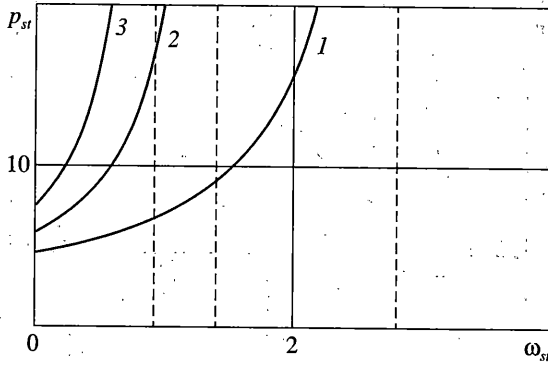
$$\alpha_* = \left[ \frac{a_0 \sqrt{\pi} \delta^{2(\beta-1)}}{2\lambda_2(a_2^2 - a_0^2)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + 1/2) H_{2, st} + \frac{a_0 h}{\lambda_2(a_2^2 - a_0^2)} (Q_2 - Q_1) H_{2, st} \right] / \left[ \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi} \delta \lambda_1} (2\delta)^{\beta-1/2} F_2\{\bar{H}_{1, st}(\delta)\} + Q_1 \frac{\gamma_{0,1}}{\pi \delta} F_1\{\bar{H}_{1, st}(\delta)\} + (Q_2 - Q_1) \frac{h}{2\pi \delta \lambda_1} F_1\{\bar{H}_{1, st}(\delta)\} \right] \quad (3.3)$$

При  $\alpha_1/\alpha_2 = \alpha_*$  теплообразование не влияет на контактные напряжения, а при  $\alpha_1/\alpha_2 < \alpha_*$  ведет к падению контактного давления.

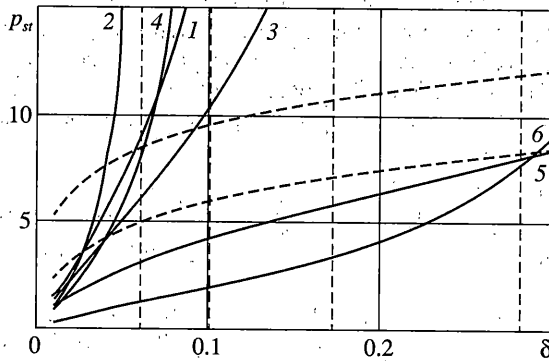
Существование  $\omega_*$  иллюстрирует фиг. 2, где изображена зависимость стационарного контактного давления  $p_{st}$  [МПа] от относительной угловой скорости вращения  $\omega_{st}$  [рад/с] для приведенного выше фиксированного значения  $\alpha_2$  и четырех значений  $\alpha_1 = 40, 30, 22.7$  и  $10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ , которым соответствуют кривые 1–4. При этом пренебрегалось влиянием центробежных сил инерции, а  $\kappa = 0, \delta = 5$  см. Вертикальные штриховые линии, являющиеся асимптотами графиков контактного давления  $p_{st}$ , определяют критическое значение относительной угловой скорости вращения  $\omega_{st}$ . Как видно из рисунка, уменьшение параметра  $\alpha_1$  сопровождается увеличением  $\omega_*$ , которое при  $\alpha_1 \approx 22.7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$  становится равным бесконечности. В этом случае теплообразование перестает влиять на контактные напряжения, а при дальнейшем уменьшении  $\alpha_1$ , увеличение интенсивности теплообразования вызывает падение контактного давления.

2. Проанализировав формулу (3.3) для критического значения  $\alpha_*$  видно, что этот параметр нелинейно зависит от величины полуширины интервала контакта  $\delta$  и коэффициента теплоотдачи из оснований пластины  $\kappa$ , что вносит некоторые коррективы в приведенные выше выводы. В частности, увеличение параметра  $\delta$  вызывает увеличение контактного давления, и как следствие, уменьшение критического значения  $\omega_*$ , что иллюстрирует фиг. 3. Кривые 1–3 соответствуют значениям параметра  $\delta = 5, 10$  и  $20$  см ( $\kappa = 0, \alpha_1 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ ).

Увеличение площадки контакта при равной прижимающей силе увеличивает как контактное давление упругой задачи (при  $\omega_{st} = 0$ ), так и  $p_{st}$  в термоупругой при увеличении теплообразования. Кроме того, при равном значении угловой скорости вращения,



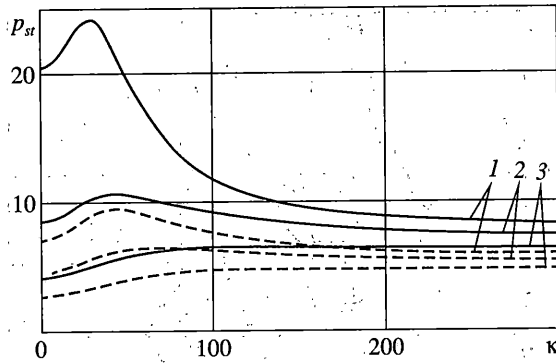
Фиг. 3



Фиг. 4

рост области контакта за счет увеличения  $\delta$  вызывает при некотором значении  $\delta_*$  неограниченный рост контактного давления. Этот эффект иллюстрирует фиг. 4; где приведена зависимость стационарного контактного давления  $p_{st}$  [МПа] от величины полуширины области контакта  $\delta$  [м]. Кривые 1, 2 соответствуют паре значений  $\alpha_1 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ ,  $\omega_{st} = 1, 2 \text{ рад/с}$ ; кривые 3, 4 —  $\alpha_1 = 25 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ ,  $\omega_{st} = 1, 2 \text{ рад/с}$ , а кривые 5 и 6 —  $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$ ,  $\omega_{st} = 1, 5 \text{ рад/с}$  ( $\kappa = 0$ ). Вертикальные штриховые линии определяют значение  $\delta_*$ , которое уменьшается при увеличении интенсивности теплообразования и изменений в большую сторону коэффициента линейного теплового расширения цилиндра. Штриховыми кривыми отмечена зависимость контактного давления упругой задачи от величины  $\delta$ . При этом, как показывают расчеты, уменьшение жесткости пластины (верхняя штриховая кривая, получена при  $E_2 = 10^5 \text{ МПа}$ ) вызывает увеличение контактного давления.

3. Для каждого отношения коэффициентов линейного теплового расширения тел  $\alpha_1/\alpha_2$  существует свое значение  $\kappa_*$ , когда при  $\kappa \leq \kappa_*$  увеличение теплообразования за счет роста относительной угловой скорости вращения  $\omega_{st}$  ведет к увеличению стационарного контактного давления, неограниченно возрастающего, когда  $\omega_{st} = \omega_*$ . Если же  $\kappa > \kappa_*$ , то увеличение теплообразования ведет к уменьшению  $p_{st}$ . Эти особенности поведения контактных напряжений проиллюстрированы на фиг. 5, где изображена зависимость контактного давления от величины параметра  $\kappa$  [м<sup>-1</sup>]. Кривые 1–3 построены для приведенного выше фиксированного значения  $\alpha_2$  и трех значений  $\alpha_1 = 30, 22.7$  и



Фиг. 5

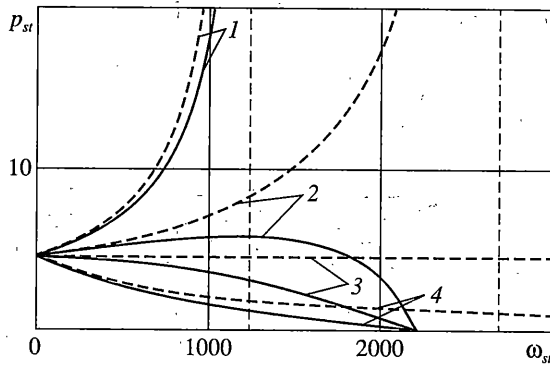
$10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$  ( $\omega_{st} = 1 \text{ рад/с}$ ). Сплошные кривые получены при  $\delta = 10 \text{ см}$ , а штриховые – при  $\delta = 5 \text{ см}$ .

4. Центробежные силы инерции начинают существенно влиять на контактные напряжения только при больших угловых скоростях вращения, что обуславливается данным выбором геометрических параметров трибосистемы: радиусов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ . При этих выбранных радиусах распределенная масса тел мала, и поэтому в системе при небольших скоростях вращения действуют незначительные силы инерции. В то же время, вследствие существования критических значений угловых скоростей вращения, сколь угодно малое отклонение  $\omega_{st}$  может вызвать значительные контактные напряжения даже в случае отсутствия на боковых поверхностях трибосистемы радиальных напряжений. Увеличение радиусов цилиндров вызывает увеличение центробежных сил инерции, но при этом увеличивается теплообразование и, как следствие, уменьшается значение  $\omega_*$ .

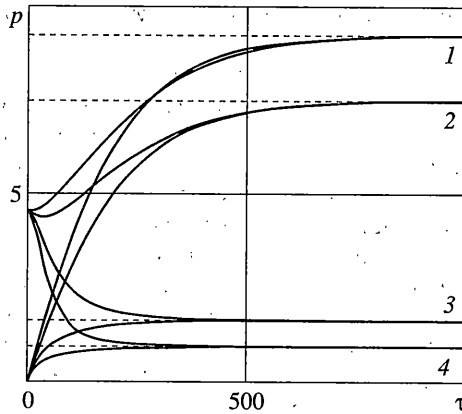
Увеличение угловой скорости вращения пластины вызывает уменьшение контактного давления, а при некотором значении  $\omega_{st} = \omega_1$  (скорости отрыва), контактное давление стационарной задачи  $p_{st}$  будет равным нулю. В дальнейшем, с ростом  $\omega_{st}$ , задача в этой постановке теряет смысл. Значение угловой скорости отрыва  $\omega_1$  при фиксированных геометрических и механических параметрах трибосистемы будет зависеть только от величины напряжений, приложенных к не контактирующим поверхностям системы, и не зависит от теплофизических процессов, имеющих здесь место.

На фиг. 6 изображена зависимость контактного давления стационарной задачи от угловой скорости вращения для четырех значений  $\alpha_1 = 22.69, 22.681, 22.6734$  и  $22.65 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$  ( $\kappa = 0, \delta = 5 \text{ см}$ ), которым соответствуют кривые 1–4. Штриховыми линиями определены кривые без учета центробежных сил инерции. Вертикальные штриховые линии, как и на фиг. 2, 3, определяют критические значения угловой скорости  $\omega_{st}$ . Из рисунка видно, что “разделение” трибосистемы возможно только при таком соотношении между коэффициентами линейного теплового расширения тел, когда  $\omega_* > \omega_1$  или  $\alpha_1/\alpha_2 \leq \alpha_*$ .

5. Исследование решения квазистатической задачи позволяет утверждать, что условие существования стационарных значений нагрузки и угловой скорости вращения не является достаточным для того, чтобы контактное давление со временем следовало к некоторому значению. В частности, если при предельных значениях нагрузки ( $\lim_{\tau \rightarrow \infty} q_j(\tau) = q_j^\infty, q_j^\infty < \infty$ ) и угловой скорости вращения ( $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega(\tau) = \omega^\infty, \omega^\infty < \infty$ ) имеет место формула (3.2), т.е. существует контактное давление стационарной задачи  $p_{st}$ , то контактное давление квазистатической задачи со временем следует к этому значению. И, как следствие, со временем к стационарным значениям следуют тепловые потоки,



Фиг. 6



Фиг. 7

температура, термоупругие перемещения и напряжения в составляющих трибосистему телах.

Если же при предельных значениях  $q_j^\infty$  и  $\omega^\infty$  контактное давление стационарной задачи не существует, что имеет место при условии  $\omega^\infty > \omega_*$ , когда  $\alpha_1/\alpha_2 > \alpha_*$ , то контактные напряжения со временем неограниченно возрастают. Это, в свою очередь, является причиной неограниченного увеличения тепловых и термомеханических характеристик трибосистемы.

На фиг. 7 приведены графики изменения во времени  $\tau$  [с] контактного давления  $p$  [МПа] в условиях теплоизоляции оснований пластины ( $\kappa = 0$ ) и пренебрежения центробежными силами инерции для случая изменения нагрузки и угловой скорости вращения по законам (а) и (б). Кривые 1–4 соответствуют значениям  $\alpha_1 = 35, 30, 10$  и  $5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$  и построены при  $\omega_0 = 1$  рад/с. Штриховые линии соответствуют стационарному контактному давлению. При этом в начальный момент времени контактные напряжения при закономерности (а) равны нулю, а при (б) – совпадают с контактными напряжениями силовой задачи. Некоторая не монотонность поведения контактного давления в начале процесса теплообразования (кривая 2 при закономерности (б)) зависит как от выбора часовой зависимости угловой скорости вращения, так и оттого, что отношение коэффициентов линейного теплового расширения пластин  $\alpha_1/\alpha_2$  является близким к  $\alpha_*$ .

6. Если учитывать влияние центробежных сил инерции на контактные напряжения между телами, то здесь имеем следующие результаты:

если  $\omega_0$  превышает критическое значение  $\omega_*$ , то контактные напряжения со временем неограниченно увеличиваются;

если  $\omega_0 < \omega_*$  или отношение коэффициентов линейного теплового расширения  $\alpha_1/\alpha_2 \leq \alpha_*$ , то контактное давление выходит на соответствующее стационарное значение;

если  $\omega_0 > \omega_1$ , то наступает момент времени, когда трибосистема “разделяется”, а задача в данной постановке теряет смысл. При этом если отношение  $\alpha_1/\alpha_2$  близко к критическому значению  $\alpha_*$ , то промежуток времени, в течение которого контактное давление станет равным нулю, достаточно большой. При уменьшении же отношения коэффициентов линейного теплового расширения, этот промежуток времени уменьшается до значения, необходимого для “разделения” системы в чисто упругой постановке задачи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91–94.
2. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
3. Арутюнян Н.Х. О контактном взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 204–206.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинах. Киев: Наук. думка, 1972. 308 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
6. Грилицкий Д.В., Краснюк П.П. Квазистатическое контактное взаимодействие двух кольцевых пластин с теплообразованием от трения // Докл. НАН Украины. 1995. № 1. С. 41–45.
7. Грилицкий Д.В., Краснюк П.П. Термоупругий контакт двух цилиндров с нестационарным фрикционным теплообразованием // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 3. С. 112–121.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.

Львов

Поступила в редакцию  
17.12.2003