МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2006

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. Г.И. КОЛОСОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ СЖАТОЙ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ ЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Анализируется устойчивость равновесных состояний сжатых в осевом направлении замкнутых круговых цилиндрических оболочек применительно к граничным условиям Навье с использованием классической линейной теории оболочек и динамического критерия их устойчивости. Представляется аналитическое решение, позволяющее определять величину параметра осевого сжатия оболочки, превышение которого делает вероятным потерю ее устойчивости от воздействия малых возмущений определенного вида. Результаты расчетов критических параметров осевого сжатия оболочки как качественно, так и количественно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Исследование устойчивости равновесия тонких оболочек является одной из важнейших проблем механики твердых деформируемых тел. Эта проблема стала разрабатываться с началом прошлого века, когда были заложены основы теории и получены первые фундаментальные результаты. При анализе устойчивости механических систем в наиболее общей форме принято использовать динамический критерий. Однако, "несмотря на свою общность и строгость, динамический критерий не нашел широкого применения в механике твердых деформируемых тел. Большинство задач устойчивости было решено статическим путем в рамках концепции Эйлера" [1]. Классическая теория устойчивости оболочек, развитая Лоренцом, Саусвеллом, Тимошенко, Робертсоном, Флюгге и др. (см. библ. в [1]), основана на теории малых прогибов оболочек при допущении их идеальной упругости и идеальной начальной формы. С практической стороны использование статической концепции Эйлера приводит к линейной задаче о собственных значениях, решение которой позволяет ответить на вопрос о том, каково то значение сжимающего оболочку усилия, при действии которого идеальная система принимает нетривиальные равновесные конфигурации.

В работах Лоренца и Тимошенко в линейной постановке на этой основе была определена величина верхней критической нагрузки сжатой в осевом направлении замкнутой круговой цилиндрической оболочки средней длины

$$T_B = \frac{Eh}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\frac{h}{R} \tag{1}$$

Как известно, упругое выпучивание весьма тонких круговых цилиндров под действием осевого сжатия является наиболее известным случаем, в котором наблюдается значительное несоответствие результатов расчетов согласно классической линейной теории и результатов экспериментов. Анализ экспериментальных данных показывает, что наблюдаемые в экспериментах критические нагрузки всегда лежат значительно, на 10–90%, ниже величин, определяемых по формуле Лоренца–Тимошенко (1), а их значения убывают по мере роста параметра R/h быстрее, чем это предсказывается классической теорией. Большой же разброс экспериментальных значений критических нагрузок принято объяснять чувствительностью оболочки ко всякого рода возмущениям, трудно контролируемым на практике.

Устойчивость равновесного состояния оболочки с использованием динамического критерия анализируется путем определения тех значений сжимающего усилия, при которых свободное движение идеальной системы перестает быть ограниченным.

Рассмотрим замкнутую круговую изотропную цилиндрическую оболочку радиуса R и толщиною h, находящуюся в равновесном состоянии под воздействием сжимающего ее вдоль образующей усилия T_{11}^{0}. Пусть на оболочку в течение некоторого времени действует малое возмущение. Так как возникающие при этом дополнительные напряжения и деформации оболочки тоже малы, то для их описания применимы линейные соотношения и, следовательно, уравнения движения оболочки в окрестности равновесного состояния в этом случае можно записать в следующем виде [2]:

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial s}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial s^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial s}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial s}\right)=\rho h\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{R}\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{w}{R}\right)+D\Delta\Delta w=P-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+f$$

$$P=T_{11}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_{22}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+T_{11}\frac{d^2 w_0}{dx^2},\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

где u, υ, w – компоненты вектора перемещений, вызванного малым возмущением $f=f(x,s,t)$; ρ, E, μ – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона, характеризующие материал оболочки.

Величины окружного усилия T_{22}^{0} и нормального прогиба w_0 соответствуют равновесному невозмущенному состоянию оболочки, а величина T_{11} связана с компонентами вектора перемещений соотношением

$$T_{11}=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{\mu}{R}w\right)$$

Пусть на торцах оболочки выполнены граничные условия Навье, а само возмущение $f(x, s, t)$ может быть аппроксимировано парой мод собственных свободных колебаний оболочки с образованием n волн в окружном направлении

$$f(x,s,t)=f_m^{(n)}(t)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos(n\varphi)+f_{m+1}^{(n)}(t)\sin\frac{(m+1)\pi x}{l}\cos(n\varphi),\quad \varphi=\frac{s}{R} \tag{3}$$

Решение задачи о возмущенном движении оболочки в этом случае можно искать в виде

$$u=\left[q_m^{(n)}(t)\cos\frac{m\pi x}{l}+q_{m+1}^{(n)}(t)\cos\frac{(m+1)\pi x}{l}\right]\cos(n\varphi)$$

$$\upsilon=\left[q_m^{(n)}(t)\sin\frac{m\pi x}{l}+q_{m+1}^{(n)}(t)\sin\frac{(m+1)\pi x}{l}\right]\sin(n\varphi) \tag{4}$$

$$w = \left[q_m^{(n)}(t)\sin\frac{m\pi x}{l} + q_{m+1}^{(n)}(t)\sin\frac{(m+1)\pi x}{l}\right]\cos(n\varphi)$$

После подстановки соотношений (3) и (4) в уравнения (2) с применением метода Бубнова можно для любых n и m получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $q_m^{(n)}(t)$, $q_{m+1}^{(n)}(t)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_m^{(n)}}{dt^2} &= a_{m,m}^{(n)} q_m^{(n)}(t) + a_{m,m+1}^{(n)} q_{m+1}^{(n)}(t) + f_m^{(n)}(t) \\ \frac{d^2 q_{m+1}^{(n)}}{dt^2} &= a_{m+1,m}^{(n)} q_m^{(n)}(t) + a_{m+1,m+1}^{(n)} q_{m+1}^{(n)}(t) + f_{m+1}^{(n)}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Элементы матрицы этой системы $|a_{ij}^{(n)}|$ зависят от параметра нагружения оболочки k, который вводится соотношением $T_{11}^0 = kT_B$. Анализ общих решений систем уравнений вида (5) позволяет исследовать устойчивость равновесного состояния оболочки с применением динамического критерия.

Как известно, при любых значениях параметров n и m при отсутствии сжимающего усилия, т.е. при $k = 0$, все собственные числа матриц $|a_{ij}^{(n)}|$ систем уравнений (5) различные и чисто мнимые величины. Общие решения однородных уравнений, соответствующих системам (5), выражаются при этом через гармонические функции, и, следовательно, их амплитуды не возрастают во времени, что означает устойчивость оболочки по отношению к любым малым возмущениям.

При изменении величины параметра осевого сжатия k в интервале от нуля до единицы среди собственных чисел матриц $|a_{ij}^{(n)}|$ $(0 < n < N, 1 < m < M)$ появляются кратные. Необходимым и достаточным условием появления кратных собственных значений в данном случае является выполнение условия

$$(a_{m+1,m+1}^{(n)} - a_{m,m}^{(n)})^2 + 4a_{m+1,m}^{(n)} a_{m,m+1}^{(n)} = 0 \tag{6}$$

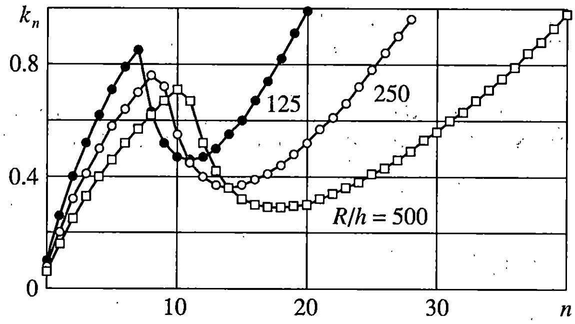
Опираясь на критерий (6) и используя при вычислении квадрата собственной частоты m-й моды свободных изгибных колебаний цилиндрической оболочки выражение [2]:

$$\frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 + \frac{\lambda_1^4\lambda_0^4}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{n}{R}, \quad \lambda_0^4 = \frac{Eh}{DR^2}$$

удается определить те значения параметров ее осевого сжатия $k(n, m)$, при которых среди корней характеристических уравнений, соответствующих однородным системам уравнений вида (5), появляются кратные мнимые корни:

$$\gamma k(n,m) = \alpha(2m^2 + 2m + 1) + 2n^2 + 12\alpha(1-\mu^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{n^4(2m^2+2m+1) + \alpha n^2 m^2(m+1)^2}{[\alpha(m+1)^2 + n^2]^2[\alpha m^2 + n^2]^2}$$
$$\gamma = 4\sqrt{3(1-\mu^2)}\frac{R}{h}, \quad \alpha = \left(\frac{\pi R}{l}\right)^2 \tag{7}$$



Фиг. 1

При наличии кратных корней общие решения однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержат слагаемые, неограниченно возрастающие с течением времени.

Найдем при выбранном n минимальную из величин $k(n, m)$ по m и обозначим ее через k_n. Характерные зависимости величин $k_n = k_n(n)$ при значениях параметра $R/h = 125$, 250, 500 в том случае, когда $\mu = 0.3$ и $L/R = 2$, представлены на фиг. 1.

Обозначим через k_0 наименьшую величину параметра осевого сжатия оболочки, при котором впервые среди собственных значений матриц $|a_{ij}^{(n)}|$ появляются кратные. Если значения параметра осевого сжатия меняются от нуля до k_0, то цилиндрическая оболочка устойчива к любым малым возмущениям, т.е. абсолютно устойчива. При значениях параметра осевого сжатия, больших k_0, среди возмущений вида (3) существуют такие, при которых колебания оболочки происходят с нарастающей по времени амплитудой. Это означает, что рассматриваемое равновесное состояние оболочки должно быть признано неустойчивым.

Граница зоны абсолютной устойчивости сжатой в осевом направлении замкнутой круговой цилиндрической оболочки T_A согласно [3] определяется соотношением

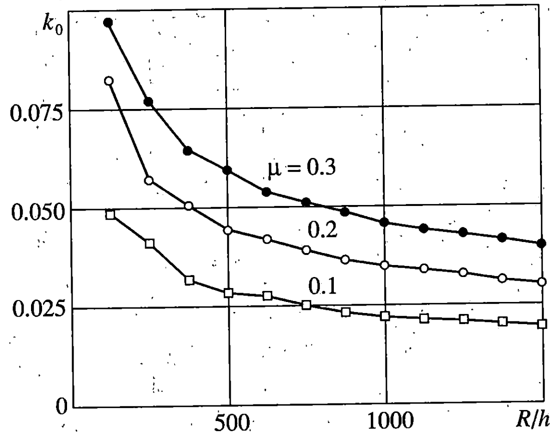
$$T_A = k_0 T_B, \quad k_0 = \frac{F(m)}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}}\frac{h}{R}$$

$$F(m) = \alpha_{m+1} + \alpha_m - \mu^2 + \frac{12\mu^2}{\alpha_{m+1}\alpha_m}\frac{R^2}{h^2}, \quad \alpha_m = \left(\frac{\pi m R}{l}\right)^2$$

$$m = \begin{cases} 1, & \mu \le \mu_0 = \sqrt{3}\dfrac{h}{R}\left(\dfrac{\pi R}{l}\right)^3 \\ a\mathrm{int}\left(\sqrt[6]{12}\dfrac{l}{\pi R}\sqrt[3]{\mu\dfrac{R}{h}}\right), & \mu \ge \mu_0 \end{cases}$$

где $a\mathrm{int}(x)$ – функция, обрезающая вещественную величину x в сторону нуля до целой части. Величине $k = k_0$ отвечает параметр волнообразования $n = 0$. Условие $k_n < 1$ выполняется при $n \in [0, N]$, где величина N определяется соотношением

$$N = a\mathrm{int}\sqrt{\frac{2R}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)} - \frac{5}{2}\left(\frac{\pi R}{l}\right)^2}$$



Фиг. 2

Зависимость параметра k_0 от величины отношения R/h при $L/R = 2$ и различных значениях коэффициента Пуассона показана на фиг. 2.

Как показывает анализ представленных результатов расчета, расположение границы абсолютной устойчивости сжатой в осевом направлении замкнутой круговой цилиндрической оболочки существенно зависит от величины коэффициента Пуассона, причем величины значений параметров осевого сжатия оболочек в зависимости от значений коэффициента Пуассона могут различаться в два раза.

Величина критического усилия сжатия замкнутой круговой цилиндрической оболочки, когда коэффициент Пуассона равен нулю, определяется по соотношению

$$T_A = \frac{5\pi^2 D}{l^2} = \frac{5\pi^2 E h^3}{12 l^2}$$

что соответствует величине эйлеровой критической силы применительно к полоске, вырезанной из оболочки в направлении образующей и имеющей длину, равную $l_0 = l/\sqrt{5}$.

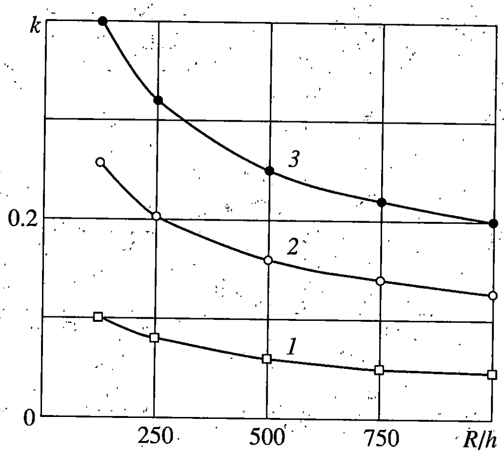
Зависимости критических параметров k_0, k_1 и k_2 (кривые *1–3*) от величины параметра R/h в том случае, когда $\mu = 0.3$ и $L/R = 2$, представлены на фиг. 3.

Снижение величин критических параметров осевого сжатия по мере роста параметра R/h отмечается как характерное при анализе результатов экспериментов.

Пусть рассматриваемому равновесному состоянию оболочки отвечает параметр осевого сжатия k, величина которого такова, например, что $k_0 < k < k_1$. Согласно динамическому критерию по поводу устойчивости рассматриваемого равновесного состояния можно утверждать, что оболочка неустойчива, если она подвергается воздействию вида (3), в котором хотя бы один из коэффициентов $f_{0m}(t)$ $(1 < m < M)$ отличен от нуля, и устойчива в противном случае.

Таким образом условие $k > k_0$ следует рассматривать как необходимое, но еще не достаточное условие неустойчивости оболочки. Достаточное же условие неустойчивости оболочки определяется формулой Лоренца–Тимошенко (1).

Если при $T_{11}^0 < T_A$ оболочка безусловно устойчива, а при $T_{11}^0 > T_B$ – безусловно неустойчива, то при $T_A < T_{11}^0 < T_B$ существует вероятность того, что при воздействии малого возмущения произойдет потеря устойчивости.



Фиг. 3

Обозначим через $p_n(k)$ вероятность события, при котором оболочка, находящаяся в равновесном состоянии под воздействием сжимающего усилия $T_{11}^0 = kT_B$, теряет устойчивость с образованием n волн в окружном направлении. Будем считать, что

$$p_n(k) = \begin{cases} 0, & k < k_n \quad k \in [0, 1] \\ 1, & k \geq k_n \end{cases}$$

Естественно при этом предположить, что вероятность потери устойчивости оболочки с образованием n волн в окружном направлении равна $p(n) = \alpha(1 - k_n)$. Величина α определяется из условия нормировки $\sum\limits_{n=0}^{N} p(n) = 1$.

Таким образом, вероятность потери устойчивости оболочки $p(k)$ при значении параметра осевого сжатия, равного k, может быть определена по формуле полной вероятности [4]:

$$p(k) = \sum_{n=0}^{N} p(n)p_n(k)$$

В качестве примера рассмотрим оболочку, у которой $L/R = 2$, $R/h = 125$, а коэффициент Пуассона материала оболочки $\mu = 0.3$. В рамках данной математической модели вероятность потери устойчивости оболочки при $k_0 \leq k < k_1$ составляет $p(k) = 0.11$. Потеря устойчивости может быть вызвана при этом только осесимметричными неправильностями или воздействиями. При $k_1 \leq k < k_2$ дополнительной причиной потери устойчивости становятся искривление оси вращения цилиндрической оболочки и возмущения, возбуждающие балочные формы колебаний оболочки. Вероятность потери устойчивости оболочки при $k_1 \leq k < k_2$ составляет $p(k) = 0.2$. Овализация сечений оболочки или силовые возмущения, приводящие к ним, поднимают вероятность потери устойчивости оболочки до величины $p(k_2) = 0.27$. Значению параметра осевого сжатия оболочки $k = 0.6$ соответствует вероятность равная 0.73.

При определении верхней границы большинства экспериментальных значений k_B рекомендуется использовать полуэмпирическое выражение [1]:

$$k_B = 0.5 - 0.0035\sqrt{R/h} + 4.6\sqrt{h/R}$$

В данном случае $k_B = 0.87$ и вероятность того, что к моменту достижения параметром осевого сжатия оболочки значения $k = k_B$ произойдет потеря устойчивости, составляет $p(k_B) = 0.989$. Это означает, что большинство результатов испытаний должно лежать в диапазоне, ограниченном значениями параметров k_A и k_B, что полностью согласуется с результатами экспериментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
3. *Колосов Г.И.* Определение границы зоны абсолютной устойчивости сжатой в осевом направлении замкнутой круговой цилиндрической оболочки // Космонавтика и ракетостроение. 2005. Вып. 1(38). С. 114–118.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.03.2005