

УДК 539.3

© 2006 г. А.В. МАНЖИРОВ, Д.А. ПАРШИН

**НАРАЩИВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА  
В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ**

Исследуются процессы формирования шара, а также полей напряжений и перемещений в нем за счет притока материала к поверхности в условиях действующего центрально-симметричного силового поля. Предложена модель процесса наращивания шара. Рассмотрены различные определяющие соотношения для формирующего его материала. Изучено влияние скорости и способа наращивания на основные характеристики напряженно-деформированного состояния шара. Проведен сравнительный анализ этих характеристик для моделей, учитывающих и не учитывающих особенности процесса роста. Выполнены расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в процессе аккреции. Выявлены принципиально новые механические эффекты, возникающие только вследствие наращивания.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим однородный шар радиуса  $a_0$ , находящийся под действием центрально-симметричного силового поля интенсивности

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -e_r f(r), \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r, \quad r = |\mathbf{r}| \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор с началом в центре шара,  $f(r)$  – некоторая непрерывная функция при  $r > 0$ . Пусть этот шар сформирован в момент времени  $t = t_0$  из изотропного линейно вязкоупругого стареющего материала с нулевым моментом времени зарождения и, начиная с некоторого момента  $t = t_1$ , претерпевает  $N$  последовательных этапов непрерывного наращивания вследствие равномерного притока того же материала к его поверхности.

Пренебрегая инерционными эффектами и предполагая малость деформаций, исследуем эволюцию напряженно-деформированного состояния шара на этапах его непрерывного наращивания, в паузах между ними, а также после окончательной остановки роста. Исследование проведем для случая ненапряженного присоединяемого материала.

Чтобы не решать дополнительно вопрос о физической возможности организации притока вещества к поверхности шара в условиях отталкивающего силового поля, примем, что в законе (1.1)  $f(r) > 0$  при  $r > 0$ .

Возьмем определяющее соотношение материала в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{F} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) \left[ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{1}} \hat{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \right], \quad \mathcal{F} + \mathcal{N}_s = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_s)^{-1} \\ \mathcal{L}_s g(t) &= \int_s^t g(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s g(t) = \int_s^t g(\tau) R(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$K(t, \tau) = G(t) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(t)^{-1} + \omega(t, \tau)$$

где  $\tau_0(\mathbf{r})$  – момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  – тензоры напряжения и деформации,  $G(t)$  и  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент

Пуассона,  $\mathcal{F}$  – тождественный оператор,  $\mathcal{L}_s$  и  $\mathcal{N}_s$  – операторы Вольтерра с параметром  $s$ ,  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  – ядра ползучести и релаксации,  $\Delta(t, \tau)$  – функция удельной деформации сдвига,  $\omega(t, \tau)$ ,  $t > \tau \geq 0$ , – мера ползучести при чистом сдвиге;  $\omega(\tau, \tau) \equiv 0$ . Функция удельной деформации может быть также представлена в виде:

$$\Delta(t, \tau) = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_\tau)G(t)^{-1} \quad (1.3)$$

Будем считать, что в течение  $k$ -го этапа непрерывного наращивания радиус шара возрастает по гладкому закону  $a_{(k)}(t)$ , где  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$ , причем

$$\begin{aligned} \Delta t_{2k-1} = t_{2k-1} - t_{2k-2} &\geq 0, & \Delta t_{2k} = t_{2k} - t_{2k-1} &> 0 \\ a_{(k)}(t_{2k-1} + 0) = a_{k-1}, & & a_{(k)}(t_{2k} - 0) = a_k & \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

Тогда в силу условий ненапряженности и равномерности притока присоединяемого материала для момента начала загрузки элементов шара будем иметь

$$\tau_0(\mathbf{r}) \equiv \tau_0(r) = \begin{cases} t_0, & 0 < r < a_0 \\ \tau_*(r), & a_{k-1} < r < a_k \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $\tau_*(r)$  – момент присоединения к шару слоя радиуса  $r$ . Очевидно, что для  $r \in (a_{k-1}, a_k)$  имеет место тождество

$$a_{(k)}(\tau_*(r)) \equiv r \quad (1.5)$$

Введем еще одно необходимое для дальнейшего изложения обозначение. Для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  положим

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = (\mathcal{F} - \mathcal{L}_{\tau_0(r)})g(\mathbf{r}, t)G(t)^{-1} \quad (1.6)$$

**2. Напряженно-деформированное состояние шара до начала наращивания.** Вплоть до момента начала наращивания напряженно-деформированное состояние рассматриваемого шара описывается классической краевой задачей линейной теории вязкоупругости:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} &= \mathbf{e}_r f(r), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \hat{\mathbf{T}} &= 2G(\mathcal{F} + \mathcal{N}_{t_0}) \left( \hat{\mathbf{E}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{1}} \hat{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right), \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \\ \mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{T}} &= \mathbf{0}, \quad r = a_0; \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r u(r, t)$  – вектор перемещения. В силу обозначения (1.6) и представления (1.3) эта задача эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}^\circ &= \mathbf{e}_r f(r) \Delta(t, t_0), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \hat{\mathbf{T}}^\circ &= 2\hat{\mathbf{E}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{1}} \hat{\mathbf{1}} \cdot 2\hat{\mathbf{E}}; \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \\ \mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{T}}^\circ &= \mathbf{0}, \quad r = a_0; \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Компонентная запись краевой задачи (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r^{\circ}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r^{\circ} - \sigma_{\vartheta}^{\circ}}{r} = f(r) \Delta(t, t_0), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$\sigma_r^{\circ} = 2 \frac{(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_{\vartheta}}{1-2\nu}, \quad \sigma_{\vartheta}^{\circ} = \sigma_{\varphi}^{\circ} = 2 \frac{\nu\varepsilon_r + \varepsilon_{\vartheta}}{1-2\nu}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r}$$

$$\sigma_r^{\circ} = 0, \quad r = a_0; \quad u \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

где  $\sigma_r(r, t)$  и  $\sigma_{\vartheta}(r, t)$ ,  $\sigma_{\varphi}(r, t)$  – радиальное и окружные напряжения,  $\varepsilon_r(r, t)$  и  $\varepsilon_{\vartheta}(r, t)$ ,  $\varepsilon_{\varphi}(r, t)$  – радиальная и окружные деформации.

Решение уравнения задачи (2.2) дает

$$u = \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \left[ r \int_0^r f(\xi) d\xi - \frac{1}{r^2} \int_0^r \xi^3 f(\xi) d\xi \right] \Delta(t, t_0) + rC_1(t) + \frac{C_2(t)}{r^2}$$

где  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  – произвольные функции. Для удовлетворения краевому условию из (2.2) при  $r \rightarrow 0$  необходимо и достаточно, чтобы

$$C_2(t) \equiv 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r \xi^3 f(\xi) d\xi = 0$$

Следовательно, поставленная задача имеет решение только для центрально-симметричного поля, у которого

$$f(r) = o(r^{-2}), \quad r \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

В этом случае, удовлетворяя краевому условию из (2.2) при  $r = a_0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} r \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] \Delta(t, t_0) \\ \sigma_r^{\circ} &= -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] \Delta(t, t_0) \\ \sigma_{\vartheta}^{\circ} &= -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] \Delta(t, t_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где обозначено

$$A_0 = \int_0^{a_0} \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{a_0^3} \right) f(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

Отсюда при помощи (1.6) и (1.3) найдем истинные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] \\ \sigma_{\vartheta} &= -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Найденные напряжения не зависят от времени и совпадают с напряжениями в аналогично нагруженном упругом шаре (об упругом решении см. также [3], [4]), что является следствием известного принципа соответствия в линейной теории вязкоупругости [2].

Для напряженного состояния, реализуемого в центрально-симметрично нагруженном шаре, максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений даются формулами

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}, \quad T = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{dev} \hat{\mathbf{T}} \cdot \operatorname{dev} \hat{\mathbf{T}}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\sqrt{3}} \quad (2.7)$$

Подставляя сюда найденные напряжения, получаем

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} T = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \int_0^r \frac{\xi^3}{r^3} f(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

Данная величина монотонно возрастает при удалении от центра шара и, следовательно, достигает своего максимального значения на его поверхности.

**3. Деформирование шара в процессе его непрерывного наращивания.** Рассмотрим  $k$ -й этап непрерывного наращивания шара. Частицы притекающего в течение его материала сцепляются с поверхностью шара и после присоединения продолжают свое движение уже в составе сплошного растущего тела. Поэтому допустимо считать, что вектор скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  имеет в области

$$\Omega_{(k)} = \{(\mathbf{r}, t) | 0 < r < a_{(k)}(t), t_{2k-1} < t < t_{2k}\} \subset \mathbb{R}^4$$

непрерывные частные производные первого порядка. Тогда тензорная функция

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

будет непрерывной в  $\Omega_{(k)}$ , поскольку определяющее уравнение (1.2) может быть преобразовано к виду:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = 2\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \hat{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{1}} \cdot \operatorname{div} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = [\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla \mathbf{v}^\top(\mathbf{r}, t)]/2$$

где  $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)$  – тензор скоростей деформации. При этом локальное условие равновесия растущего шарового тела в рассматриваемом поле сил будет допускать следующую запись [5]:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad 0 < r < a_{(k)}(t)$$

Необходимо особо отметить, что в силу разрывности функции  $\tau_0(\mathbf{r})$  на границах частей шара, сформированных на различных этапах наращивания, тензоры напряжения и деформации не могут быть непрерывными во всей области, занимаемой в данный момент растущим телом. Это обстоятельство, разумеется, остается в силе и после прекращения роста.

Обратимся теперь к краевому условию на поверхности растущего шара. Условие, отражающее факт ненапряженности притекающего материала при его присоединении к шару, в текущий момент времени  $t$  имеет вид (см., например, [1], [2], [5]):

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{0}}, \quad r = a_{(k)}(t)$$

Совокупность таких условий для всех моментов  $k$ -го этапа наращивания может быть записана в виде (см. (1.6)):

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \hat{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \hat{\mathbf{0}}, \quad a_{k-1} < r < a_k \quad (3.1)$$

Сворачивая последнее равенство с оператором Гамильтона, получаем

$$[\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t)]|_{t=\tau_*(r)} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \quad a_{k-1} < r < a_k \quad (3.2)$$

В силу уравнения равновесия и вытекающего из тождества (1.5) представления

$$\nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r \tau'_*(r) = \mathbf{e}_r a'_{(k)}(\tau_*(r))^{-1}$$

соотношение (3.2) эквивалентно следующему соотношению:

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = -\mathbf{e}_r f(r) G(\tau_*(r))^{-1} a'_{(k)}(\tau_*(r)), \quad a_{k-1} < r < a_k$$

Рассматривая его на поверхности  $r = a_{(k)}(t)$ , приходим к краевому условию для тензора  $\hat{\mathbf{S}}$  на поверхности роста (см. также [5]):

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_r q_{(k)}(t), \quad r = a_{(k)}(t), \quad q_{(k)}(t) = f(a_{(k)}(t)) G(t)^{-1} a'_{(k)}(t)$$

Итак, на  $k$ -м этапе непрерывного наращивания можем сформулировать следующую краевую задачу:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad 0 < r < a_{(k)}(t), \quad t_{2k-1} < t < t_{2k}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = 2\hat{\mathbf{D}} + \frac{\mathbf{v}}{1-2\nu} \hat{\mathbf{1}} \cdot 2\hat{\mathbf{D}}; \quad \hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{S}} = -\mathbf{e}_r q_{(k)}(t), \quad r = a_{(k)}(t); \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r \nu(r, t)$ . Задача (3.3) с точностью до замены в ней вектора  $\mathbf{v}$  на вектор перемещения, а тензоров  $\hat{\mathbf{D}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  – соответственно на тензор деформации и отнесенный к модулю сдвига тензор напряжения является классической граничной задачей линейной теории упругости для переменных во времени области и нагрузки. В компонентной форме задача (3.3) имеет вид:

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} + 2 \frac{S_r - S_\vartheta}{r} = f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad 0 < r < a_{(k)}(t), \quad t_{2k-1} < t < t_{2k}$$

$$S_r = 2 \frac{(1-\nu)D_r + 2\nu D_\vartheta}{1-2\nu}, \quad S_\vartheta = S_\varphi = 2 \frac{\nu D_r + D_\vartheta}{1-2\nu}; \quad D_r = \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad D_\vartheta = D_\varphi = \frac{\nu}{r} \quad (3.4)$$

$$S_r = -q_{(k)}(t), \quad r = a_{(k)}(t); \quad \nu \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

где  $S_r, \vartheta, \varphi(r, t)$  и  $D_r, \vartheta, \varphi(r, t)$  – соответствующие диагональные компоненты тензоров  $\hat{\mathbf{S}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$  в сферической системе координат.

Решая уравнение задачи (3.4), будем иметь

$$v = -\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}r \left[ B_1(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] + \frac{B_2(t)}{r^2}$$

где  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$  – произвольные функции. При выполнении ограничения (2.3), наложенного на рассматриваемое силовое поле, для удовлетворения краевому условию из (3.4) при  $r \rightarrow 0$  необходимо и достаточно  $B_2(t) \equiv 0$ . Тогда после удовлетворения краевому условию из (3.4) при  $r = a_{(k)}(t)$  находим

$$v = -\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}r \left[ A_{(k)}(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}r q_{(k)}(t)$$

$$S_r = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_{(k)}(t) - \int_0^r \left( 1 + 2\frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - q_{(k)}(t)$$

$$S_\vartheta = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_{(k)}(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - q_{(k)}(t)$$

где введена функция

$$A_{(k)}(t) = \int_0^{a_{(k)}(t)} \left[ 1 + 2\frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{a_{(k)}^3(t)} \right] f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi$$

**4. Деформирование шара после остановки роста.** Рассмотрим теперь период деформирования шара от момента прекращения  $k$ -го этапа его наращивания и, если  $k < N$ , до момента начала следующего этапа. На данном интервале времени дифференциальное уравнение равновесия может быть по-прежнему записано для тензора  $\hat{S}$ , непрерывного в области

$$\Omega_k = \{(\mathbf{r}, t) | 0 < r < a_k, t_{2k} < t < t_{2k+1}\} \subset \mathbb{R}^4$$

(где формально считается  $t_{2N+1} = +\infty$ ), причем в той же форме, что и во время непрерывного роста. Однако краевое условие на поверхности шара здесь имеет уже классический вид

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \quad r = a_k$$

и отражает факт отсутствия на этой поверхности напряжения. Аналогичное условие, естественно, может быть записано и для тензора  $\hat{S}$ .

Таким образом, в паузе между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м этапами наращивания или, если  $k = N$ , после окончательной остановки роста имеем краевую задачу

$$\nabla \cdot \hat{S} = \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad 0 < r < a_k, \quad t_{2k} < t < t_{2k+1}$$

$$\hat{S} = 2\hat{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{1}} \cdot 2\hat{D}; \quad \hat{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{S} = \mathbf{0}, \quad r = a_k; \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0$$

Ее решение, очевидно, будет иметь вид (см. п. 3):

$$v = -\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}r \left[ A_k(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right]$$

$$S_r = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_k(t) - \int_0^r \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right]$$

$$S_\theta = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_k(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right]$$

$$A_k(t) = \int_0^{a_k} \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{a_k^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi$$

**5. Определение перемещения и напряжений в наращиваемом шаре.** Если ввести функцию

$$a(t) = \begin{cases} a_{(k)}(t), & t_{2k-1} \leq t < t_{2k} \\ a_k, & t_{2k} \leq t < t_{2k+1} \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases}$$

и положить

$$q(t) = f(a(t))G(t)^{-1}a'(t) \tag{5.1}$$

то можно объединить результаты пп. 3 и 4 и для  $t > \tau_1(r)$ , где

$$\tau_1(r) = \begin{cases} t_1, & 0 < r < a_0 \\ \tau_*(r), & a_{k-1} < r < a_k \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases}$$

таких, что  $t \neq t_2, t_3, \dots, t_{2N}$ , записать:

$$v = -\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}r \left[ A(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}rq(t)$$

$$S_r = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A(t) - \int_0^r \left( 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - q(t) \tag{5.2}$$

$$S_\theta = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A(t) - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \right] - q(t)$$

где используется функция

$$A(t) = \int_0^{a(t)} \left[ 1 + 2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{a^3(t)} \right] f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \tag{5.3}$$

Поскольку в рассматриваемом процессе напряженно-деформированное состояние во всех точках тела должно изменяться непрерывно во времени, то, зная компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  и тензора  $\hat{\mathbf{S}}$ , можем для  $r \in (0, a_0) \cup \bigcup_{k=1}^N (a_{k-1}, a_k)$  и всех моментов времени  $t > \tau_1(r)$  найти

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau_1(r)) + \int_{\tau_1(r)}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (5.4)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(r)) + \int_{\tau_1(r)}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (5.5)$$

где в силу условия (3.1) отсутствия напряжений в притекающем материале

$$\hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(r)) = \begin{cases} \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t_1), & 0 < r < a_0 \\ \hat{\mathbf{0}}, & a_{k-1} < r < a_k \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases}$$

а, если принять, что перемещения присоединяемых частиц отсчитываются от мест их присоединения,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau_1(r)) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_1), & 0 < r < a_0 \\ \mathbf{0}, & a_{k-1} < r < a_k \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases}$$

При этом вектор  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_1)$  и тензор  $\hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t_1)$  следует брать из решения задачи на этапе до начала наращивания, а их компоненты соответственно вычислять по формулам (2.4).

После того, как построена полная эволюция тензора  $\hat{\mathbf{T}}^\circ$ , эволюция напряжений в любой точке шара находится, очевидно, из решения интегрального уравнения Вольтера второго рода

$$\hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(r)}^t \frac{\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau \quad (5.6)$$

**6. Особенности напряженного состояния наращиваемого шара.** Одной из основных особенностей напряженного состояния любого наращиваемого тела в общем случае является разрыв тензора напряжения на базовых поверхностях роста – поверхностях, к которым начинается приток материала на очередном этапе наращивания. Для исследования этого эффекта в рассматриваемой задаче запишем решение уравнения (5.6) в резольвентной форме:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)G(t)^{-1} = \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(r)}^t \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau)R(t, \tau) d\tau$$

Согласно равенству (5.5) это решение при  $r \in \bigcup_{k=1}^N (a_{k-1}, a_k)$  и  $t > \tau_*(r)$  имеет вид:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)G(t)^{-1} = \int_{\tau_*(r)}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau) d\tau + \int_{\tau_*(r)}^t R(t, \tau) d\tau \int_{\tau_*(r)}^{\tau} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \zeta) d\zeta$$



а при  $r \in (0, a_0)$  и  $t > t_1$  преобразуется к виду:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)G(t)^{-1} = \int_{t_0}^{t_1} \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau)R(t, \tau)d\tau + \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t_1) \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau)d\tau \right] +$$

$$+ \int_{t_1}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau)d\tau + \int_{t_1}^t R(t, \tau)d\tau \int_{t_1}^{\tau} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \zeta)d\zeta$$

Рассматривая первое представление при  $r \rightarrow a_0 + 0$  и  $r \rightarrow a_{k-1} \pm 0$  ( $k = 2, \dots, N$ ), а второе – при  $r \rightarrow a_0 - 0$  и учитывая непрерывность тензор-функции  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t)$  в областях  $\Omega_{(l)}$ ,  $\Omega_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), можем найти эволюцию скачка тензора напряжения при переходе через границы частей тела, полученных на различных этапах наращивания:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)|_{r=a_0-0}^{a_0+0} = -G(t) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, \tau) \right. \left. R(t, \tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \hat{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t_1) \right|_{r=a_0-0} \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau)d\tau \right] \Bigg\}, \quad t > t_1$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)|_{r=a_{k-1}-0}^{a_{k-1}+0} = -G(t) \left\{ \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} R(t, \tau)d\tau \int_{t_{2k-2}}^{\tau} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \zeta) \right. \left. d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, \tau) \right|_{r=a_{k-1}} d\tau \left[ 1 + \int_{t_{2k-1}}^t R(t, \tau)d\tau \right] \Bigg\}, \quad t > t_{2k-1} \quad (k = 2, \dots, N)$$

Теперь, используя третьи по счету выражения из (2.4) и (5.2), можно вычислить величины скачков окружного напряжения  $\sigma_\vartheta(a_{k-1} + 0, t) - \sigma_\vartheta(a_{k-1} - 0, t)$  для  $t > t_{2k-1}$  ( $k = 1, \dots, N$ ), а, привлекая краевые условия из (2.1) и (4.1) соответственно при  $r = a_0$  и  $r = a_k$ , – убедиться в выполнении необходимого условия механического контакта всех составных частей шара

$$\sigma_r(a_{k-1} + 0, t) \equiv \sigma_r(a_{k-1} - 0, t), \quad t > t_{2k-1} \quad (k = 1, \dots, N)$$

Выражение для величины разрыва окружного напряжения на базовой поверхности роста  $r = a_0$  имеет наиболее простой вид:

$$\sigma_\vartheta(r, t)|_{r=a_0-0}^{a_0+0} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{a_0} \int_0^3 f(\xi) d\xi^3 G(t) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Delta(\tau, t_0) R(t, \tau) d\tau + \Delta(t_1, t_0) \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] \right\} =$$

$$= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{a_0} \int_0^3 f(\xi) d\xi^3 \{ 1 + G(t)(\mathcal{F} + \mathcal{N}_{t_1})[\omega(t_1, t_0) - \omega(t, t_0)] \}, \quad t > t_1$$

Данная величина зависит только от момента изготовления и размера исходного тела, действующих на него объемных сил и времени начала притока дополнительного материала к его поверхности и не зависит от параметров последующего процесса наращивания, а ее изменение во времени определяется лишь реологическими свойствами материала и его старением. Зависимость этой величины от времени и влияние на нее момента изготовления исходного шара исчезает при достаточно большой продолжительности паузы  $\Delta t_1$  перед началом первого этапа наращивания. Действительно, в силу одного из основных свойств меры ползучести [2]:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \omega(\tau + \Delta t, \tau) = \Phi(\tau), \quad \tau \geq 0 \quad (6.1)$$

где  $\Phi(\tau)$  – так называемая функция старения, при больших значениях  $t - \tau$  справедливо  $\omega(t, \tau) \approx \Phi(\tau)$ . Поэтому, если  $\Delta t_1$  велико, то  $\omega(t_1, t_0) \approx \Phi(t_0)$ , и при  $t > t_1$ :

$$\omega(t, t_0) \approx \Phi(t_0), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{N}_{t_1})[\omega(t_1, t_0) - \omega(t, t_0)] \approx 0$$

Отметим еще одно характерное свойство распределения напряжений в наращиваемом шаре: непрерывный график зависимости радиального напряжения от радиальной координаты будет иметь изломы в точках  $r = a_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Величины соответствующих скачков производной легко определить, зная скачки окружного напряжения и воспользовавшись локальным уравнением равновесия частей шара, записанным в координатной форме:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = f(r), \quad 0 < r < a(t), \quad r \neq a_0, \dots, a_{N-1}, \quad t > t_1$$

Они в силу непрерывности радиального напряжения и функции  $f(r)$  будут равны

$$\left. \frac{\partial \sigma_r(r, t)}{\partial r} \right|_{r=a_{k-1}-0}^{a_{k-1}+0} = 2a_{k-1}^{-1} \sigma_\theta(r, t) \Big|_{r=a_{k-1}-0}^{a_{k-1}+0}, \quad t > t_{2k-1} \quad (k = 1, \dots, N)$$

Напряженному состоянию рассматриваемого наращиваемого тела, помимо описанных особенностей, свойственна еще одна, обусловленная самой структурой тензора напряжения и связанная с поведением максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$  и интенсивности касательных напряжений  $T$  внутри тела. Найдем по формулам (2.7) и (5.2) при  $t > \tau_1(r)$ ,  $t \neq t_2, t_3, \dots, t_{2N}$ :

$$\frac{\partial \tau_{\max}^\circ(r, t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{3} \partial T^\circ(r, t)}{2 \partial t} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \int_0^r \frac{\xi^3}{r^3} f(\xi) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi \quad (6.2)$$

Видно, что скорости изменения величин  $\tau_{\max}^\circ$  и  $T^\circ$ , а следовательно, и сами значения  $\tau_{\max}$  и  $T$  в точке шара, лежащей на сфере радиуса  $r$ , во все моменты времени после возникновения в этой точке напряжения определяются лишь историей формирования той части шара, которая расположена внутри данной сферы, и действующими на эту часть объемными силами. Это обстоятельство и определяет особенности поведения указанных характеристик напряженного состояния шара, наращиваемого в центрально-симметричном силовом поле.

Первая особенность состоит в том, что  $\tau_{\max}$  и  $T$  не изменяются со временем в точках исходного тела, а значит, на протяжении всего процесса наращивания и после его завершения сохраняют свои упруго-мгновенные значения, достигнутые в момент време-

ни  $t = t_0$ . В этом легко убедиться непосредственно на основании формул (6.2) и (5.5), воспользовавшись представлением (1.4) и формулами (2.8), (1.6) и (1.3):

$$\tau_{\max}^{\circ}(r, t) = \tau_{\max}^{\circ}(r, t_1) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_0^r \frac{\xi^3}{r^3} f(\xi) d\xi \omega(\tau, t_0) \Big|_{\tau=t_1}$$

$$\tau_{\max}^{\circ}(r, t_1) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_0^r \frac{\xi^3}{r^3} f(\xi) d\xi \left[ \frac{1}{G(t_0)} + \omega(t_1, t_0) \right], \quad 0 < r < a_0, \quad t > t_1$$

то есть

$$\tau_{\max}^{\circ}(r, t) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_0^r \frac{\xi^3}{r^3} f(\xi) d\xi \Delta(t, t_0), \quad 0 < r < a_0, \quad t > t_1$$

Действуя на обе части последнего выражения оператором  $\mathcal{F} + \mathcal{N}_{t_0}$ , приходим к представлению (2.8), но уже для  $t > t_1$ .

Второй особенностью является то, что, если пауза  $\Delta t_{2k-1}$  перед началом  $k$ -го этапа наращивания достаточно велика, то максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений в тех слоях материала, которые присоединятся в начале данного этапа, будут во все последующие моменты деформирования этих слоев весьма мало отличаться от нуля. Для доказательства этого факта достаточно, применив формулы (6.2) и (5.5), найти

$$\tau_{\max}^{\circ}(a_{k-1} + 0, t) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_0^{a_{k-1}} \frac{\xi^3}{a_{k-1}^3} f(\xi) \omega(\tau, \tau_0(\xi)) \Big|_{\tau=t_{2k-1}} d\xi, \quad t > t_{2k-1}$$

и воспользоваться свойством (6.1) меры ползучести. Поскольку при любом значении

$\xi \in (0, a_0) \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} (a_{l-1}, a_l)$  имеет место  $\tau_0(\xi) < t_{2k-2}$ , то для  $t > t_{2k-1}$  справедливо

$$t - \tau_0(\xi) > t_{2k-1} - \tau_0(\xi) = \Delta t_{2k-1} + t_{2k-2} - \tau_0(\xi) > \Delta t_{2k-1}$$

Поэтому при большой длительности  $\Delta t_k$  будет  $\omega(t_{2k-1}, \tau_0(\xi)) \approx \Phi(\tau_0(\xi))$  и  $\omega(t, \tau_0(\xi)) \approx \Phi(\tau_0(\xi))$ ,  $\tau_{\max}^{\circ}(a_{k-1} + 0, t) \approx 0$ ,  $t > t_{2k-1}$

а значит

$$\tau_{\max}(a_{k-1} + 0, t) \approx 0, \quad T(a_{k-1} + 0, t) \approx 0, \quad t > t_{2k-1}$$

**7. Упругий случай.** Все проведенные рассуждения, разумеется, остаются справедливыми и в частном случае чисто упругого поведения материала. В этом случае нужно всюду считать  $\omega(t, \tau) \equiv 0$ ,  $G(t) \equiv \text{const}$  и, следовательно,  $g^{\circ}(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G$  для произвольной функции радиус-вектора и времени (см. п. 1).

Тогда на этапе до начала наращивания напряжения по-прежнему определяются формулами (2.6) и (2.5), а перемещение равно

$$u = -\frac{1-2\nu}{6G(1-\nu)} r \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right]$$

Максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений находятся по формуле (2.8).

После начала процесса наращивания согласно (5.2) будем иметь

$$v = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}rq(t), \quad S_r = S_\vartheta = -q(t), \quad t > \tau_1(r), \quad t \neq t_2, t_3, \dots, t_{2N}$$

Поэтому в соответствии с (5.4), (5.5) и (5.1) при  $r \in (0, a_0)$  и  $t > t_1$  имеем

$$u = -\frac{1-2\nu}{6G(1-\nu)}r \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] - \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}r \int_{a_0}^{a(t)} f(\xi) d\xi$$

$$\sigma_r = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 + 2\frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] - \int_{a_0}^{a(t)} f(\xi) d\xi$$

$$\sigma_\vartheta = -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[ A_0 - \int_0^r \left( 1 - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\xi^3}{r^3} \right) f(\xi) d\xi \right] - \int_{a_0}^{a(t)} f(\xi) d\xi$$

а при  $r \in \bigcup_{k=1}^N (a_{k-1}, a_k)$  и  $t > \tau_*(r)$  получаем

$$u = -\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}r \int_r^{a(t)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma_r = \sigma_\vartheta = - \int_r^{a(t)} f(\xi) d\xi$$

Как видим, состояние наращиваемого упругого шара в заданном центрально-симметричном силовом поле определяется лишь его текущим размером и размером исходно существующей части и не зависит от количества этапов наращивания, вида соответствующих им законов увеличения радиуса шара и длительности пауз перед этапами. Однако, как четко показывают приведенные формулы, это ни в коем случае не означает, что данное состояние может быть найдено из решения классической задачи теории упругости для тела с параметрически изменяющейся границей.

Напряженному состоянию наращиваемого упругого шара будут присущи все отмеченные в п. 6 характерные свойства. При этом скачок окружного напряжения на поверхности раздела исходной и дополнительной частей шара будет не зависеть от времени и составлять величину

$$\sigma_\vartheta|_{r=a_0+0} - \sigma_\vartheta|_{r=a_0-0} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{a_0} \frac{\xi^3}{3} f(\xi) d\xi$$

Что касается поведения максимального касательного напряжения и интенсивности касательных напряжений в дополнительной части шара, то здесь оказывается справедливым более сильное утверждение, чем для общего случая вязкоупругости. А именно, во всех точках дополнительной части тела  $\tau_{\max} \equiv T \equiv 0$ . Это означает, что присоединенный материал загружен всегда как идеальная жидкость.

**8. Пример: наращивание гравитирующего шара.** Предположим, что наращивание шара происходит в его собственном гравитационном поле. Тогда [6]:

$$f(r) = cr, \quad c = 4/3\pi\gamma_0 d^2$$

где  $\gamma_0$  – гравитационная постоянная,  $d$  – плотность массы.

В этом случае формулы (2.4) и (2.6) для нахождения перемещения и напряжений на этапе до начала наращивания преобразуются к виду:

$$u = -\frac{c(1-2\nu)}{20(1-\nu)}r\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}a_0^2 - r^2\right)\Delta(t, t_0)$$

$$\sigma_r = \sigma_r\Delta(t, t_0)^{-1} = -\frac{c(3-\nu)}{10(1-\nu)}(a_0^2 - r^2) \quad (8.1)$$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta\Delta(t, t_0)^{-1} = \frac{c}{10(1-\nu)}[(3-\nu)a_0^2 - (1+3\nu)r^2]$$

Во все выражения, выписанные для других этапов процесса, конкретный вид функции  $f(r)$  не вносит упрощений.

Исследуем количественно поведение компонент и основных характеристик напряженного состояния гравитирующего вязкоупругого шара при различных режимах его наращивания. Для этого зададим меру ползучести в форме [2]:  $\omega(t, \tau) = \Phi(\tau) [1 + e^{-\gamma(t-\tau)}]$ , где  $\Phi(\tau)$  – функция старения,  $\gamma > 0$  – коэффициент масштаба времени. Введем следующую систему базовых безразмерных величин. Величины, имеющие размерность времени, умножим на  $\gamma$ , а имеющие размерность длины и напряжения – отнесем соответственно к исходному радиусу шара  $a_0$  и модулю сдвига  $G_\infty$  материала в весьма большом возрасте. Все размерные физические величины, приведенные к безразмерному виду, будем помечать чертой сверху:  $\bar{t} = \gamma t$ ,  $\bar{r} = a_0^{-1} r$ ,  $\bar{\sigma} = G_\infty^{-1} \sigma$ .

Аппроксимируем модуль сдвига и функцию старения зависимостями [2]:

$$\bar{G}(\bar{t}) = 1 - \delta G e^{-\alpha \bar{t}}, \quad \delta G = 1 - \bar{G}_0; \quad \bar{\Phi}(\bar{t}) = w_0 + w_1 e^{-\beta \bar{t}}$$

где  $G_0$  – модуль сдвига материала в момент его зарождения. Для расчетов примем  $\nu = 0.2$ ;  $\delta G = 0.5$ ,  $\alpha = -0.12/0.06$ ;  $w_0 = 0.5522$ ,  $w_1 = 4.0$ ,  $\beta = -0.031/0.06$ . Отметим, что такие значения параметров соответствуют экспериментальным данным по ползучести некоторых видов бетона и горных пород [7].

Рассмотрим следующие режимы наращивания, полагая в каждом из них  $\bar{t}_0 = 0.1$ ,  $\Delta \bar{t}_1 = 0.5$ ,  $\bar{a}_k - \bar{a}_{k-1} = 0.5$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и принимая для простоты линейный закон увеличения радиуса шара на всех этапах его непрерывного роста:

1) 1 этап “быстрого” наращивания:  $N = 1$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 0.6$  (фиг. 1,  $a-c$ );

2) 1 этап “медленного” наращивания:  $N = 1$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 2.4$  (фиг. 1,  $d-f$ );

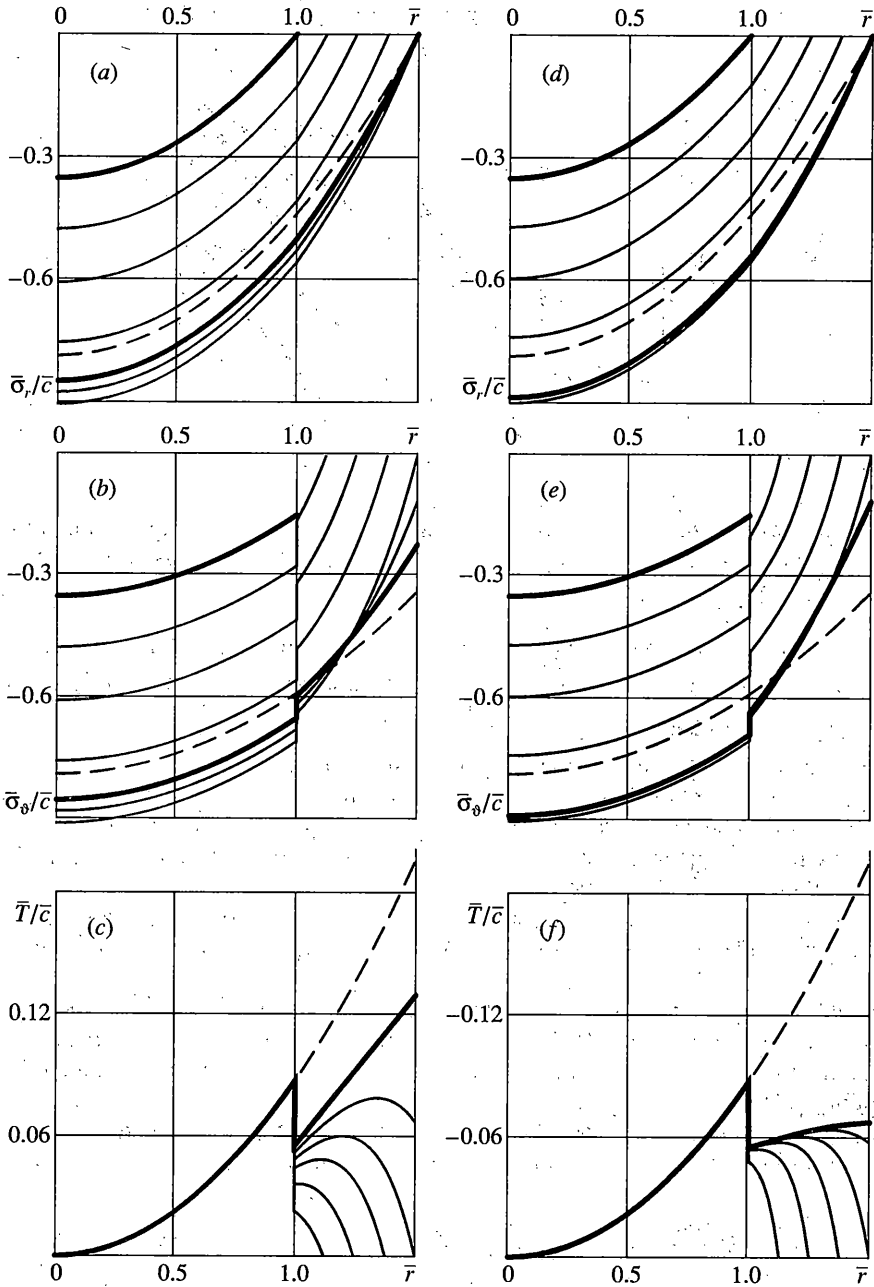
3) 2 этапа наращивания со средней скоростью без паузы между ними:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 1.2$  (фиг. 2, кривая 1);

4) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “быстрого” наращивания без паузы между этапами:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 0.6$  (фиг. 2, кривая 2);

5) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “медленного” наращивания без паузы между этапами:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 2.4$  (фиг. 2, кривая 3);

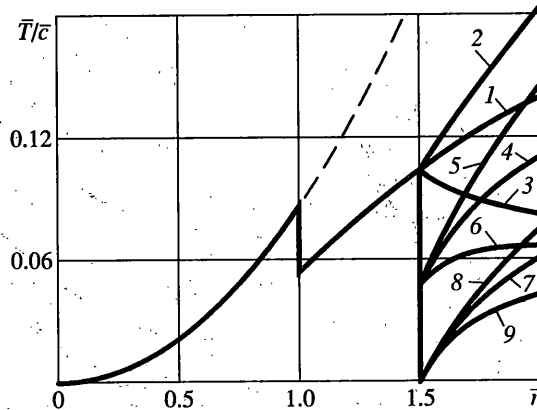
6) 2 этапа наращивания со средней скоростью с небольшой паузой между ними:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 1.0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 1.2$  (фиг. 2, кривая 4);

7) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “быстрого” наращивания с “небольшой” паузой между этапами:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 1.0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 0.6$  (фиг. 2, кривая 5);



Фиг. 1

- 8) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “медленного” наращивания с небольшой паузой между этапами:  $N = 2, \Delta \bar{t}_2 = 1.2, \Delta \bar{t}_3 = 1.0, \Delta \bar{t}_4 = 2.4$  (фиг. 2, кривая 6);  
 9) 2 этапа наращивания со средней скоростью с достаточно продолжительной паузой между ними:  $N = 2, \Delta \bar{t}_2 = 1.2, \Delta \bar{t}_3 = 10.0, \Delta \bar{t}_4 = 1.2$  (фиг. 2, кривая 7);



Фиг. 2

10) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “быстрого” наращивания с достаточно продолжительной паузой между этапами:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 10.0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 0.6$  (фиг. 2, кривая 8);

11) 1 этап наращивания со средней скоростью и 1 этап “медленного” наращивания с достаточно продолжительной паузой между этапами:  $N = 2$ ,  $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ,  $\Delta \bar{t}_3 = 10.0$ ,  $\Delta \bar{t}_4 = 2.4$  (фиг. 2, кривая 9).

Укажем основные параметры вычислительного процесса.

Напряженное состояние находится в точках равномерных разбиений по радиальной координате всех составляющих наращиваемый шар субтел, то есть его исходной и сформированных на различных этапах непрерывного наращивания частей. Каждое субтело разбивается на 24 части.

Все необходимые интегралы по безразмерным радиальной координате и времени вычисляются с абсолютной точностью  $10^{-7}$  на единицу длины отрезка интегрирования.

Решение интегрального уравнения (5.6) строится методом трапеций [8] на равномерной сетке с шагом  $2^{-7} = 7.8125 \cdot 10^{-3}$  по безразмерному времени до момента, когда безразмерная скорость изменения отнесенных к  $\bar{c}$  безразмерных напряжений становится меньше  $10^{-10}$ .

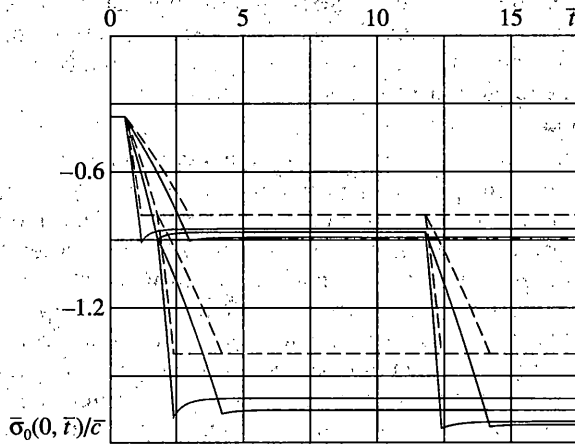
Оценка точности вычислений осуществляется путем проверки выполнения интегрального условия равновесия половины наращиваемого шара

$$\int_0^{a_N} \sigma_{\theta}(r, t) r dr = -\frac{c a_N^4}{8}, \quad t > t_{2N}$$

в момент прекращения счета. Для результатов, полученных при всех указанных режимах наращивания, относительная погрешность выполнения этого условия при вычислении входящего в него интеграла от естественного кубического сплайн-интерполианта окружного напряжения составляет менее  $10^{-5}$ .

Проанализируем теперь полученные результаты.

Пунктирными линиями на всех фигурах представлены кривые, соответствующие напряжениям в мгновенно изготовленном шаре радиуса  $a_N$  в случае фиг. 1, 2 и  $a(t)$  в



Фиг. 3

случае фиг. 3, найденные из решения классической задачи линейной теории вязкоупругости (по формулам (8.1), в которых следует заменить  $a_0$  на соответствующее значение радиуса). Толстыми сплошными линиями построены кривые, соответствующие финальным распределениям напряжений в наращиваемом шаре при различных режимах его наращивания и распределениям напряжений в исходно изготовленной его части до начала наращивания. Сплошные тонкие линии изображают эволюцию напряжений в наращиваемом шаре.

На фиг. 1, *a-c* и *d-f* представлены зависимости безразмерных радиального и окружного напряжений и интенсивности касательных напряжений, отнесенных к  $\bar{c}$ , от безразмерной радиальной координаты в различные моменты соответственно “быстрого” и “медленного” процессов наращивания. Заметен характерный излом эпюр радиального напряжения на границе исходной и дополнительной частей шара. Четко видны разрывы эпюр окружного напряжения на этой границе. Оба напряжения возрастают по модулю во всех точках тела вплоть до момента остановки роста, после чего абсолютное значение радиального напряжения уменьшается в каждой точке до соответствующего установившегося значения, а окружное напряжение перераспределяется с исходного материала на присоединившийся, выходя также на некоторое финальное распределение. Финальные распределения радиального и окружного напряжений зависят от скорости притока материала в процессе наращивания: чем быстрее осуществляется процесс роста, тем в большей степени успевают снизиться радиальные и перераспределиться окружные напряжения и тем более равномерно нагруженная оказывается дополнительная часть материала. Окружное напряжение на поверхности окончательно сформированного тела может в пределе оказаться по модулю как больше (при достаточно быстром наращивании), так и меньше (при достаточно медленном наращивании) своего первоначального значения на поверхности исходно существующего тела. При этом абсолютная величина окружного напряжения на границе наращиваемого шара всегда меньше, чем на границе аналогичного ненаращиваемого. Интенсивность касательных напряжений также разрывна на границе двух составных частей шара. Она не изменяется со временем внутри исходной части и развивается в дополнительной до некоторой предельной зависимости. Вид последней существенно зависит от скорости роста, а ее максимум может оказаться как больше (при достаточно быстрых процессах роста), так и меньше (при относительно медленном наращивании).



нии) максимального значения интенсивности в исходной части тела, однако он всегда меньше максимума интенсивности в мгновенно изготовленном шаре того же размера. Эпюра интенсивности в исходной части наращиваемого шара совпадает во все моменты времени с распределением интенсивности в пересечении этой части с ненаращиваемым шаром произвольного радиуса.

На фиг. 2 приведены финальные распределения отнесенной к  $\bar{c}$  безразмерной интенсивности касательных напряжений для различных вариантов наращивания шара за 2 этапа. При этом во всех случаях первый этап наращивания протекает одинаково. Распределение 1 фактически отвечает случаю присоединения всего дополнительного материала за один этап наращивания с гладким законом увеличения радиуса и потому само является гладким во всей дополнительной части тела. Распределения 2 и 3 также непрерывны в этой части, но имеют излом на границе первого и второго дополнительных тел, что является следствием скачкообразного увеличения в первом случае и уменьшения во втором скорости роста в два раза в момент перехода от первого этапа ко второму. Распределения 4–9 имеют уже разрывы на всех границах раздела субтел, поскольку перед каждым этапом наращивания здесь выдержана некоторая пауза. В случаях, соответствующих распределениям 7–9, пауза перед вторым этапом оказывается достаточно продолжительной для того, чтобы интенсивность касательных напряжений во втором дополнительном теле вблизи его границы с первым оставалась с высокой точностью равной нулю во все моменты времени после начала второго этапа. Положение и значение максимума интенсивности в наращиваемом за 2 этапа шаре существенным образом зависит от реализуемого режима роста, но в любом случае это значение не превышает максимального значения интенсивности в аналогичном мгновенно изготовленном шаре.

На фиг. 3 изображена временная эволюция среднего давления  $\sigma_0 = 1/3(\sigma_r + 2\sigma_\theta)$  в центре шара (в нашем случае эта величина совпадает со значением радиального и окружного напряжения в центральной точке), наращиваемого в соответствии с режимами 1, 2, 4, 5, 10, 11. Как видим, данная величина в наращиваемом шаре по модулю всегда больше, чем в ненаращиваемом шаре, параметрически увеличиваемом аналогичным образом.

**9. Выводы.** Построена математическая модель наращивания шара за счет поверхностного притока материала в условиях действующего центрально-симметричного силового поля. Изучено влияние скорости и способа наращивания на эволюцию основных характеристик напряженно-деформированного состояния шара. Проведены расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в процессе аккреции.

В частности, установлено: максимум интенсивности касательных напряжений для растущего шара без учета процесса наращивания достигается на границе; использование модели процесса наращивания шара из вязкоупругого материала показывает, что поведение интенсивности касательных напряжений существенно зависит от скорости и способа роста; модель процесса роста упругого шара дает нулевую интенсивность касательных напряжений в каждой точке дополнительного материала, то есть часть твердого тела, сформированная в процессе наращивания, загружена как жидкость; чем меньше скорость процесса наращивания вязкоупругого шара при достаточно больших паузах перед этапами его роста, тем ближе его состояние к состоянию упругого шара. Проведенные исследования показывают, что в процессе аккреции формируются тела с необычными с точки зрения классической механики деформируемого твердого тела свойствами, в определенном смысле лучшими, чем предсказывают известные теории.

Следует особо отметить, что полученные для гравитирующих объектов закономерности не связаны с конкретным видом закона гравитации и проявляются как для классического, так и для модифицированного (уточненного) его вариантов.

Авторы благодарят В.М. Александрова и В.И. Юдовича за полезное обсуждение и интересные вопросы, которые способствовали обобщению результатов и улучшению изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00693).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно нарастающего вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
7. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
8. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. Методы решения. М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2000. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.11.2005