

© 2006 г. С.Н. КУКУДЖАНОВ

**КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ,
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ
И МЕРИДИОНАЛЬНЫХ УСИЛИЙ**

Исследуются собственные колебания и динамическая устойчивость оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящимся под действием меридиональных усилий, равномерно распределенных по торцам оболочки и нормального давления, равномерно распределенного по всей поверхности оболочки. Рассматриваются оболочки средней длины, у которых форма образующей срединной поверхности описывается параболической функцией. На основании теории пологих оболочек получено разрешающее уравнение колебаний предварительно напряженной оболочки. Приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие учетные члены. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Предполагалось, что края оболочки свободно оперты. Основное внимание уделялось практически наиболее важным низшим частотам. Приведены в безразмерной форме формулы и универсальные кривые зависимости наименьшей частоты, формы волнообразования и границ областей динамической неустойчивости от предварительного напряжения, гауссовой кривизны и амплитуды отклонения оболочки от цилиндра. Показано, что при наличии предварительных напряжений рассматриваемого вида, отклонение оболочки от цилиндрической формы (порядка толщины) могут существенно изменить низшие частоты, форму волнообразования и границы областей динамической неустойчивости.

1. Рассматривается оболочка, у которой срединная поверхность образована вращением квадратной параболы вокруг оси z прямоугольной системы координат x, y, z с началом в середине отрезка оси вращения. Предполагается, что радиус R поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = r + \delta_0 [1 - \xi^2 (r/l)^2]$$

где r – радиус торцевого сечения, δ_0 – максимальное отклонение (при $\delta_0 > 0$ оболочка выпуклая, при $\delta_0 < 0$ – вогнутая); $L = 2l$ – длина оболочки, $\xi = z/r$. Рассматриваются оболочки средней длины [2] и считается, что

$$(\delta_0/r)^2, (\delta_0/l)^2 \ll 1 \tag{1.1}$$

За основные уравнения колебаний принимались уравнения теории пологих оболочек [3]. Для рассматриваемых оболочек средней длины формы колебаний, соответствующие низшим частотам, имеют слабую изменяемость в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо соотношение

$$\partial^2 f / \partial \xi^2 \ll \partial^2 f / \partial \varphi^2 \quad (f = w, \psi) \tag{1.2}$$

где w, ψ – соответственно функции радиального перемещения и напряжения. В результате система уравнений для рассматриваемых оболочек приводится к следующему уравнению:

$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - t_1^0 \frac{\partial^6 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} - t_2^0 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} - 2s^0 \frac{\partial^6 w}{\partial \xi \partial \varphi^5} - \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)}, \quad \delta = \delta_0 r/l^2, \quad t_i^0 = T_i^0/Eh \quad (i = 1, 2), \quad s^0 = S^0/(Eh)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, φ – угловая координата, T_1^0, T_2^0, S^0 – меридиональное, окружное и сдвигающее усилия исходного состояния, t – время, ρ – плотность. Дополнительным членом в этом уравнении в сравнении с уравнением, приведенным в [1], является четвертый член, который в силу неравенств (1.2) будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Рассматривается свободно опертая оболочка, к краям которой приложены равномерно распределенные меридиональные усилия P_1 , а по боковой поверхности приложено нормальное давление q . Исходное состояние предполагается безмоментным. На основании соответствующего решения и неравенств (1.1), (1.2) получаем следующие приближенные выражения:

$$T_1^0 = P_1 \left[1 + \frac{\delta_0}{r} \left(\xi^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 1 \right) \right] + q\delta_0 \left[\xi^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 1 \right], \quad T_2^0 = -2P_1\delta_0 r/l^2 - qr, \quad S^0 = 0 \quad (1.4)$$

Учитывая, что

$$\left| \xi^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 1 \right| \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \ll 2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\delta_0}{r} \left| \xi^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 - 1 \right| \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \ll \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \quad (1.5)$$

уравнение (1.3) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + p \frac{\partial^6 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} + (q - 2p\delta) \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$p = -P_1/(Eh), \quad \bar{q} = qr^2/(Eh)$$

Рассмотрим случай $P_1 = \text{const}, q = \text{const}$. Принятым граничным условиям удовлетворяет выражение

$$w = A \cos \lambda_m \xi \sin n \varphi \sin \omega t, \quad \lambda_m = m\pi r/L \quad (m = 2i + 1, i = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.6), получаем следующее равенство для определения собственных частот:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho r^2} [\varepsilon n^4 + \lambda_m^4 n^{-4} + 4\delta \lambda_m^2 n^{-2} + 4\delta^2 - p(\lambda_m^2 - 2\delta n^2) - \bar{q} n^2] \quad (1.8)$$

Видно, что при $p = 0$ и $\delta > 0$ наименьшей частоте соответствует значение $m = 1$. Можно также показать, что это условие имеет место и при $\delta < 0$, учитывая неравенство (1.1), а также что $\omega^2 > 0$. Поэтому первоначально будем рассматривать формы колебаний, при которых по длине оболочки образуется одна полуволна ($m = 1$), а в окружном направле-

нии n волн. При сжатии $p > 0$, а при растяжении $p < 0$; q – нормальное давление, которое считается положительным, если оно внешнее и отрицательным, если оно внутреннее.

Представим выражение (1.8) при $m = 1$ в безразмерном виде, для этого введем безразмерные величины N, P, T и некоторые обозначения

$$N = n^2/n_0^2, \quad P = p/p_{0*}, \quad T = \bar{q}/\bar{q}_{0*}, \quad \delta_* = \delta\epsilon_*^{-1/2}, \quad \epsilon_* = (1-v^2)^{-1/2} \frac{h}{r} \left(\frac{r}{L}\right)^2, \\ n_0^2 = \lambda_1 \epsilon^{-1/4} \quad (1.9)$$

$$\lambda_1 = \pi r/L, \quad p_{0*} = \frac{(1-v^2)^{-1/2} h}{\sqrt{3}} \frac{h}{r}, \quad \bar{q}_{0*} = 0.855(1-v^2)^{-3/4} \left(\frac{h}{r}\right)^{3/2} \frac{r}{L}, \quad \omega_*^2 = 2\lambda_1^2 \epsilon^{1/2} \frac{E}{\rho r^2}$$

где ω_* , p_{0*} , \bar{q}_{0*} – соответственно наименьшая частота, критическая нагрузка сжатия и критическое давление для цилиндрической оболочки средней длины [2, 6]. В результате равенство (1.8) можно записать в следующей безразмерной форме:

$$\omega^2(N)/\omega_*^2 = 0.5[N^2 + N^{-2} + 2.37\delta_* N^{-1} + 1.404\delta_*^2 - 2P(1 - 1.185\delta_* N) - 1.755TN] \quad (1.10)$$

Наименьшая частота (при $\omega^2(N) > 0$) определяется из условия $[\omega^2(N)]' = 0$. В результате получаем

$$0.8775T - 1.185\delta_* P = N - 1.185\delta_* N^{-2} - N^{-3} \quad (1.11)$$

или

$$N^4 - (0.8775T - 1.185\delta_* P)N^3 - 1.185\delta_* N - 1 = 0 \quad (1.12)$$

Отсюда при $P = T = 0$ следует известное уравнение

$$N^4 - 1.185\delta_* N - 1 = 0$$

корни которого в явном виде получены в [7]. Кроме того из (1.12) при $\delta_* = 0, T = 0$ получаем уравнение $N^4 - 1 = 0$, положительный корень которого $N = 1$. Следовательно, для цилиндрической оболочки средней длины наименьшая частота реализуется при $N = 1$ независимо от P , что полностью согласуется с [9]. При $\omega = 0$ из равенства (1.10) получаем

$$1.775T = N + N^{-3} + 2.37\delta_* N^{-2} + 1.404\delta_*^2 N^{-1} - 2P(N^{-1} - 1.185\delta_*) \quad (1.13)$$

Наименьшее значение $T > 0$ в зависимости от N реализуется при $T'_N = 0$. Отсюда получаем

$$N^4 + cN^2 + dN + e = 0, \quad c = 2P - 1.404\delta_*^2, \quad d = -4.74\delta_*, \quad e = -3 \quad (1.14)$$

Корни уравнения (1.14) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$N^2 + \frac{A_{1,2}}{2}N + \left(y_1 - \frac{d}{A_{1,2}}\right) = 0, \quad A_{1,2} = \pm\sqrt{8\alpha} \quad (1.15)$$

$$N_{1,2} = -\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{d}{\sqrt{8\alpha}} - \frac{\alpha_1}{2}}, \quad N_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{-d}{\sqrt{8\alpha}} - \frac{\alpha_1}{2}}$$

$$\alpha = y_1 - c/2, \quad \alpha_1 = y_1 + c/2 \quad (1.16)$$

где y_1 – какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$y^3 - \frac{c}{2}y^2 - ey + \left(\frac{ce}{2} - \frac{d^2}{8}\right) = 0 \quad (1.17)$$

или

$$z^3 + 3pz + 2q = 0 \quad (z = y - c/6) \quad (1.18)$$

$$p = 1 - (2P - 1.404\delta_*^2)^2/36, \quad q = \frac{1}{2}(2P + 1.404\delta_*^2) \left[1 - \frac{(2P - 1.404\delta_*^2)^3}{108(2P + 1.404\delta_*^2)} \right] \quad (1.19)$$

Если принять, что

$$(2P - 1.404\delta_*^2)^2/36 \ll 1 \quad (1.20)$$

тогда выражения (1.19) примут вид $p = 1$, $q = -1/2(2P + 1.404\delta_*^2)$. Так как дискриминант уравнения (1.18) $D = q^2 + p^3 > 0$, то имеем один действительный корень

$$z = (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3} + (-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3} \quad (1.21)$$

Если принять условие

$$(2P + 1.404\delta_*^2)^2/36 \ll 1 \quad (1.22)$$

и разложить в ряды выражения, входящие в (1.21), отбрасывая при этом величины второго порядка малости, то получим $z \approx (2P + 1.404\delta_*^2)/3$. Тогда на основании (1.14), (1.16), (1.18) получаем

$$\alpha = z - c/3 = 2 \times 1.404\delta_*^2/3, \quad \alpha_1 = z + 2c/3 = 2P + 1.404\delta_*^2/3 \quad (1.23)$$

Учитывая, что величина y_1 есть корень уравнения (1.17), имеем

$$d^2/8(y_1 - c/2) = y_1^2 - e$$

Отсюда получаем

$$\frac{|d|}{\sqrt{8\alpha}} = \sqrt{y_1^2 - e} > y_1 = \frac{y_1}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{c}{4} - \frac{c}{4} = \frac{1}{2}\left(y_1 - \frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{c}{2}\right)$$

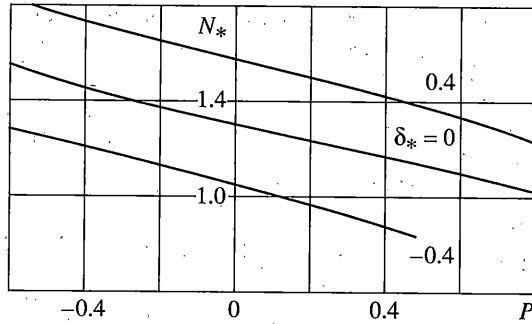
Следовательно

$$\frac{|d|}{\sqrt{8\alpha}} - \frac{\alpha_1}{2} > \frac{\alpha}{2} \quad (1.24)$$

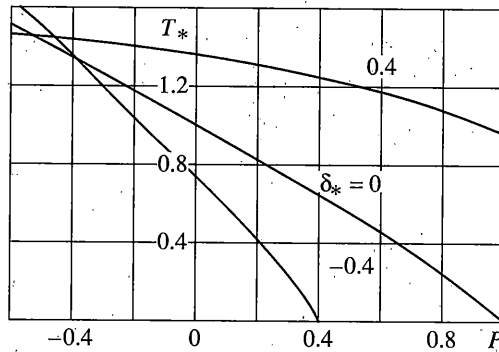
Так как $N = n^2/n_0^2$, то интерес представляют только положительные корни уравнения (1.14). Учитывая неравенство (1.24), получаем, что при $\delta_* < 0$ ($d > 0$) положительным корнем является только корень N_1 , а при $\delta_* > 0$ ($d < 0$) – корень N_3 . Подставляя значения d , α , α_1 , согласно равенств (1.14), (1.23), в выражения (1.15), находим

$$N = \sqrt{\sqrt{3} + 0.234\delta_*^2 - P - 0.684|\delta_*|} \quad (\delta_* < 0) \quad (1.25)$$

$$N = \sqrt{\sqrt{3} + 0.234\delta_*^2 - P + 0.684|\delta_*|} \quad (\delta_* > 0)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В результате получаем

$$n_{1,2}^2 = \left(\sqrt{\sqrt{3} + 0.2703 \epsilon_0^{-1/2} \left(\frac{\delta_0}{l} \right)^2} - P \pm 0.735 \epsilon_0^{-1/4} \frac{|\delta_0|}{l} \right) \lambda_1 \epsilon^{-1/4} \quad (1.26)$$

индекс (1) соответствует $\delta_0 > 0$, а индекс (2) – $\delta_0 < 0$. В частности, при $\delta_0 = P = 0$ получаем известную формулу для критического числа волн для цилиндрической оболочки средней длины $n_*^2 = \sqrt[4]{3} \lambda_1 \epsilon^{-1/4}$ [2]. Из формулы (1.26) нетрудно так же заметить, что при действии сжимающих усилий, число критических волн по окружности уменьшается, а при растягивающих усилиях – увеличивается.

Формула (1.26), как выше было отмечено, имеет место при выполнении условий (1.20), (1.22). В случае, если это условие не выполняется, то надо исходить из полных выражений (1.19). Определяя таким образом значения N_* (при фиксированных δ_* , P) и подставляя их в выражения (1.13), получаем соответствующие значения критического давления T_* . На фиг. 1 приведены в безразмерной форме критические значения N_* в зависимости от P (при $\delta_* = -0.4; 0; 0.4$). На фиг. 2 представлены соответствующие критические значения $T_*(\delta_*, P)$. Отметим, что кривая $T_*(\delta_* = 0, P)$ (при $P > 0$), приведенная на фиг. 2 и относящаяся к цилиндрической оболочке, практически совпадает с соответствующей кривой работы [8].

Рассмотрим теперь уравнение (1.12) и запишем его в виде

$$N^4 + bN^3 + dN + e = 0, \quad b = 1.185 \delta_* P - 0.8775 T, \quad d = -1.185 \delta_*, \quad e = -1 \quad (1.27)$$

Корни этого уравнения совпадают с корнями двух уравнений

$$N^2 + (b + B_{1,2})\frac{N}{2} + \left(y_1 + \frac{by_1 - d}{B_{1,2}}\right) = 0, \quad B_{1,2} = \pm\sqrt{8(y_1 + b^2/8)} \quad (1.28)$$

Введем обозначения

$$\gamma_1 = y_1 + b^2/8, \quad \gamma_2 = y_1 - b^2/8 \quad (1.29)$$

Тогда корни этих уравнений примут вид

$$N_{1,2} = -\frac{\sqrt{8\gamma_1} + b}{4} \pm \sqrt{\frac{by_1 - d}{\sqrt{8\gamma_1}} + \frac{b\sqrt{8\gamma_1} - 4\gamma_2}{8}} \quad (1.30)$$

$$N_{3,4} = \frac{\sqrt{8\gamma_1} - b}{4} \pm \sqrt{\frac{by_1 - d}{\sqrt{8\gamma_1}} - \frac{b\sqrt{8\gamma_1} + 4\gamma_2}{8}} \quad (1.31)$$

где y_1 – какой либо корень кубического уравнения

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

$$3p = 1 - \frac{1.185^2 \delta_*^2 PM}{4}, \quad 2q = -\frac{1.185^2 \delta_*^2 (1 - P^2 M^2)}{8}, \quad M = 1 - (0.7405T/\delta_* P)$$

при

$$\frac{1.185^2 \delta_*^2 |PM|}{4} \ll 1 \quad (\delta_* \leq 0.5, PM \leq 0.5) \quad (1.32)$$

$$p \approx 1/3, \quad q = -\frac{1.185^2 \delta_*^2 (1 - P^2 M^2)}{16}$$

Так как дискриминант этого уравнения $D > 0$, то имеем один действительный корень

$$y_1 = (-q + \sqrt{D})^{-1/3} + (-q - \sqrt{D})^{1/3}, \quad \sqrt{D} = \sqrt{1 + 0.208\delta_*^4 (1 - P^2 M^2)/3^{3/2}}$$

Если принять

$$0.208\delta_*^4 (1 - P^2 M^2) \ll 1 \quad (1.33)$$

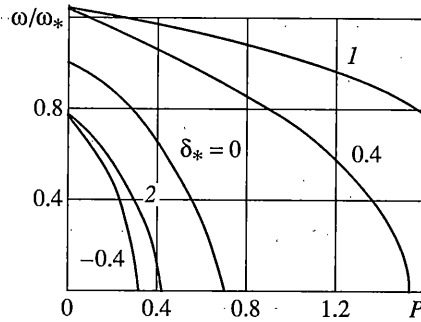
то, подобно вышесказанному, получаем $y_1 = 0.1755\delta_*^2 (1 - P^2 M^2)$. При ограничении (1.32) неравенство (1.33) тем более выполняется.

Подставляя значения $y_1, b, d, \gamma_1, \gamma_2$ в выражение (1.30), (1.31), а также учитывая неравенство (1.32), получаем, что при $d > 0$ ($\delta_* < 0$) положительным корнем является только корень N_1 , тогда как при $d < 0$ ($\delta_* > 0$) – корень N_3 . В результате имеем

$$N_3 = [1 + 0.1755\delta_*^2 PM_1 (1 - P^2 M_1^2) - 0.0877\delta_*^2 (1 + 2PM_1 - 3P^2 M_1^2)]^{1/2} + 0.2962\delta_* (1 - PM_1) \quad (\delta_* > 0) \quad (1.34)$$

$$N_1 = [1 + 0.1755\delta_*^2 PM_2 (1 - P^2 M_2^2) - 0.0877\delta_*^2 (1 + 2PM_2 - 3P^2 M_2^2)]^{1/2} - 0.2962|\delta_*|(1 - PM_2) \quad (\delta_* < 0) \quad (1.35)$$

$$M_1 = 1 - (0.7405T/\delta_* P), \quad M_2 = 1 + (0.7405T/|\delta_*| P) \quad (1.36)$$



Фиг. 3

При $\delta_* > 0$, $P/T > 0$ величина $M_1 = 0$, если $\delta_* = 0.7405 P/T$; при $\delta_* < 0$, $P/T < 0$, величина $M_2 = 0$, если $|\delta_*| = -0.7405 P/T$. При этом формулы (1.34), (1.35) примут вид

$$N = \sqrt{1 - 0.0877\delta_*^2 + 0.2962\delta_*} \quad (\delta_* > 0)$$

$$N = \sqrt{1 - 0.0877\delta_*^2 - 0.2962|\delta_*|} \quad (\delta_* < 0)$$

Отметим, что эти случаи определенных значений δ_* соответствуют случаям, при которых нормальные окружные усилия от меридиональной нагрузки и нормального давления взаимно нейтрализуют друг друга.

Подставляя значения N , на основании формул (1.35), (1.36) для фиксированных значений δ_* , P , T , в формулу (1.10), получаем наименьшее значение безразмерной частоты. На фиг. 3 приведены значения безразмерной наименьшей частоты ω/ω_* в зависимости от P для соотношения $T = 0.54P$ (при $\delta_* = -0.4, 0, 0.4$). Кроме того для сравнения приведены кривые зависимости наименьшей частоты от P , когда $T = 0$ для $\delta_* = 0.4, -0.4$, обозначенные соответственно 1 и 2.

Далее рассмотрим значения $m > 1$. Используя обозначения (1.9), формулу (1.8) можно представить в виде

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5m^2[\theta^2 + \theta^{-2} + 2.37\delta_*\theta^{-1}m^{-1} + 1.404\delta_*^2m^{-2} - 2P(1 - 1.185\delta_*\theta m^{-1}) - 1.755T\theta m^{-1}] \quad (1.37)$$

$$\theta = N/M \quad (1.38)$$

При $\delta_* = 0$ формула (1.37) принимает вид

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5m^2(\theta^2 + \theta^{-2} - 2P - 1.755T\theta m^{-1}) \quad (1.39)$$

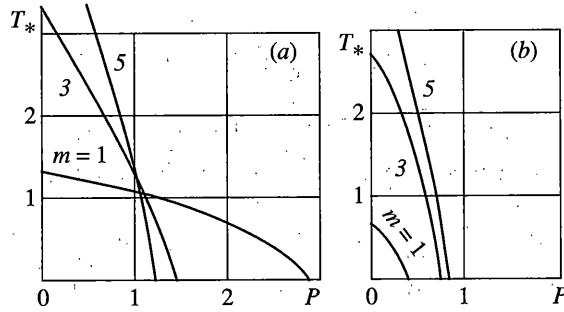
При $\omega = 0$ получаем

$$1.755T = m(\theta + \theta^{-3} - 2P\theta^{-1}) \quad (1.40)$$

Отсюда видно, что для цилиндрической оболочки наименьшее значение $T > 0$ в зависимости от m будет для $m = 1$ (при $P < 1$), тогда как в зависимости от θ оно будет при

$$\theta^2 = \sqrt{3 + p^2} - p \quad (1.41)$$

что полностью совпадает с результатом [5].



Фиг. 4

Определим как изменяется ω^2 при изменении m для $\delta_* = 0$. При увеличении m последний член выражения (1.39) уменьшается, следовательно, выражение, заключенное в скобки, увеличивается, кроме того увеличивается множитель m^2 . Следовательно наименьшее значение ω реализуется при $m = 1$. Наименьшее значение ω по θ (при фиксированном m) будет определено ниже, как частный случай, более общего случая, когда $\delta_* \neq 0$.

Рассмотрим теперь выражение для определения критической нагрузки $T > 0$ при $\delta_* \neq 0$. В соотношении (1.37) правая часть обращается в нуль при

$$1.755T = m(\theta + \theta^{-3} - 2P\theta^{-1}) + 2.37\delta_*\theta^{-2} + 1.404\delta_*^2\theta^{-1}m^{-1} + 2.37P\delta_* \quad (1.42)$$

В дальнейшем, учитывая неравенство (1.1), ограничимся рассмотрением $|\delta_*| \leq 1$.

Величина θ , реализующая наименьшее значение T (при фиксированном m), определяется положительным корнем уравнения

$$\theta^4 + (2P - 1.404\bar{\delta}_*)\theta^2 - 4.74\bar{\delta}_*\theta - 3 = 0, \quad \bar{\delta}_* = \delta_*/m$$

Подобно вышесказанному с учетом неравенства (1.22) (δ_* надо заменить на $\bar{\delta}_*$) получаем

$$\theta = \sqrt{\sqrt{3 + 0.234\bar{\delta}_*^2/m^2} - P + 0.684\bar{\delta}_*/m} \quad (\delta_* > 0) \quad (1.43)$$

$$\theta = \sqrt{\sqrt{3 + 0.234\bar{\delta}_*^2/m^2} - P - 0.684|\bar{\delta}_*|/m} \quad (\delta_* < 0) \quad (1.44)$$

В случае, если величины δ_* и P не удовлетворяют этим неравенствам, тогда надо исходить из полных выражений для корней θ_1 и θ_3 . Они имеют такой же вид как N_1 и N_3 , определяемые равенствами (1.15), где δ_* надо заменить на $\bar{\delta}_*$.

На фиг. 4 представлены критические значения $T_*(m, P)$ для $m = 1, 3, 5$ при $\delta_* = 0.4$ (фиг. 4, а) и $\delta_* = -0.4$ (фиг. 4, в). Видно, что при $\delta_* > 0$ и $P < 1$ наименьшее значение T_* реализуется при $m = 1$, тогда как при P , приближающемся сверху к единице, критические значения T_* реализуются при больших значениях m . При $\delta_* < 0$ наименьшее значение T_* реализуется при $m = 1$ (когда $0 < P \leq P_*$, P_* – критическое значение P при $T = 0$).

Рассмотрим теперь выражение (1.37). Наименьшее значение ω^2 по θ (при фиксированном m) определяется из условия

$$(\omega^2)'_{\theta} = 0.5m^2(2\theta - 2\theta^{-3} - 2.37\bar{\delta}_*\theta^{-2} + 2.37P\bar{\delta}_* - 1.755\bar{T}) = 0, \quad \bar{T} = T/m, \quad \bar{\delta}_* = \delta_*/m$$

Отсюда получаем

$$\theta^4 + b\theta^3 + d\theta + e = 0, \quad b = 1.185\bar{\delta}_*P - 0.8775\bar{T}, \quad d = -1.185\bar{\delta}_*, \quad e = -1$$

Это уравнение имеет такой же вид как уравнение (1.27), где δ_* надо заменить на $\bar{\delta}_*$, а T на \bar{T} . Поэтому подобно вышесказанному, при ограничениях (1.33), получаем

$$\theta = \sqrt{1 + 0.1755\bar{\delta}_*^2 PM_1(1 - P^2 M_1^2) - 0.08775\bar{\delta}_*^2(1 + 2PM_1 - 3P^2 M_1^2) + 0.2962\bar{\delta}_*(1 - PM_1)} \quad (\bar{\delta}_* > 0) \quad (1.45)$$

$$\theta = \sqrt{1 + 0.1755\bar{\delta}_*^2 PM_2(1 - P^2 M_2^2) - 0.08775\bar{\delta}_*^2(1 + 2PM_2 - 3P^2 M_2^2) - 0.2962|\bar{\delta}_*|(1 - PM_2)} \quad (\bar{\delta}_* < 0) \quad (1.46)$$

$$\text{где } M_{1,2} = 1 \mp (0.7405T/|\bar{\delta}_*|P) \quad (1.47)$$

В случае если величины $\bar{\delta}_*$, P , T не удовлетворяют неравенству (1.33) (где δ_* заменяется $\bar{\delta}_*$), тогда надо исходить из полных выражений для корней θ_1 , θ_3 . Они имеют такой же вид как N_1 , N_3 , которые определяются равенствами (1.30), (1.31), где δ_* надо заменить на $\bar{\delta}_*$, а $M_{1,2}$ имеют вид (1.47).

При $\bar{\delta}_* = 0$, $P = T = 0$, из этих формул получаем $\theta = N = 1$ ($m = 1$). При $\bar{\delta}_* \neq 0$, $P = T = 0$ получаем формулы [7].

При $\bar{\delta}_* \neq 0$, $T \neq 0$, $P = 0$ формулы (1.45), (1.46) принимают вид

$$\theta = \sqrt{1 - 0.1295\bar{\delta}_*\bar{T} - 0.08775(\bar{\delta}_*^2 - 1.48\bar{\delta}_*\bar{T} - 1.645\bar{T}^2) + 0.2962(\bar{\delta}_* + 0.7405\bar{T})} \quad (\bar{\delta}_* > 0)$$

$$\theta = \sqrt{1 + 0.1295|\bar{\delta}_*|\bar{T} - 0.08775(\bar{\delta}_*^2 + 1.48|\bar{\delta}_*|\bar{T} - 1.645\bar{T}^2) - 0.2962(|\bar{\delta}_*| - 0.7405\bar{T})} \quad (\bar{\delta}_* < 0)$$

При $\bar{\delta}_* \neq 0$, $P \neq 0$, $T = 0$ получаем $M_{1,2} = 1$ и формулы (1.45), (1.46) будут

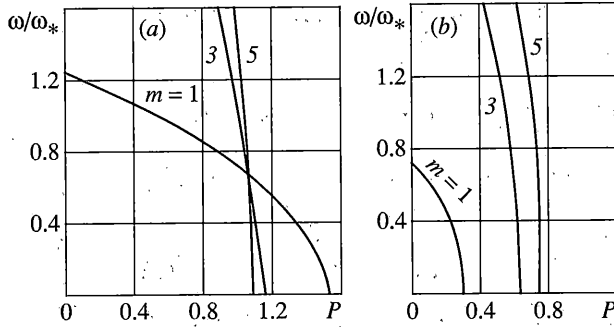
$$\theta = \sqrt{1 + 0.1755\bar{\delta}_*^2 P(1 - P^2) - 0.08775\bar{\delta}_*^2(1 + 2P - 3P^2) + 0.2962\bar{\delta}_*(1 - P)} \quad (\bar{\delta}_* > 0)$$

$$\theta = \sqrt{1 + 0.1755\bar{\delta}_*^2 P(1 - P^2) - 0.08775\bar{\delta}_*^2(1 + 2P - 3P^2) - 0.2962\bar{\delta}_*(1 - P)} \quad (\bar{\delta}_* < 0)$$

Случай $M_1 = 0$ при $\bar{\delta}_* > 0$, $P/T > 0$, как выше было отмечено, имеет место, если $\bar{\delta}_* = 0.7405P/T$, $M_2 = 0$, при $\bar{\delta}_* < 0$, $P/T < 0$, если $|\bar{\delta}_*| = -0.7405P/T$. При этом

$$\theta = \sqrt{1 - 0.08775\bar{\delta}_*^2 + 0.2962\bar{\delta}_*} \quad (\bar{\delta}_* > 0)$$

$$\theta = \sqrt{1 - 0.08775\bar{\delta}_*^2 - 0.2962|\bar{\delta}_*|} \quad (\bar{\delta}_* < 0)$$



Фиг. 5

На фиг. 5 представлены наименьшие значения частот $\omega(m, P, T)$ при $T = 0.54P$ для $m = 1, 3, 5$ при $\delta_* = 0.4$ (фиг. 5, а) и $\delta_* = -0.4$ (фиг. 5, б). Нетрудно видеть, что при $\delta_* > 0$ и изменении P в интервале $0 \leq P < 1$, наименьшей является частота при $m = 1$, тогда как при P приближающемся сверху к единице, наименьшая частота реализуется при больших значениях m . При $\delta_* < 0$ и P изменяющемся в интервале $0 \leq P \leq P_*$ (P_* – критическое значение P при $T = 0$) наименьшая частота реализуется при $m = 1$.

Из приведенных выше формул (1.45), (1.46), (1.38) следует, что при $m > 1$ значения θ близки к единице ($\theta \approx 1$), т.е. когда $n^2 \approx \varepsilon^{-1/4} \lambda_m$. Поэтому данные результаты справедливы только для достаточно тонких оболочек, когда $\varepsilon^{-1/4} \approx \lambda_m$; тогда имеет место соотношение $n^2 \gg \lambda_m^2$ и данная теория справедлива. Кроме того на основании формулы (1.37), получаем, что при сравнительно больших m , когда $\theta \approx 1$, $\omega^2/\omega_*^2 \approx 0.5m^2(\theta^2 + \theta^{-2} - 2P) \approx m^2(1 - p)$, т.е. влиянием δ_* и T можно практически пренебречь.

2. Рассмотрим теперь случай, когда

$$P_1 = P_0 + P_t \cos \Omega t, \quad q_1 = q_0 + q_t \cos \Omega t \quad (2.1)$$

Будем искать решение уравнения (1.6) в форме

$$\omega = f_{mn}(t) \cos \lambda_m \xi \sin n \varphi \quad (2.2)$$

Подставляя приведенное решение в (1.6) и требуя, чтобы последнее удовлетворилось при любых ξ и φ , получаем

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \frac{E}{\rho r^2} [\varepsilon n^4 + \lambda_m^4 n^{-4} + 4\delta \lambda_m^2 n^2 + 4\delta^2 - p_1(t)(\lambda_m^2 - 2\delta n^2) - \bar{q}(t)n^2] f_{mn} = 0 \quad (2.3)$$

Частоты собственных колебаний оболочки (при $P_1 = P_0, q = q_0$) определяются из уравнения (2.3), если положить $f_{m,n}(t) = C \sin \omega_{mn} t$ и выражаются формулой (1.8). Так как уравнение (2.3) идентично для всех форм колебаний, то индексы m, n можно опустить.

Введем аналогично выше сказанному, безразмерные величины (1.9), (1.38) и запишем уравнение (2.3) в виде

$$d^2 f/dt^2 + 0.5m^2 \omega_*^2 [\theta^2 + \theta^{-2} + 2.37\bar{\delta}_* \theta^{-1} + 1.404\bar{\delta}_*^2 - 2(P_0 + P_t \cos \Omega t)(1 - 1.185\bar{\delta}_* \theta) - 1.755(T_0 + T_t \cos \Omega t)m^{-1}\theta] f = 0 \quad (2.4)$$

$$P_i = p_i/p_{0*}, \quad T_i = \bar{q}_i/\bar{q}_{0*}, \quad (i = 0, t), \quad \bar{\delta}_* = \delta_*/m$$

Приведем уравнение (2.4) к стандартному виду уравнения Матье

$$d^2 f/dt^2 + \omega^2(\theta)[1 - 2\mu(\theta)\cos\Omega t]f = 0 \quad (2.5)$$

$$\omega^2(\theta) = \omega_0^2(\theta)[1 - M_0(\theta)], \quad \omega_0^2(\theta) = 0.5\omega_*^2 m^2 D(\theta) \quad (2.6)$$

$$D(\theta) = \theta^2 + \theta^{-2} + 2.37\bar{\delta}_* \theta^{-1} + 1.404\bar{\delta}_*^2, \quad \omega_*^2 = 2\lambda_1^2 \varepsilon^{1/2} E/(\rho r^2) \quad (2.7)$$

$$\mu(\theta) = \frac{M_t(\theta)}{2[1 - M_0(\theta)]}, \quad M_0 = \frac{P_0}{P(\theta)} + \frac{T_0}{T(\theta)}, \quad M_t = \frac{P_t}{P(\theta)} + \frac{T_t}{T(\theta)}$$

$$P(\theta) = D(\theta)/2(1 - 1.185\bar{\delta}_* \theta); \quad T(\theta) = D(\theta)/1.755m^{-1}\theta \quad (2.8)$$

Если $\frac{P(t)}{T(t)} = \chi$, тогда $P_i/T_i = \chi$ ($i = 0, t$), при этом получаем

$$M_0 = T_0/T_c, \quad M_t = T_t/T_c, \quad T_c = D(\theta)/2\chi(1 - 1.185\bar{\delta}_* \theta) + 1.755m^{-1}\theta$$

Величину μ обычно называют коэффициентом возбуждения. Решение уравнения (2.5) исследовались в целом ряде работ, где отмечено, что при определенных соотношениях между μ , Ω , ω и $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (2.6) будет неограниченно возрастать в областях неустойчивости. Обобщая результаты [11] на рассматриваемую оболочку, приведем ниже следующие формулы. Для выяснения расположения областей динамической неустойчивости, первоначально рассмотрим случай, когда $P_i \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$).

При этом получаем, что эти области неустойчивости располагаются вблизи частот

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)/k \quad (2.9)$$

В зависимости от числа k различают первую, вторую, третью и т.д. области динамической неустойчивости. Область неустойчивости ($k = 1$), лежащая вблизи $\Omega_* = 2\omega(\theta)$, когда $\omega(\theta)$ принимает наименьшее значение, является наиболее опасной и имеет поэтому наибольшее практическое значение. Эту область называют главной областью динамической неустойчивости.

При P_t отличном от нуля получаем следующую формулу для границ главной области неустойчивости:

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)\sqrt{1 \pm \mu(\theta)} \quad (2.10)$$

Если учитывать силы сопротивления, пропорциональные первой производной от перемещения по времени (с коэффициентом затухания ε), тогда формула для определения границ главной области неустойчивости принимает вид

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)\sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2(\theta) - (\Delta/\pi)^2}}, \quad \Delta = 2\pi\varepsilon/\omega(\theta) \quad (2.11)$$

где отброшены члены, содержащие высшие степени Δ/π , учитывая, что декремент затухания Δ обычно весьма мал в сравнении с единицей. Значения выражений $\omega(\theta)$, $P(\theta)$, $\mu(\theta)$ определяются на основании формул (2.6), (2.7), (2.8), где m, u, θ соответствуют наименьшему значению $\omega(\theta)$. При $m = 1$ на основании формулы (1.22) $\theta = N$, соответствующие значения N и $\omega(N)$ в зависимости от P_0 и $\bar{\delta}_*$ представлены на фиг. 3, 4. Из (2.11) следует, что минимальное значение коэффициента возбуждения (критическое), при котором еще возможны незатухающие колебания, определяется равенством

$$\mu_{*1} = \Delta/\pi \quad (2.12)$$

Для границ второй области неустойчивости ($k = 2$) имеет место формула

$$\Omega_* = \omega(\theta) \sqrt{1 + \mu^2(\theta) \pm \sqrt{\mu^4(\theta) - (\Delta/\pi)^2 [1 - \mu^2(\theta)]}} \quad (2.13)$$

В данном случае критическое значение коэффициента возбуждения приближенно определяется равенством $\mu_{*2}(\theta) = (\Delta/\pi)^{1/2}$. Аналогичным образом, обобщая результаты [11], можно привести формулы и для границ третьей области неустойчивости, которая практически редко реализуется.

На основании приведенных формул и графиков нетрудно определить интервалы изменения возбуждающих частот (в зависимости от δ_* , P_0 , P_t , T_0 , T_t) попадающих в области динамической неустойчивости. Так, например, для $\delta_* = 0.4$, $P_t/T_t = 1.85$ ($i = 0, t$), $P_0 = 0.2$, $P_t = 0.05$ ($T_0 = 0.108$, $T_t = 0.027$), $\Delta = 0.01$ получаем, что наименьшая частота реализуется при $m = 1$, $\theta = N = 1.11$, $\omega(N) = 1.167\omega_*$, $T_c(N) = 0.842$, $\mu(N) = 0.0183$, $\mu_{1*} = 0.00318$, $\mu_{2*} = 0.0564$. Тогда на основании формулы (2.11) получаем, что значения Ω , заключенные в интервале $2.292\omega_* \leq \Omega \leq 2.355\omega_*$, находятся в главной области динамической неустойчивости. Так как $\mu(N) < \mu_{*2}$, то вторая область неустойчивости не достижима.

В случае $\delta_* = -0.4$ и тех же значениях внешней нагрузки наименьшая частота реализуется при $m = 1$, $\theta = N = 0.924$, $\omega(N) = 0.486\omega_*$, $T_c(N) = 0.1761$, $\mu(N) = 0.1978$. При этом на основании формулы (2.11) получаем, что в главную область динамической неустойчивости попадают Ω , заключенные в интервале $0.7798\omega_* \leq \Omega \leq 1.1643\omega_*$. В данном случае вторая область неустойчивости также достижима так как $\mu(N) > \mu_{*2}$. При этом на основании формулы (2.13) получаем, что во вторую область неустойчивости попадают значения Ω , находящиеся в интервале $0.486\omega_* \leq \Omega \leq 0.5046\omega_*$.

Приведенные выше формулы позволяют достаточно просто определять области динамической неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35–45.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 319 с.
5. Григолюк Э.И., Кобанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
6. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек // Инж. ж. МТТ. 1968. № 3. С. 140–144.
7. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 121–126.
8. Муштары Х.М., Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и нормального давления // ПММ. Т. 18. Вып. 6. 1954. С. 667–674.
9. Никулин М.В. Влияние осевых усилий на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки. М.: Оборонгиз, 1959. С. 131–145.
10. Стрэгт М.Д. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: Гос. науч. изд-во Украина; 1935. 238 с.
11. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956, 600 с.