МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2005

УДК 539.214; 539.374

© 2005 г. И.А. СОЛОМЕЩ, М.А. СОЛОМЕЩ

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ С ТОЧНЫМ СОГЛАСОВАНИЕМ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РЕПЕРА УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК

Получено точное уравнение согласования деформаций для имеющих чёткий физический смысл и естественно связанных с напряжениями характеристик полной, упругой и пластической деформации. Уравнения динамики записаны в форме, не использующей объективной скорости изменения напряжения. Этим снят ряд существенных трудностей теории конечных упругопластических деформаций.

1. Введение. В работе дается развернутое обоснование результатов, полученных в [1]. Чтобы охарактеризовать их, обрисуем в самых общих чертах основные трудности, с которыми столкнулась математическая теория упругопластичности при переходе от бесконечно малых деформаций к конечным, и пути, которыми эти трудности до настоящего времени преодолевались. Детальный разбор дан в критическом обзоре [2] состояния теории на 1990 год и в монографии [3], подводящей итоги за предыдущие 50 лет.

Поскольку упомянутые трудности появляются уже при рассмотрении однородных, изотропных, упругоидеальнопластических материалов, ограничимся сейчас такими материалами.

В эйлеровых переменных процесс упруго пластической деформации описывается в терминах скоростей материальных точек, плотности материала, выбранных мер (характеристик) полной, упругой, пластической деформации и напряжений. С появлением в 1930 году уравнения Прандтля – Рейса ([4]) была получена замкнутая система уравнений упругопластичности для бесконечно малых деформаций. Выделим три уравнения (остальные три не претерпевают изменений при переходе к конечным деформациям) :

A. Уравнение согласования деформаций(тензорное) – связывает характеристики полной, упругой и пластической деформации.

B. Функция реакции для напряжений(тензорное) – выражает напряжение через характеристику упругой деформации.

C. Закон течения(тензорное) – связывает пластическую деформацию с напряжениями.

При переходе к конечным деформациям уравнение согласования деформаций (A) в общем случае не верно ([3], 7.2) и система уравнений перестает быть замкнутой. Более того, сами понятия, а не только меры, упругой и пластической деформации теряют четкий физический смысл и появляются разногласия (не преодоленные до сих пор) о том, как именно они должны быть введены ([2], 4A).

В этой ситуации было предложено большое число общих теорий (часть из них изложена в работах [5–11]), что уже само по себе говорит о неблагополучии. Все эти теории можно разбить на 4 группы.

1. Упругая деформация вообще не рассматривается. Пластическая деформация вводится с помощью меры, не имеющей четкого физического смысла, определяющим уравнением типа (C). В определяющее уравнение (B) вместо упругой деформации вводятся две переменные – пластическая и полная деформации и система уравнений снова оказывается замкнутой (см., например, [5]).

D. При этом искусственность меры деформации делает сомнительным существование определяющих уравнений (B) и/или (C), а тем более их простоту.

2. Пластическая деформация не рассматривается, так что отпадает еще и уравнение (*C*). Но, зато, вместо (*A*) вводят, используя различные аналогии, определяющее дифференциальное уравнение для упругой деформации, что и замыкает систему. Сомнительным здесь является именно это уравнение (см.,например, [6, 7]).

3. Вводятся и упругая, и пластическая деформация. Причем одна определяется через другую (с привлечением полной деформации), но не имеет чёткого физического смысла.

В этом случае само определение уже дает уравнение согласования деформаций взамен (*A*). Система сохраняет замкнутость, но страдает недостатком (*D*) (см.,например, [8, 9]).

4. В качестве уравнения согласования деформаций (*A*) используется мультипликативное разложение градиента полной деформации через градиенты упругой и пластической деформации, или связанное с ним аддитивное разложение скорости полной деформации на скорости упругой и пластической деформаций [10].

Серьезные возражения против первого можно найти в [2], 4A. Второе соотношение в общем случае не верно и вовлекает в рассмотрение объективную скорость изменения напряжения, приводящую к тяжелым противоречиям ([2], 4F; [3], 7.2, 7.3).

В настоящей работе в качестве характеристики упругой деформации используется репер упругой деформации (РУД) $\breve{a}$ – величина более информативная, чем тензор Коши – Лагранжа. В деформируемой среде поле РУД порождает риманову метрику “естественного – ненапряженного состояния”. Эта метрика позволяет при достаточно широких предположениях, не прибегая к разгрузке, судить об естественной мере деформированных материальных объектов, т.е. о той мере, которую они имели бы после разгрузки.

Вводится тензор пластической деформации, имеющий в терминах естественной меры такой же физический смысл, как и тензор упругой деформации для упругих сред в терминах геометрической меры.

Получено в реперной форме уравнение согласования деформаций, дающее точное соотношение между характеристиками полной, упругой и пластической деформаций.

Введен тензор относительных напряжений (относительно римановой метрики, порожденной произвольным полем невырожденных реперов), сужениями которого являются тензор естественных напряжений и обычно используемые тензор напряжений Коши и второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа.

Для однородных и изотропных в естественном состоянии сред предложен закон пластического состояния, задаваемый скалярной функцией p главных напряжений и, возможно, параметров, определяемых историей деформации. Наличие или отсутствие поверхностей текучести определяется свойствами p.

При принятых в работе предположениях получена в эйлеровых переменных система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для $\boldsymbol{v}$ и $\breve{a}$, описывающая процесс упругопластической деформации во всей пространственно-временной области расположения среды.

Все уравнения даны в форме, разрешенной относительно полной производной по времени, что делает систему удобной для численного решения[1].

[1] Отметим, что репер упругой деформации был введен авторами для упругих сред в работе *Соломещ И.А., Халилов В.Ш.* Уравнения нелинейной теории упругости в компонентах репера деформации. Деп. в ВИНИТИ. 19.09.90. № 5089 – B90. 1990. 12 с. и для упругопластических – в работе *Соломещ И.А., Соломещ М.А.* Уравнения динамики теории упругопластичности для репера упругой деформации и скоростей точек. Деп. в ВИНИТИ. 24.01.95. № 214-B95. 1995. 30 с. Причем в последней указывалось на возможную связь РУД в поликристаллических материалах с деформацией кристаллической решетки. В упоминавшихся ранее работах [6, 7, 9] для характеристики упругой деформации в таких материалах вводятся под различными названиями (в среднем – тривектор микроструктурных переменных) реперы, фактически совпадающие с РУД.

2. Некоторые обозначения и соглашения. Реальное пространство, в котором перемещается сплошная среда, будем считать трехмерным евклидовым аффинным пространством. Обозначим его E, а $\mathbf{E}$ – присоединенное векторное пространство. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ – скалярное произведение и порожденная им норма в $\mathbf{E}$.

Репер, составленный из векторов $\mathbf{a}_i \in \mathbf{E}$ ($i = 1, 2, 3$), обозначим $\breve{a}$ и будем записывать в виде матрицы – столбца, так что $\breve{a} := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)^T$, где T – знак транспонирования (для удобства элементы матрицы – строки разделяются запятой). При наличии произвола всегда берется невырожденный правый репер. := и =: – знаки "равенства по определению", причем определяемый объект пишется со стороны двоеточия. Определим норму репера в E $\|\breve{a}\| := (|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + |\mathbf{a}_3|^2)^{1/2}$ и разность реперов $\breve{a} - \breve{b} :=$ $:= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3)^T$. Коэффициенты разложения (контравариантные координаты) вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ по векторам репера $\breve{a}$ обозначим $\mathbf{x}_i^{\breve{a}}$ или, короче, $x_i^{\breve{a}}$; $\mathbf{x}^{\breve{a}} := x^{\breve{a}} :=$ $:= (x_1^{\breve{a}}, x_2^{\breve{a}}, x_3^{\breve{a}})^T$. Таким образом $\mathbf{x} = x_i^{\breve{a}}\mathbf{a}_i$. Здесь и далее по повторяющемуся в одночлене неподчеркнутому индексу подразумевается суммирование от 1 до 3.

Заданное на $\mathbf{E}$ скалярное произведение, выбирая любой ортонормированный относительно его репер $\breve{e}$, можно представить в координатной форме:

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \alpha_i^{\breve{e}}\beta_i^{\breve{e}} \ \forall\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{E} \tag{2.1}$$

Обратно, для произвольного невырожденного репера $\breve{a}$ можно построить скалярное произведение в $\mathbf{E}$ (в общем случае отличное от $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle_{\breve{a}} := \alpha_i^{\breve{a}}\beta_i^{\breve{a}} \tag{2.2}$$

относительно которого репер $\breve{a}$ будет ортонормальным. Евклидово аффинное пространство, получающееся заменой скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, на $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\breve{a}}$ обозначим $E_{\breve{a}}$. Очевидно, что для $\breve{e}$ ортонормального в E имеем $E_{\breve{e}} = E$.

Модуль вектора $\alpha \in \mathbf{E}$ в $E_{\breve{a}}$ равен

$$|\boldsymbol{\alpha}|_{\breve{a}} := \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle_{\breve{a}}^{1/2} \tag{2.3}$$

Объем параллелепипеда, построенного на репере $\breve{b}$ в пространстве E обозначим $|\breve{b}|$, в $E_{\breve{a}}$ – $|\breve{b}|_{\breve{a}}$.

Невырожденные реперы $\breve{a}$ и $\breve{a}'$, порождающие одно и то же скалярное произведение, т. е. такие, что $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle_{\breve{a}} = \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle_{\breve{a}'}$ при $\forall\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{E}$, назовем эквивалентными.

Для реперов $\breve{a}$, $\breve{b}$ через $\breve{a}^{\breve{b}}$ обозначим матрицу, j-м столбцом которой является $a_J^{\breve{b}}$. Матрицы иногда помечаются значком (^). Для матриц – столбцов $\hat{c} := (c_1, c_2, c_3)^T$ и $\hat{d} := (d_1, d_2, d_3)^T$ с числовыми элементами

$$(\hat{c}, \hat{d}) := c_i d_i, \quad |\hat{c}| := (\hat{c}, \hat{c})^{1/2} \tag{2.4}$$

Пусть сплошная среда, занимавшая в начальный момент времени t_0 открытую пространственную область $V \subset E$, в конечный момент t заполняет область V_t. Точку пространства, в которой материальная точка M находилась в момент t_0, обозначим x (лагранжева переменная), а точку, в которой она находится в момент $t - x$ (эйлерова переменная).

Функцию $x = x(\mathrm{x})$, задающую соответствие между положением материальной точки в начальный и конечный моменты, как и далее рассматриваемые законы движения, будем считать взаимно – однозначной и обладающей обратимой x'_{x}.

Вообще по возможности будем придерживаться следующего принципа: объект, характеризующий среду в конечный момент, обозначать прямой латинской буквой, соответствующий объект, относящийся к начальному моменту – одноименной курсивной латинской буквой; функция материальной точки, выраженная через x или x, обозначается одной и той же буквой с указанием, если нужно, аргумента; обозначение, введенное для некоторого объекта, применяется в дальнейшем и для других объектов той же природы. Все встречающиеся в тексте функции (производные в том числе), если не оговорено специально, считаем непрерывными; кривые и поверхности – гладкими; множества, по которым производится интегрирование, – измеримыми и замкнутыми. Всегда, когда нет указаний о метрике, имеется в виду метрика основного пространства E.

В дальнейшем для выявления упругих и пластических деформаций среды понадобится сравнивать меру материальных объектов в различных в общем случае римановых пространствах. Соответствующий математический аппарат приводится в следующем разделе.

3. Изменение меры геометрических объектов при отображении римановых аффинных пространств. *3.1. Риманова метрика, порождаемая полем реперов.* Пусть V – открытая область в аффинном пространстве E. (Евклидовость его сейчас не существенна.) Риманову метрику на V обычно задают с помощью метрической формы

$$g_{ij}(x(\xi))d\xi_i d\xi_j \tag{3.1}$$

в какой-нибудь криволинейной системе координат $x = x(\xi)$. Сущность такого задания в том, что (3.1) в любой точке $x \in V$ (точнее в касательном пространстве точки x, т.е. в нашем случае на $\mathbf{E}$) определяет скалярное произведение. Поэтому риманову метрику можно задать непосредственно задавая скалярное произведение в точках V. Для наших целей удобно каждое из этих произведений задать с помощью ортонормального относительно него репера.

Итак примем следующую схему. Пусть на V задано поле невырожденных реперов $\breve{\alpha}(x)$. В качестве скалярного произведения в точке x возьмем $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\breve{\alpha}(x)}$, относительно которого $\breve{\alpha}(x)$ – ортонормален (см. (2.2)). Так определенное риманово пространство будем называть порожденным полем реперов $\breve{\alpha}(x)$ и обозначать $V_{\breve{\alpha}}$. Метрику в нем будем называть $\breve{\alpha}$-метрикой.

Связь между коэффициентами метрической формы и $\breve{\alpha}(x)$ следующая

$$\begin{aligned} g_{ij}(x(\xi)) &= \langle \mathbf{k}_i(\xi), \mathbf{k}_j(\xi)\rangle_{\breve{\alpha}(x(\xi))} \\ \breve{k}(\xi) := \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x}{\partial \xi_3}\right)^T \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\breve{k}(\xi)$ – локальный репер криволинейной системы координат в точке $x(\xi)$.

Привычные формулы римановой геометрии в терминах репера $\breve{\alpha}(x)$ принимают вид:

косинус угла между векторами **x**, **y** в точке x:

$$\cos(\mathbf{x}^\wedge, \mathbf{y})_{\breve{\alpha}(x)} := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\breve{\alpha}(x)}}{|\mathbf{x}|_{\breve{\alpha}(x)} \cdot |\mathbf{y}|_{\breve{\alpha}(x)}} \tag{3.3}$$

длина кривой l: $x = x(\tau)$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$

$$|l|_{\breve{\alpha}} := \int_{\tau_0}^{\tau_1} |x'(\tau)|_{\breve{\alpha}(x(\tau))} d\tau \tag{3.4}$$

площадь поверхности s: $x = x(u)$, $u = (u_1, u_2)^T \in \sigma \subset \mathbf{R}^2$

$$|s|_{\breve{\alpha}} = \int_{\sigma} \sqrt{|x'_{u_1}|^2_{\breve{\alpha}(x)} \cdot |x'_{u_2}|^2_{\breve{\alpha}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2} \rangle^2_{\breve{\alpha}(x)}}\, du \tag{3.5}$$

объем области υ: $x = x(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \omega \subset \mathbf{R}^3$

$$|\upsilon|_{\breve{\alpha}} = \int_{\omega} |\breve{k}(\xi)|_{\breve{\alpha}(x(\xi))} d\xi \tag{3.6}$$

В случае, когда $\breve{\alpha}(x)$ – константа $\breve{\alpha}_0$, $V_{\breve{\alpha}_0}$ – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\breve{\alpha}_0}$.

3.2. Коэффициенты растяжения меры при смене римановой метрики. Пусть $\breve{\alpha}(x)$ и $\breve{\beta}(x)$ – поля невырожденных реперов, определенные на V; $V_{\breve{\alpha}}$ и $V_{\breve{\beta}}$ – порожденные ими римановы пространства. Выясним коэффициенты растяжения меры одно- трехмерных объектов при переходе от измерения их в $\breve{\alpha}$-метрике к измерению в $\breve{\beta}$-метрике.

Коэффициент растяжения длины. Фиксируем произвольный вектор $\mathbf{m} \neq 0$. Пусть: l: $x = x(\tau)$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ – произвольная кривая, исходящая из точки x_0; $x(\tau_0) = x_0$; $\mathbf{m}$ – касательный вектор к l в точке x_0; $l_{\tau*} := x([\tau_0, \tau^*])$ при $\forall \tau^* \in (\tau_0, \tau_1]$.

Коэффициент растяжения длины в точке x_0 в направлении $\mathbf{m}$ вычисляется с использованием соотношения (3.4):

$$K_1(x_0, \mathbf{m}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) := \lim_{\tau^* \to \tau_0} (|l_{\tau*}|_{\breve{\beta}} / |l_{\tau*}|_{\breve{\alpha}}) =$$

$$= \lim_{\tau^* \to \tau_0} \left(\int_{\tau_0}^{\tau^*} |x'_\tau|_{\breve{\beta}} d\tau \Big/ \int_{\tau_0}^{\tau^*} |x'_\tau|_{\breve{\alpha}} d\tau \right) = |x'_\tau(\tau_0)|_{\breve{\beta}(x_0)} / |x'_\tau(\tau_0)|_{\breve{\alpha}(x_0)}$$

$x'(\tau_0)$ и $\mathbf{m}$ коллинеарны, поэтому $x'_\tau(\tau_0) = c\mathbf{m}$ при некотором c. Так что окончательно

$$K_1(x_0, \mathbf{m}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) = |\mathbf{m}|_{\breve{\beta}(x_0)} / |\mathbf{m}|_{\breve{\alpha}(x_0)} \tag{3.7}$$

Коэффициент растяжения объема. Фиксируем $\forall x_0 \in V$. Пусть: υ: $x = x(\xi)$, $\xi \in \omega \subset \mathbf{R}^3$ – произвольная трехмерная подобласть V, содержащая x_0; $x_0 = x(\xi_0)$; $\omega^* \subset \omega$ и содержит ξ_0; $\upsilon_{\omega*} := x(\omega^*)$.

Коэффициент растяжения объема в точке x_0 вычисляется с использованием (3.6):

$$K_3(x_0, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) := \lim_{\omega^* \to \xi_0} (|v_{\omega^*}|_{\breve{\beta}}/|v_{\omega^*}|_{\breve{\alpha}}) =$$

$$= \lim_{\omega^* \to \xi_0}\left(\int_{\omega^*} |\breve{k}(\xi)|_{\breve{\beta}(x(\xi))}d\xi / \int_{\omega^*} |\breve{k}(\xi)|_{\breve{\alpha}(x(\xi))}d\xi\right) = |\breve{k}(x_0)|_{\breve{\beta}(x_0)}/|\breve{k}(x_0)|_{\breve{\alpha}(x_0)} \tag{3.8}$$

Объем в $V_{\breve{\beta}(x_0)}$ параллелепипеда, построенного на $\breve{k}(x_0)$, будет $|\breve{k}(x_0)|_{\breve{\beta}(x_0)} = |\breve{k}^{\breve{\beta}}|$ и, аналогично, $|\breve{k}(x_0)|_{\breve{\alpha}(x_0)} = |\breve{k}^{\breve{\alpha}}|$.

Обозначим $\breve{\alpha}^{\breve{\beta}} =: A$, тогда $\breve{\alpha} = A^T\breve{\beta}$, следовательно $\breve{\alpha}$-координаты и $\breve{\beta}$-координаты произвольного вектора $\mathbf{y}$ связаны соотношением $y^{\breve{\alpha}} = A^{-1}y^{\breve{\beta}}$. Поэтому $|\breve{k}|_{\breve{\alpha}} = |\breve{k}^{\breve{\alpha}}| = |A^{-1}\breve{k}^{\breve{\beta}}| = |A|^{-1} \cdot |\breve{k}|_{\breve{\beta}}$. Подставляя это в (3.8), получаем

$$K_3(x_0, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) = |A| = |\breve{\alpha}(x_0)|_{\breve{\beta}(x_0)} \tag{3.9}$$

Коэффициент растяжения площади. Фиксируем $\forall x_0 \in V$. Пусть: s: $x = x(u)$, $u = (u_1, u_2) \in \sigma \subset \mathbf{R}^2$ – произвольная ориентированная поверхность в V с единичной положительной $\breve{\beta}$-нормалью $\mathbf{n}$ в точке x_0; $x_0 = x(u_0)$; $\sigma^* \subset \sigma$ и содержит u_0; $s_{\sigma^*} := x(\sigma^*)$.

Коэффициент растяжения площади в точке x_0 вычисляется с использованием (3.5):

$$K_2(x_0, \mathbf{n}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) := \lim_{\sigma^* \to u_0} (|s_{\sigma^*}|_{\breve{\beta}}/|s_{\sigma^*}|_{\breve{\alpha}}) =$$

$$= \lim_{\sigma^* \to u_0} \frac{\int_{\sigma^*} \sqrt{|x'_{u_1}|^2_{\breve{\beta}(x)} \cdot |x'_{u_2}|^2_{\breve{\beta}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2}\rangle^2_{\breve{\beta}(x)}}\,du}{\int_{\sigma^*} \sqrt{|x'_{u_1}|^2_{\breve{\alpha}(x)} \cdot |x'_{u_2}|^2_{\breve{\alpha}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2}\rangle^2_{\breve{\alpha}(x)}}\,du} = \tag{3.10}$$

$$= \left.\frac{\sqrt{|x'_{u_1}|^2_{\breve{\beta}(x)} \cdot |x'_{u_2}|^2_{\breve{\beta}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2}\rangle^2_{\breve{\beta}(x)}}}{\sqrt{|x'_{u_1}|^2_{\breve{\alpha}(x)} \cdot |x'_{u_2}|^2_{\breve{\alpha}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2}\rangle^2_{\breve{\alpha}(x)}}}\right|_{x = x_0}$$

Из этой формулы заключаем, что коэффициент растяжения такой же, как если бы

1) $\breve{\beta}(x) \equiv \breve{\beta}(x_0)$, $\breve{\alpha}(x) \equiv \breve{\alpha}(x_0)$, т.е. обе метрики были евклидовыми;

2) s лежала в плоскости с положительной единичной $\breve{\beta}$-нормалью $\mathbf{n}$ в точке x_0.

Но в этом случае подынтегральные функции в (3.10) – константы и незачем переходить к пределу, т.е.

$$K_2(x_0, \mathbf{n}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) = |s|_{\breve{\beta}(x_0)}/|s|_{\breve{\alpha}(x_0)} \quad \forall s \subset \Pi \tag{3.11}$$

Рассмотрим параллелепипед υ, построенный на векторах **m**, **l** (параллельных П) и **n**, исходящих из x_0 и образующих невырожденный правый репер. Параллелограмм, построенный на **m**, **l** обозначим s, а положительную единичную $\breve{\alpha}$-нормаль к П – $\boldsymbol{n}$.

$$|\upsilon|_{\breve{\beta}} = |s|_{\breve{\beta}} \cdot |\mathbf{n}|_{\breve{\beta}} = |s|_{\breve{\beta}}, \quad |\upsilon|_{\breve{\alpha}} = |s|_{\breve{\alpha}} \cdot \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{n} \rangle_{\breve{\alpha}}$$

Поэтому с учетом (3.11) и (3.9):

$$K_2(x_0, \mathbf{n}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) = (|\upsilon|_{\breve{\beta}}/|\upsilon|_{\breve{\alpha}}) \cdot \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{n} \rangle_{\breve{\alpha}} = |\breve{\alpha}|_{\breve{\beta}} \cdot \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{n} \rangle_{\breve{\alpha}} \tag{3.12}$$

Найдем $\boldsymbol{n}$. Для этого преобразуем уравнение плоскости П в $\breve{\beta}$-метрике к уравнению в $\breve{\alpha}$-метрике.

Уравнение П в $\breve{\beta}$-метрике, если обозначить $x - x_0 =: \mathbf{x}$, имеет вид

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\beta}} = 0, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\beta}} = (n^{\breve{\beta}}, x^{\breve{\beta}}), \quad x^{\breve{\alpha}} = A^{-1} x^{\breve{\beta}}, \quad A = \breve{\alpha}^{\breve{\beta}} \tag{3.13}$$

Поэтому $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\beta}} = (n^{\breve{\beta}}, A x^{\breve{\alpha}}) = (A^T n^{\breve{\beta}}, x^{\breve{\alpha}})$. Если теперь ввести вектор **N** с $\breve{\alpha}$-координатами

$$N^{\breve{\alpha}} := A^T n^{\breve{\beta}} \tag{3.14}$$

то $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\beta}} = (N^{\breve{\alpha}}, x^{\breve{\alpha}}) = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\alpha}}$.

Подставляя это в (3.13) и нормируя **N** в $\breve{\alpha}$-норме, получим уравнение П в $\breve{\alpha}$-метрике:

$$\langle \mathbf{N}/|N^{\breve{\alpha}}|, \mathbf{x} \rangle_{\breve{\alpha}} = 0$$

Следовательно, $\boldsymbol{n} = \mathbf{N}/|N^{\breve{\alpha}}|$ и используя (3.14) получаем

$$\mathrm{n}^{\breve{\alpha}} = \frac{A^T n^{\breve{\beta}}}{|A^T n^{\breve{\beta}}|} \tag{3.15}$$

Теперь, используя выражение для $\breve{\alpha}$-координат через $\breve{\beta}$-координаты и (3.15), имеем

$$\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{n} \rangle_{\breve{\alpha}} = (n^{\breve{\alpha}}, \mathrm{n}^{\breve{\alpha}}) = (A^{-1} n^{\breve{\beta}}, A^T n^{\breve{\beta}})/|A^T n^{\breve{\beta}}| =$$
$$= |\mathbf{n}|^2_{\breve{\beta}}/|A^T n^{\breve{\beta}}| = 1/|A^T n^{\breve{\beta}}|$$

Подставляя это в (3.12) получаем

$$K_2(x_0, \mathbf{n}, \breve{\alpha}, \breve{\beta}) = |\breve{\alpha}(x_0)|_{\breve{\beta}(x_0)}/|A^T n^{\breve{\beta}}|, \ A = \breve{\alpha}(x_0)^{\breve{\beta}(x_0)}. \tag{3.16}$$

4. Репер деформации. Относительные напряжения. *4.1.* Материальные объекты (кривые, поверхности, трехмерные области) в результате перемещения $x = x(\mathrm{x})$ деформируются по сравнению с начальным состоянием. Представление о произошедшей деформации дает сравнение мер этих объектов (длин, площадей, объемов), а также углов между материальными кривыми, в момент t и в начальный момент t_0.

Поэтому все перечисленные объекты в деформированном состоянии, т.е. в момент t, будем измерять как их геометрической мерой – длиной, площадью и т.д. в момент t, так и их первоначальной мерой, т. е. той, которую они имели в момент t_0.

Ясно, что задание $x(\mathrm{x})$ или $x'(\mathrm{x})$ полностью определяет деформацию среды в конечном состоянии. Оператор $x'(\mathrm{x}) =: \mathbf{A}(\mathrm{x})$, в свою очередь, в каждой точке определяется заданием произвольного невырожденного репера $\check{\mathrm{a}}(\mathrm{x})$ и репера

$$\check{a}(x) := (\mathbf{A}(\mathrm{x})\mathbf{a}_1(\mathrm{x}), \mathbf{A}(\mathrm{x})\mathbf{a}_2(\mathrm{x}), \mathbf{A}(\mathrm{x})\mathbf{a}_3(\mathrm{x}))^T =: \mathbf{A}(\mathrm{x})\check{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

при этом даже не требуется, чтобы функция $\check{\mathrm{a}}(\mathrm{x})$ была непрерывной.

Однако, если реперы $\check{\mathrm{a}}(\mathrm{x})$ ортонормальны, то для задания деформации среды в момент t достаточно задать в каждой точке $x \in V_t$ лишь репер $\check{a}(x)$ (отметим, что $\check{a}(x) = \check{a}(\mathrm{x})$ при $x = x(\mathrm{x})$, т.е. $\check{a}(x)$ и $\check{a}(\mathrm{x})$ задают одну и ту же функцию материальной точки, только первая выражает ее через эйлерову, а вторая – через лагранжеву координату).

4.2. Докажем это. Вычисление геометрической меры деформированных материальных объектов (т.е. заданных в момент t) не представляет труда. Поэтому, считая поле реперов $\check{a}(x)$ заданным, сосредоточимся на вычислении их первоначальной меры.

Пусть l, l_i ($i = 1, 2$) и s – ориентированные материальные кривые и поверхность, $\mathbf{v}$ – трехмерная область, выделенные в начальный момент в V; $l := x(\mathrm{l})$, $l_i := x(\mathrm{l}_i)$, $s :=$ $:= x(\mathrm{s})$ и $\upsilon := x(\mathbf{v})$ – они же в конечный момент; l_1 и l_2 пересекаются в точке x_0; $x_0 =$ $= x(\mathrm{x}_0)$; $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\tau)$; $\mathrm{x} = \mathrm{x}_i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$; $\mathrm{x} = \mathrm{x}(u)$, $u(u_1, u_2) \in \sigma \subset \mathbf{R}^2$ и $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\xi)$, $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in$ $\in \omega \subset \mathbf{R}^3$ – параметризации l, l_i, s и $\mathbf{v}$.

Для обозначения геометрической меры одно-трехмерных объектов (длины, площади, объема) будем использовать вертикальные черточки. Первоначальную меру таких объектов, заданных в деформированном состоянии, будем обозначать так же, но с добавлением индекса t. Например, $|\mathrm{l}|$ – геометрическая длина l, $|\upsilon|$ – геометрический объем υ, $|\mathrm{s}|_t$ – начальная площадь s, (т.е. $|\mathrm{s}|$). Геометрический угол между векторами $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ обозначим $(\mathbf{n}, {}^\wedge\mathbf{m})$, первоначальный угол между этими же векторами, исходящими из точки x, обозначим $(\mathbf{n}, {}^\wedge\mathbf{m})_{x,t}$. Слово "геометрическая" в названии меры обычно будем опускать.

Сначала вычислим первоначальный угол между кривыми l_i в точке x_0. В качестве параметризации l_i можно взять $x = x(\mathrm{x}_i(\tau)) =: x_i(\tau)$. Пусть τ_0 – значение параметра, соответствующее x_0 на кривых l_i; тогда оно также соответствует x_0 на l_i.

Производные $x_i'(\tau_0) =: \mathbf{m}_i$ являются положительными касательными векторами к кривым l_i в точке x_0, а $\mathrm{x}_i'(\tau_0) =: \boldsymbol{m}_\mathrm{i}$ – к l_i в точке x_0; $\boldsymbol{m}_i$ и $\boldsymbol{m}_\mathrm{i}$ связаны соотношением

$$\mathbf{m}_i = x_i'(\tau_0) = x_\mathrm{x}'(\mathrm{x}_0)\mathrm{x}_i'(\tau_0) = \mathbf{A}(\mathrm{x}_0)\boldsymbol{m}_\mathrm{i} \tag{4.2}$$

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $\mathbf{A}$ *– линейный обратимый оператор на* $\mathbf{E}$, $\check{\mathrm{a}}$ *– невырожденный репер и* $\check{a} = \mathbf{A}\check{\mathrm{a}}$, *то для* $\forall\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{E}$ *и произвольного репера* $\check{b}$:

$$\alpha^{\check{\mathrm{a}}} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})^{\check{a}} \tag{4.3}$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle_{\check{\mathrm{a}}} = \langle\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\rangle_{\check{a}}, \quad |\boldsymbol{\alpha}|_{\check{\mathrm{a}}} = |\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}|_{\check{a}} \tag{4.4}$$

$$|\check{b}|_{\check{\mathrm{a}}} = |\mathbf{A}\check{b}|_{\check{a}} \tag{4.5}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i^{\check{a}} \mathbf{a}_i$. Поэтому $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i^{\check{a}} \mathbf{A}\mathbf{a}_i = \alpha_i^{\check{a}} \mathbf{a}_i$ т.е. $(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})^{\check{a}} = \alpha^{\check{a}}$. Утверждения (4.4) сразу следуют из (4.3) на основании определений (2.2) и (2.3). Далее используя определитель Грама имеем

$$|\check{b}|_{\check{a}} = \left|\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle_{\check{a}}\right|^{1/2} = \left|\langle \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_j\rangle_{\check{a}}\right|^{1/2} = |\mathbf{A}\check{b}|_{\check{a}}$$

и лемма доказана.

Используя (2.1)–(2.3) вычислим косинус первоначального угла между кривыми l_i в точке x_0:

$$\cos(\mathbf{m}_1, \wedge\mathbf{m}_2)_{x_0, t} = \cos(\boldsymbol{m}_1, \wedge\boldsymbol{m}_2) = \frac{\langle \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\rangle}{|\boldsymbol{m}_1| \cdot |\boldsymbol{m}_2|} = \frac{\langle \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\rangle_{\check{a}(x_0)}}{|\boldsymbol{m}_1|_{\check{a}(x_0)} \cdot |\boldsymbol{m}_2|_{\check{a}(x_0)}}$$

Так что используя (4.4) и (4.2) получаем

$$\cos(\mathbf{m}_1, \wedge\mathbf{m}_2)_{x_0, t} = \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\rangle_{\check{a}(x_0)}}{|\mathbf{m}_1|_{\check{a}(x_0)} \cdot |\mathbf{m}_2|_{\check{a}(x_0)}} \tag{4.6}$$

Нетрудно выразить начальную длину кривой l через ее уравнение

$$|l|_t = |\mathrm{l}| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mathrm{x}'(\tau)|\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mathrm{x}'(\tau)|_{\check{a}(\mathrm{x}(\tau))}\,d\tau$$

Так как $x'(\tau) = x'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x}(\tau))\mathrm{x}'(\tau) = \mathbf{A}(x(\tau))\mathrm{x}'(\tau)$, то с учетом (4.4) получаем

$$|l|_t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |x'(\tau)|_{\check{a}(x(\tau))}\,d\tau \tag{4.7}$$

Аналогично находим выражения для начальной площади и объема

$$|s|_t = |\mathrm{s}| = \int_{\sigma} \sqrt{\langle \mathrm{x}'_{u_1}, \mathrm{x}'_{u_1}\rangle \cdot \langle \mathrm{x}'_{u_2}, \mathrm{x}'_{u_2}\rangle - \langle \mathrm{x}'_{u_1}, \mathrm{x}'_{u_2}\rangle^2}\,du$$

Заменим скалярное произведение $\langle\cdot, \cdot\rangle$ на $\langle\cdot, \cdot\rangle_{\check{a}(\mathrm{x})}$ (ведь реперы $\check{a}(\mathrm{x})$ ортонормальные), после применения (4.4), учитывая, что $x'_{u_i} = x'_{\mathrm{x}}\mathrm{x}'_{u_i} = A\mathrm{x}'_{u_i}$, получим

$$|s|_t = \int_{\sigma} \sqrt{\langle x'_{u_1}, x'_{u_1}\rangle_{\check{a}(x)} \cdot \langle x'_{u_2}, x'_{u_2}\rangle_{\check{a}(x)} - \langle x'_{u_1}, x'_{u_2}\rangle^2_{\check{a}(x)}}\,du \tag{4.8}$$

Координатным репером криволинейных координат $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\xi)$ в точке x является $\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) = := \left(\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi_3}\right)^T =: \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi}$, поэтому $|\upsilon|_t = |\mathrm{v}| = \int_{\omega} |\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x})|\,d\xi$. Так как реперы $\check{a}(x)$ ортонормальны, то $E = E_{\check{a}(\mathrm{x})}$ и, используя (4.5), получаем $|\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x})| = |\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x})|_{\check{a}(\mathrm{x})} = |\mathbf{A}(\mathrm{x})\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x})|_{\check{a}(x)}$. Учитывая, что

$$\mathbf{A}(\mathrm{x})\check{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) = x'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi} = (x'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\mathrm{x}'_{\xi_1}, x'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\mathrm{x}'_{\xi_2}, x'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\mathrm{x}'_{\xi_3})^T =: \check{k}(x)$$

есть координатный репер криволинейных координат $x = x(\xi)$ в точке x, имеем

$$|v|_t = \int\limits_{\omega} |\breve{k}(x)|_{\breve{a}(x)} d\xi \tag{4.9}$$

Формулы (4.6)–(4.9) показывают, что задание поля реперов $\breve{a}(x)$ позволяет вычислить первоначальную меру одно – трехмерных материальных объектов и первоначальный угол между материальными кривыми по уравнениям этих объектов в деформированном состоянии (т.е. в момент t). Тем самым задание поля $\breve{a}(x)$ полностью определяет деформацию среды в момент t.

С другой стороны (4.6)–(4.9) показывают (см. п. 3.1), что первоначальная метрика для деформированных материальных объектов есть метрика, порожденная полем реперов $\breve{a}(x)$, т.е. метрика в римановом аффинном пространстве $V_{t,\breve{a}}$, получающаяся заменой в V_t единого для всех точек скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на поле скалярных произведений $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\breve{a}(x)}$, индивидуальных для точек $x \in V_t$.

4.3. Фиксируем точку $x \in V_t$ и вектор $\mathbf{m} \neq 0$ и пусть l – материальная кривая в момент t, для которой $\mathbf{m}$ является касательным в точке x. Рассмотрим коэффициент растяжения длины этой кривой в момент t, равный отношению ее длины в момент t к ее длине в начальном состоянии – $|l|/|l|_t$.

Предел этого коэффициента при стягивании кривой вдоль нее к точке x, как оказывается (см. п. 3.2), не зависит от выбора l, а лишь от x и $\mathbf{m}$. Назовем этот предел коэффициентом растяжения длины в точке x в момент t (т.е. в точке (x, t)) в направлении $\mathbf{m}$ и обозначим $K_1(x, \mathbf{m})$.

Аналогично вводится $K_2(x, \mathbf{n})$ – коэффициент растяжения площади в точке (x, t) материальной поверхности, для которой $\mathbf{n}$ является единичной нормалью в точке x в момент t, и $K_3(x)$ – коэффициент растяжения объема в точке (x, t).

Поскольку для любого ортонормального репера $\breve{e}\langle\cdot,\cdot\rangle$ совпадает с $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\breve{e}}$, то геометрическая мера на V_t совпадает с мерой в $V_{t,\breve{e}}$ для любого поля ортонормальных реперов $\breve{e}(x)$ на V_t. Первоначальная же метрика совпадает с метрикой в $V_{t,\breve{a}}$. Поэтому K_i является коэффициентом растяжения меры при переходе в V_t от $\breve{a}$-метрики к $\breve{e}$-метрике (т.е. геометрической). Так что, согласно формулам (3.7), (3.16) и (3.9) с $\breve{\alpha} = \breve{a}$ и $\breve{\beta} = \breve{e}$:

$$\begin{aligned} &K_1(x, \mathbf{m}) = |\mathbf{m}|/|\mathbf{m}|_{\breve{a}}, \quad K_2(x, \mathbf{n}) = |\breve{a}|/|A^T n^{\breve{e}}| \\ &K_3(x) = |\breve{a}|, \quad A = \breve{a}^{\breve{e}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Формула (4.6) вместе с (4.10) показывают, что задание $\breve{a}(x)$ полностью определяет деформацию среды в точке (x, t).

Поэтому $\breve{a}(x)$ будем называть репером деформации. Учитывая (4.1) и используя производные по вектору дадим полное определение.

Репером деформации среды в точке x в момент t назовем

$$\begin{aligned} &\breve{a}(x) := \frac{\partial x(\mathrm{x})}{\partial \breve{\mathrm{a}}} := \left(\frac{\partial x(\mathrm{x})}{\partial \mathbf{a}_1}, \frac{\partial x(\mathrm{x})}{\partial \mathbf{a}_2}, \frac{\partial x(\mathrm{x})}{\partial \mathbf{a}_3}\right)^T = \\ &= (x'(\mathrm{x})\mathbf{a}_1, \mathrm{x}'(\mathrm{x})\mathbf{a}_2, \mathrm{x}'(\mathrm{x})\mathbf{a}_3)^T = x'(\mathrm{x})\breve{\mathrm{a}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\breve{\mathrm{a}}$ – произвольный ортонормальный репер.

Из самого определения производной по вектору с привлечением (4.10) (что вообще и не обязательно) при $\mathbf{m} = \mathfrak{a}_i$ ясен физический смысл репера деформации $\breve{a}$.

Вектора репера $\breve{a}$ являются касательными в точке x к трем исходящим из x деформированным материальным волокнам, в начальный момент бывшим взаимно ортогональными. Причем $|\mathfrak{a}_i|$ – коэффициент растяжения материала в x в момент t в направлении $\mathfrak{a}_i$.

Перефразируя последний абзац в п. 4.2 можно сказать, что задание поля реперов деформации позволяет ввести в V_t риманову метрику такую, что измерение углов между деформированными материальными кривыми, длин, площадей, объемов деформированных одно – трехмерных материальных объектов в этой метрике дает значение этих характеристик для рассматриваемых объектов до деформации без обращения к их начальному состоянию.

Репер деформации не единственен. Взяв в недеформированной среде другой ортонормальный репер $\breve{a}'$, получим по (4.11) другой репер деформации $\breve{a}' := \mathbf{A}\breve{a}'$. Очевидно, что реперы $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ характеризуют одну и ту же деформацию.

Отметим, что значения выражений (4.6) и (4.10) не изменяются при замене репера $\breve{a}$ на эквивалентный.

4.4. Фиксируем точку x в деформированной среде и единичный вектор $\mathbf{n}$. Напряжение в точке x в момент t на ориентированной плоскости с положительной нормалью $\mathbf{n}$, рассчитанное на единицу геометрической площади, назовем геометрическим (напряжение Коши [12] или истинное напряжение [13]) и обозначим $\boldsymbol{\sigma}_n(x)$. Напряжение на единицу первоначальной площади назовем относительным (относительно первоначальной площади).

Геометрическая мера на V_t совпадает с мерой в $V_{t,\breve{e}}$ для любого поля ортонормальных реперов $\breve{e}(x)$ на V_t, а первоначальная, как уже указывалось, – с мерой в $V_{t,\breve{a}}$.

Поэтому, обобщая, для произвольного поля невырожденных реперов $\breve{b}(x)$, заданных на V_t, введем напряжение на единицу площади в римановом пространстве $V_{t,\breve{b}}$ – $\mathbf{u}_\mathbf{n}(x, \breve{b})$, которое назовем относительным напряжением (относительно $\breve{b}(x)$). В случае, когда ясно, о каком репере идет речь, значок $\breve{b}$ опускается.

Напряжение геометрическое и относительно первоначальной площади являются частными случаями $\mathbf{u}_\mathbf{n}(x, \breve{b})$ при $\breve{b}(x) = \breve{e}(x)$ и $\breve{b}(x) = \breve{a}(x)$ соответственно.

4.5. Обозначим: $\mathbf{n}_i(\breve{b})$ – единичная нормаль к плоскости двух отличных от $\mathbf{b}_i$ векторов репера $\breve{b}$, направленная в ту же что и $\mathbf{b}_i$ сторону от этой плоскости; $\mathbf{u}_i(x, \breve{b}) := \mathbf{u}_{\mathbf{n}_i(\breve{b})}(x, \breve{b})$ – относительные напряжения на гранях репера $\breve{b}(x)$ в точке (x, t); $\mathbf{n}$ – положительная единичная нормаль к плоскости П, проходящей через x; $\boldsymbol{n}$ – единичная положительная нормаль в метрике $V_{t,\breve{b}}$ к этой же плоскости, будем называть ее $\breve{b}$ – нормалью; $(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3)^T := \boldsymbol{n}^{\breve{b}}$.

Совершенно так же, как для ортонормального репера $\breve{e}$ доказывается классическое соотношение Коши между напряжениями Коши (т.е. геометрическими напряжениями) на плоскости П и на гранях $\breve{e}$, доказывается обобщенное соотношение Коши для относительных напряжений

$$\mathbf{u}_\mathbf{n}(x, \breve{b}) = \mathbf{u}_i(x, \breve{b})\mathrm{n}_i \tag{4.12}$$

Вводя репер относительных напряжений на гранях $\check{b}(x)$:

$$\check{u}(x, \check{b}) := (\mathbf{u}_1(x, \check{b}), \mathbf{u}_2(x, \check{b}), \mathbf{u}_3(x, \check{b}))^T \tag{4.13}$$

зависимость (4.12) можем записать в виде

$$\mathbf{u}_\mathbf{n}(x, \check{b}) = \check{u}(x, \check{b})^T n^{\check{b}} \tag{4.14}$$

4.6. Установим связь между реперами относительных напряжений для разных исходных полей реперов. Фиксируем точку $x \in V_t$ и два произвольных невырожденных репера $\check{a}$ и $\check{b}$ в x (значение реперов в других точках несущественно). Пусть $\check{u}(x, \check{a})$ известен, вычислим напряжение $\mathbf{u}_i(x, \check{b})$ на i-ой грани $\check{b}$. Обозначим: единичную положительную нормаль, $\check{a}$ – нормаль и $\check{b}$ – нормаль к этой грани соответственно $\mathbf{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\mathbf{n}$; $A := \check{a}^{\check{b}}$, $B := \check{b}^{\check{a}}$; $\hat{\imath}$ – столбец с единицей на i-ом месте и нулями на остальных. Тогда $\mathbf{n} = \mathbf{b}_i$ и, значит,

$$n^{\check{b}} = \hat{\imath} \tag{4.15}$$

и так как $\check{a} = A^T\check{b}$, то $\check{b} = A^{-T}\check{a}$, следовательно

$$B = A^{-1} \tag{4.16}$$

Согласно формулам (3.15) и (3.16) коэффициент растяжения площади при переходе от $\check{a}$- к $\check{b}$-мере

$$K_2(x, \mathbf{n}) = |\check{a}|_{\check{b}}/|A^T n^{\check{b}}| \quad \mathrm{n}^{\check{a}} = A^T n^{\check{b}}/|A^T n^{\check{b}}| \tag{4.17}$$

Используя (4.17), (4.14) и (4.15) имеем

$$\mathbf{u}_i(x, \check{b}) = K_2^{-1}(x, \mathbf{n})\mathbf{u}_\mathbf{m}(x, \check{a}) = \frac{|A^T n^{\check{b}}|}{|\check{a}|_{\check{b}}}\check{u}(x, \check{a})^T \mathrm{n}^{\check{a}} =$$

$$= |\check{a}|_{\check{b}}^{-1}\check{u}(x, \check{a})^T A^T\hat{\imath} = |\check{a}|_{\check{b}}^{-1}\check{u}(x, \check{a})^T(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})^T = |\check{a}|_{\check{b}}^{-1}\mathbf{u}_j(x, \check{a})a_{ij}$$

и поскольку, согласно (4.16), $|\check{a}|_{\check{b}}$ (т.е. $\check{b}$ – объем параллелепипеда, построенного на $\check{a}$) равен определителю $|A| = |B|^{-1}$, то

$$\check{u}(x, \check{b}) = |B|B^{-1}\check{u}(x, \check{a}) \tag{4.18}$$

Это и есть искомое соотношение между относительными напряжениями.

Выясним связь между матрицами разложения $\check{u}(x, \check{a})$ по реперу $\check{a}$ – $U_{\check{a}}$ и разложения $\check{u}(x, \check{b})$ по реперу $\check{b}$ – $U_{\check{b}}$. Подставляя в (4.18) последовательно $\check{u}(x, \check{a}) = U_{\check{a}}^T\check{a}$ и $\check{a} = B^{-T}\check{b}$, имеем $\check{u}(x, \check{b}) = |B|B^{-1}U_{\check{a}}^T B^{-T}\check{b}$ и значит $U_{\check{b}} = |B|B^{-1}U_{\check{a}}B^{-T}$. Так что матрица разложения репера относительных напряжений на гранях репера $\check{a}$ по $\check{a}$ при замене репера $\check{a}$ на $\check{b}$ меняется, как матрица некоторого контравариантного псевдотензора ранга 2, веса 1. Назовем его псевдотензором относительных напряжений в точке x.

5. Уравнения равновесия относительно произвольного поля реперов. Пусть в V задано поле невырожденных реперов $\check{b}(x)$ класса C^1 и фиксирован ортонормальный репер $\check{e}$; $\mathbf{F}(x)$ и $\boldsymbol{\Psi}(x, \check{b})$ – плотность объемных сил в точке x на единицу объема (геометрическая плотность) и на единицу относительного (относительно $\check{b}$) объема (относительная плотность); $\sigma_i(x) := \mathbf{u}_i(x, \check{e})$ – т.е. напряжение Коши (геометрическое) в x на i-ой грани $\check{e}$.

Так как коэффициент растяжения объема при переходе от $\check{b}$-объема к геометрическому (3.9) равен $|\check{b}|$, то $\Psi(x, \check{b}) = \mathbf{F}(x)|\check{b}|$.

Уравнения равновесия сил и моментов для геометрических напряжений (см., например, [13]):

$$\partial\boldsymbol{\sigma}_i/\partial x_i + \mathbf{F}(x) = 0, \quad \Sigma = \Sigma^T \tag{5.1}$$

где $\Sigma := \check{\sigma}^{\check{e}}$, x_i – координаты x в декартовой системе координат с координатным репером $\check{e}$. Согласно (4.18):

$$\check{\sigma} = |\check{b}|^{-1}B\check{u} \tag{5.2}$$

где $B = \check{b}^{\check{e}}$ и значит $\boldsymbol{\sigma}_i(x) = |\check{b}(x)|^{-1}b_{ij}(x)\mathbf{u}_j(x, \check{b})$. Поэтому

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_i}{\partial\mathbf{e}_i} = |\check{b}|^{-1}\frac{\partial b_{ij}}{\partial\mathbf{e}_i}\mathbf{u}_j + b_{ij}\frac{\partial(|\check{b}|^{-1}\mathbf{u}_j)}{\partial\mathbf{e}_i} \tag{5.3}$$

Первое слагаемое в (5.3) равно

$$|\check{b}|^{-1}\mathbf{u}_j\operatorname{div}\mathbf{b}_j \tag{5.4}$$

Обозначая δ_{ij} – символ Кронекера, b^{ij} – элемент матрицы B^{-1}, используя линейность производной по вектору относительно вектора, по которому производится дифференцирование, и то, что $\check{b} = B^T\check{e}$, т.е.

$$\check{e} = B^{-T}\check{b} \tag{5.5}$$

и значит $\mathbf{e}_i = b^{ki}(x)\mathbf{b}_k(x)$, видим, что второе слагаемое в (5.3) равно

$$b_{ij}b^{ki}\frac{\partial(|\check{b}|^{-1}\mathbf{u}_j)}{\partial\mathbf{b}_k} = \delta_{jk}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_j}{\partial\mathbf{b}_k}|\check{b}|^{-1} - |\check{b}|^{-2}\frac{\partial|\check{b}|}{\partial\mathbf{b}_k}\mathbf{u}_j\right) = |\check{b}|^{-1}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_j}{\partial\mathbf{b}_j} - \frac{\partial\ln|\check{b}|}{\partial\mathbf{b}_j}\mathbf{u}_j\right)$$

Подставляя соотношение (5.4) в (5.3) а результат – в первое из уравнений (5.1), получим уравнение равновесия сил для относительных напряжений

$$\frac{\partial\mathbf{u}_j}{\partial\mathbf{b}_j} + \left(\operatorname{div}\mathbf{b}_j - \frac{\partial\ln|\check{b}|}{\partial\mathbf{b}_j}\right)\mathbf{u}_j + \boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{5.6}$$

Вычислим матрицу $\check{u}^{\check{b}} =: U$. Подставляя в равенство $\check{\sigma} = \Sigma^T\check{e}$, выражение (5.5) и результат в (5.2), имеем: $\check{u} = |\check{b}|B^{-1}\Sigma^T B^{-T}\check{b}$. Следовательно матрица $U = |\check{b}|B^{-1}\Sigma B^{-T}$ и значит (см. (5.1)) симметрична.

Поэтому уравнение равновесия моментов и для относительных напряжений сводится к симметричности матрицы, в данном случае U:

$$U = U^T \tag{5.7}$$

Замечание. В уравнении (5.6) фигурирует произвольное поле невырожденных реперов $\check{b}(x)$, которое может и не быть полем координатных реперов какой-нибудь криволинейной системы координат.

6. Репер упругой деформации. Уравнение упругого состояния. *6.1*. Предположим временно, что: рассматриваемая среда упругая, в начальный момент она находилась в естественном – ненапряженном состоянии и до момента t подвергалась только упругим деформациям. В этом случае первоначальную метрику деформированной среды будем называть естественной; соответственно и напряжение на единицу естественной площади $\mathbf{u}_\mathbf{n}(x, \check{a})$ назовем естественным (в [13] – вектор условного напряжения, в [12] – первый вектор напряжений Пиолы – Кирхгофа) и будем обозначать $\mathbf{t}_\mathbf{n}(x)$; естественной назовем и плотность объемных сил на единицу естественного объема $\boldsymbol{\Psi}(x, \check{a})$, которую обозначим $\boldsymbol{\Phi}(x)$.

Теперь репер деформации, определенный формулой (4.11), полностью характеризует упругую деформацию среды в точке (x, t). Назовем его репером упругой деформации.

Поскольку далее используются только естественные напряжения и плотности, то слово "естественное" обычно опускается.

Соотношение Коши (4.12) для естественных напряжений переходит в хорошо известное [12, 13]:

$$\mathbf{t}_\mathbf{n}(x_0) = \mathbf{t}_i(x_0, \check{a})\mathrm{n}_i \tag{6.1}$$

где $\mathbf{t}_\mathrm{i}(x_0, \check{a}) := \mathbf{t}_{\mathbf{n}_i(\check{a})}(x_0)$, $\boldsymbol{n}$ – единичная $\check{a}$-нормаль в точке x к плоскости ортогональной $\mathbf{n}$, $(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3)^T := \mathrm{n}^{\check{a}}$.

Напомним, что согласно (4.17) при $\check{b} = \check{e}$:

$$\mathrm{n}^{\check{a}} = A^T n^{\check{e}}/|A^T n^{\check{e}}|, \quad A = \check{a}^{\check{e}} \tag{6.2}$$

Будем считать, что рассматриваемая среда в естественном состоянии однородна и изотропна и что напряжение в произвольной точке x деформированной среды полностью определяется деформацией в точке x, т.е. заданием репера упругой деформации $\check{a}(x)$.

Используя $\check{t}(x, \check{a})$ – репер естественных напряжений в точке x на гранях репера $\check{a}(x)$, введем матрицу напряжений $\hat{t}(x, \check{a}) := (t_{ij}(x, \check{a})) := \check{t}^{\check{a}}(x, \check{a})$. При принятых предположениях о среде задание репера деформации $\check{a}(x)$ определяет матрицу напряжений с помощью цепочки зависимостей [12]: $\check{a} \to \hat{\varepsilon}^e(\check{a}) := (\varepsilon^e_{ij}(\check{a}) := ((\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i\rangle - \delta_{ij})/2)$ – матрица упругих деформаций Коши – Лагранжа; $\hat{\varepsilon}^e \to \hat{f}(\hat{\varepsilon}^e) := (f_{ij}(\hat{\varepsilon}^e))$, где f_{ij} – функции класса C^1, характеризующие упругие свойства среды; $\hat{t}(x, \check{a}(x)) = \hat{f}(\hat{\varepsilon}^e(\check{a}(x)))$.

Таким образом уравнения упругого состояния среды можно записать в виде

$$\hat{t}(x, \check{a}(x)) = \hat{f}(\hat{\varepsilon}^e(\check{a}(x))) \tag{6.3}$$

или

$$\mathbf{t}_i(x, \breve{a}(x)) = f_{ji}(\hat{\varepsilon}^e(\breve{a}(x)))\mathbf{a}_j(x) \ (i = 1, 2, 3) \tag{6.4}$$

При этом матрица $\hat{t}(x, \breve{a})$, как частный случай U (см. п. 5), симметрична, а репер главных напряжений соосен главному реперу деформации.

Поскольку в рассматриваемом случае функции $\hat{t}$, $\check{t}$ и $\mathbf{t}_i$ зависят лишь от репера $\breve{a}(x)$, то в дальнейшем для их значений x как первый аргумент может не указываться.

6.2. Рассмотрим теперь упругопластическую среду в процессе упругопластической деформации. Допустим сначала, что в любой момент t процесса среду или хотя бы достаточно малую окрестность любой ее точки можно, упруго деформируя, разгрузить до естественного состояния. Примем это состояние за начальное недеформированное, а состояние в момент t – за полученное из него упругим деформированием. Тогда (см. 6.1) в момент t в каждой точке среды существует репер упругой деформации.

Аналогичное поле реперов существует и при более общих предположениях. В общем случае даже малую окрестность точки не удается разгрузить до ненапряженного состояния. Сохраняются остаточные напряжения. Однако можно предположить, что эти напряжения стремятся к нулю при стягивании окрестности в точку и таким образом разгруженные состояния стремятся к ненапряженному.

Фиксируем в момент t произвольную точку x деформированной среды. Пусть υ окрестность точки x. Разгрузим часть среды, попавшую в υ, и рассмотрим репер деформации $\breve{a}_\upsilon(x, t)$ в точке x, соответствующий перемещению разгруженной части в ее положение в момент t. Допустим, что при $\upsilon \to x$ существует $\lim \breve{a}_\upsilon(x, t) =: \breve{a}(x, t)$ и, что поле $\breve{a}(x, t)$ непрерывно.

Рассмотрим теперь произвольную материальную кривую в деформированной среде. Покроем ее конечным числом шаров радиуса r и рассечем на конечное число частичных кривых так, чтобы каждая целиком попадала в один из шаров. Разгружая часть среды, попавшую в этот шар, получим "разгруженную" длину соответствующей частичной кривой. Под "разгруженной" длиной всей кривой будем понимать сумму разгруженных длин ее частей.

Можно показать, что при $r \to 0$ разгруженные длины кривой стремятся к определенному пределу, который и назовем "естественной" длиной рассматриваемой материальной кривой. При этом естественные меры материальных поверхностей, объемов и углов можно определить аналогично. Оказывается, что так введенная естественная мера материальных объектов совпадает с их мерой в римановом пространстве, порожденном на V_t полем реперов $\breve{a}(x, t)$.

Таким образом в обоих случаях в любой момент t в каждой точке среды существует репер, определяющий изменение меры одно-трехмерных материальных объектов в момент t по сравнению с их естественной мерой. Именно это свойство рассматриваемого репера существенно в дальнейшем.

Введем поэтому для упругопластических сред понятие репера упругой деформации, обобщающее ранее введенное для упругих сред и не опирающееся ни на представление о реальном движении среды, ни на предположения, связанные с полной или частичной разгрузкой ее частей.

Предположим, что в каждый момент рассматриваемая среда обладает некой "упругой структурой", которая в каждой ее точке позволяет судить об естественной мере вблизи этой точки. Точнее примем

Предположение. В каждый фиксированный момент t каждой точке среды x можно приписать невырожденный репер $\breve{a}(x, t)$ (будем называть его репером упругой деформации среды в точке (x, t)), так что риманова метрика, порожденная в V_t полем $\breve{a}(x, t)$ (метрика пространства $V_{t, \breve{a}}$) является "естественной".

Замечание.

1. "Естественность" меры, ясная в случае возможности полной разгрузки, заключается в постулируемых ниже связях ее с напряжением и пластической деформацией.

2. В поликристаллическом материале прообразом "упругой структуры" могут служить кристаллические решетки.

Поле реперов упругой деформации (РУД) на V_t не единственное. Действительно, если $\breve{a}(x, t)$ – поле РУД, то для того, чтобы поле реперов $\breve{a}'(x, t)$ тоже было полем РУД, необходимо и достаточно, чтобы эти поля были эквивалентны, т.е. чтобы при $\forall x \in V_t$ реперы $\breve{a}(x, t)$ и $\breve{a}'(x, t)$ были эквивалентны.

Действительно, если поля $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ эквивалентны, то в каждой точке x эти реперы порождают одинаковое скалярное произведение и значит порождаемые полями $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ римановы метрики совпадают, т.е. $\breve{a}'$ тоже порождает естественную метрику и поэтому является полем РУД. Так же просто обосновывается необходимость.

В дальнейшем часто будет использоваться следующая лемма.

Лемма. Для того, чтобы невырожденные реперы $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала ортогональная 3×3 матрица Q такая, что

$$\breve{a}' = Q\breve{a} \tag{6.5}$$

Действительно, пусть реперы эквивалентны, т.е. при ®$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\breve{a}'} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{\breve{a}}$. Обозначим $Q := (\breve{a}'^{\breve{a}})^T$, тогда $\breve{a}' = Q\breve{a}$. Поскольку каждый из реперов ортогонален относительно порожденного им скалярного произведения, то при $\forall i, j$ $\delta_{ij} = \langle \mathbf{a}'_i, \mathbf{a}'_j \rangle_{\breve{a}'} =$ $= \langle \mathbf{a}'_i, \mathbf{a}'_j \rangle_{\breve{a}} = \langle q_{ik}\mathbf{a}_k, q_{jl}\mathbf{a}_l \rangle_{\breve{a}} = q_{ik}q_{jl}\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l \rangle_{\breve{a}} = q_{ik}q_{jl}\delta_{kl}$, т.е. $q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij}$ и значит Q – ортогональная. Достаточность доказывается еще проще.

7. Тензор пластической деформации. Для характеристики пластической деформации понадобится дополнительная информация об изменении меры деформируемых геометрических объектов.

7.1. Коэффициенты растяжения меры при отображении $\mathrm{V}_{\breve{\alpha}}$ *в* $V_{\breve{\beta}}$. В этом случае ситуация такая же, как в п.п. 4.2–4.3: $\mathrm{V}_{\breve{\alpha}}$ – в роли области начального расположения среды, $V_{\breve{\beta}}$ – в роли V_t-области конечного расположения, $\breve{\alpha}(x)$ – вместо $\breve{a}(\mathrm{x})$, $\breve{\beta}$-мера – вместо геометрической в V_t.

Введем репер

$$\breve{a}(x) := \partial x(\mathrm{x})/\partial\breve{\alpha}(\mathrm{x})$$

играющий роль $\breve{a}(x)$ в 4.2–4.3. Рассуждая так же, как в 4.2–4.3, приходим к выводу, что $\breve{a}$-мера объектов в V совпадает с $\breve{\alpha}$-мерой их прообразов в V. Но в таком случае справедливо

Утверждение. Коэффициенты растяжения меры при сравнении $\breve{\alpha}$-меры одно-трехмерных объектов в V с $\breve{\beta}$-мерой их образов в V получаются по формулам (3.7), (3.9) и (3.16) после замены в них $\breve{\alpha}$ на $\breve{a}$.

Для измерения начальных углов с помощью $\breve{a}$-меры, используя рассуждения и обозначения п. 4.2, имеем

$$\cos(\boldsymbol{m}_1, \hat{}\boldsymbol{m}_2)_{\mathrm{x},\breve{\alpha}} = \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle_{\breve{a}(x)}}{|\mathbf{m}_1|_{\breve{a}(x)} \cdot |\mathbf{m}_2|_{\breve{a}(x)}} \tag{7.1}$$

где $(\boldsymbol{m}_1, \hat{}\boldsymbol{m}_2)_{\mathrm{x},\breve{\alpha}}$ – угол между $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ в точке x в $\breve{\alpha}$-метрике.

7.2. Далее рассматривается среда, находящаяся в движении на протяжении временного промежутка $[t_b, t_e] =: T$ и являющаяся упругопластической (в понимании п. 6.2) в любой момент $t \in T$. Все ранее введенные предположения и основные обозначения сохраняются, вводится лишь дополнительная переменная – время (t), которое будет входить в качестве аргумента в функции, задающие закон движения среды, РУД, скорость точек среды – $\boldsymbol{\upsilon}(x, t)$ и т.д.

Обозначим $W := \{(x, t)/t \in T, x \in V_t\}$. Пусть $\breve{a}(x, t)$ – поле класса $C^1(W)$ РУД среды. Фиксируем произвольное $t_0 \in T$, закон движения среды от момента t_0 обозначим

$$x = x_{t_0}(\mathrm{x}, t) \tag{7.2}$$

Он сопоставляет пространственной точке x пространственную точку x, в которой в момент $t \in T$ находится точка среды, находившаяся в момент t_0 в x. Будем считать, что $x_{t_0} \in C^2(V_{t_0} \times T)$.

Представление о пластической деформации среды за промежуток времени $[t_0, t]$ дает сравнение естественной меры материальных объектов в момент t и t_0.

Подобно тому, как поле реперов $\partial x/\partial \breve{\mathrm{a}}$ на V_t, где $\breve{\mathrm{a}}$ определяет геометрическую меру в начальный момент (ведь $E = E_{\breve{\mathrm{a}}}$), дает полную характеристику изменения геометрической меры материальных объектов (см. п. 4.3), поле реперов

$$\breve{b}(x, t) := \frac{\partial x_{t_0}(\mathrm{x}, t)}{\partial \breve{a}(\mathrm{x}, t_0)}, \quad (x = x_{t_0}(\mathrm{x}, t)) \tag{7.3}$$

где $\breve{a}(x, t_0)$ определяет естественную метрику на V_{t_0} в момент t_0, при известном поле РУД $\breve{a}(x, t)$ на V_t и V_{t_0}, полностью характеризует изменение естественной меры материальных объектов за время $[t_0, t]$, т.е. пластическую деформацию за этот промежуток времени.

В самом деле. Возьмем $\forall \mathrm{x}_0 \in V_{t_0}$ и $x_0 := x_{t_0}(\mathrm{x}_0, t)$ и временно обозначим $\breve{a}(\mathrm{x}_0, t_0) =:$ $=: \breve{a}_0 =: (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0)^T$, $\breve{a}(x_0, t) =: \breve{a}$, $\breve{b}(x_0, t) =: \breve{b}$. Согласно утверждению п. 7.1 ($\breve{a}$ в роли $\breve{\beta}$, $\breve{b}$ в роли $\breve{a}$) коэффициент растяжения естественной длины в точке (x_0, t) в произвольном направлении $\mathbf{m}$:

$$\tilde{K}_1(x_0, t) = |\mathbf{m}|_{\breve{a}}/|\mathbf{m}|_{\breve{b}} \tag{7.4}$$

Кроме того, для двух произвольных ненулевых векторов $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, исходящих из точки x_0, можно взять ориентированные материальные кривые, для которых эти вектора являются положительными касательными векторами в точке x_0 в момент t, и ввести положительные касательные вектора $\boldsymbol{m}_i$ к этим кривым в момент t_0 в точке x_0.

Используя теперь свойства РУД $\check{a}$ (см. предположение в п. 6, (4.6) и (7.1) с $\check{\alpha} = \check{a}_0$) для материального угла $(\mathbf{m}_1, \wedge\mathbf{m}_2)_{x_0, t}$ и соответствующего ему $(\boldsymbol{m}_1, \wedge\boldsymbol{m}_2)_{x_0, t_0}$ имеем

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{m}_1, \wedge\mathbf{m}_2)_{x_0, t} &= \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\rangle_{\check{a}}}{|\mathbf{m}_1|_{\check{a}}|\mathbf{m}_2|_{\check{a}}} \\ \cos(\boldsymbol{m}_1, \wedge\boldsymbol{m}_2)_{x_0, t_0} &= \frac{\langle \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\rangle_{\check{a}_0}}{|\boldsymbol{m}_1|_{\check{a}_0}|\boldsymbol{m}_2|_{\check{a}_0}} = \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\rangle_{\check{b}}}{|\mathbf{m}_1|_{\check{b}}|\mathbf{m}_2|_{\check{b}}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

Таким образом задание $\check{b}$ при известном $\check{a}$ позволяет: вычислить коэффициент растяжения естественной длины в x_0 в момент t в любом направлении $\mathbf{m}$ (см. (7.4)); для любых материальных кривых, исходящих из x_0 в момент t вычислить косинусы естественного угла между ними в точке x_0 в момент t и в точке x_0 в момент t_0 (см. (7.5)).

В частности для векторов $\mathbf{b}_i$ репера $\check{b}$ $b_i^{\check{b}} = \hat{i}$ и $|\mathbf{b}_i|_{\check{b}} = 1$. Следовательно, (см. (7.4), (7.5)) $|\mathbf{b}_i|_{\check{a}}$ – коэффициент растяжения материальной длины вдоль $\mathbf{b}_i$ в точке x_0 в момент t; $\cos(\mathbf{b}_i, \wedge\mathbf{b}_j)_{x_0, t} = \langle\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle_{\check{a}}/|\mathbf{b}_i|_{\check{a}}|\mathbf{b}_j|_{\check{a}}$ в то время, как косинус материального угла между соответствующими им векторами $\mathbf{a}_i^0$, $\mathbf{a}_j^0$ репера $\check{a}_0$ в x_0 в момент t_0 (см. (7.5)) при $i \neq j$ равен нулю.

Как видим, репер $\check{b}$ для определения пластической деформации среды, произошедшей за промежуток времени $[t_0, t]$, играет ту же роль, что $\check{a}$ для определения упругой деформации.

Аналогично тому, как вводилась матрица Коши – Лагранжа упругой деформации, введем матрицу пластической деформации в точке x_0 от момента t_0.

$$\hat{\varepsilon}^p := ((\langle\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle_{\check{a}} - \delta_{ij})/2) =: (\hat{\gamma} - 1)/2 \tag{7.6}$$

Вводя матрицу $B := \check{b}^{\check{a}}$ и учитывая определение скалярного произведения $\langle\cdot, \cdot\rangle_{\check{a}}$ имеем

$$\hat{\gamma} = B^T B$$

Физический смысл $\hat{\varepsilon}^p$ такой же, как и $\hat{\varepsilon}^e$ с той лишь разницей, что геометрические длины и углы заменяются на естественные. Посмотрим, как меняется $\hat{\varepsilon}^p$, если вместо РУД $\check{a}_0$ в точке (x_0, t_0) взять эквивалентный ему $\check{a}'_0$. Достаточно проследить за изменением $\hat{\gamma}$. Обозначим $Q_0 := ((\check{a}'_0)^{\check{a}_0})^T$, тогда

$$\check{a}'_0 = Q_0\check{a}_0 \tag{7.7}$$

Для того, чтобы соответствующие $\check{a}'_0$ объекты $\check{b}'$, B', $(\hat{\varepsilon}^p)'$, $\hat{\gamma}'$ сохранили принадлежность классу C^1, заменим поле $\check{a}(x, t)$ эквивалентным ему $\check{a}'(x, t)$ таким, что

$$\check{a}'(x, t) = Q(x, t)\check{a}(x, t) \tag{7.8}$$

где $Q(x, t)$ – поле класса C^1 ортогональных матриц (см. п. 6, лемма) и $Q(\mathrm{x}_0, t_0) = Q_0$. Теперь с учетом (7.3), (7.7) и (7.8) получаем

$$\breve{b}' = \frac{\partial x_{t_0}(\mathrm{x}_0, t)}{\partial \breve{a}'(\mathrm{x}_0, t_0)} = \frac{\partial x_{t_0}(\mathrm{x}_0, t)}{\partial \mathrm{x}}\breve{a}'_0 = Q_0\breve{b} = Q_0 B^T \breve{a} = Q_0 B^T Q^T \breve{a}'$$

Отсюда следует, что

$$B' = QBQ_0^T \tag{7.9}$$

Поэтому $\hat{\gamma}' = B'^T B' = Q_0 B^T B Q_0^T = Q_0 \hat{\gamma} Q_0^T$, т.е. $\hat{\gamma}$ является матрицей в репере $\breve{a}_0$ некоторого ковариантного тензора второго ранга $\boldsymbol{\gamma}$, определенного в (x_0, t_0) для реперов упругой деформации и зависящего от времени.

Следовательно, то же самое можно сказать об $\hat{\varepsilon}^p$ и тензоре $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ пластической деформации в точке x_0 от момента t_0.

Вообще в работе встречаются только тензоры второго ранга и, поскольку все они относятся лишь к реперам упругой деформации, то матрицы преобразования от репера к реперу ортогональные и поэтому тензоры ковариантные.

Замечание. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ хотя и совпадает по названию и обозначению, отличен от традиционного, вводимого как разность между тензорами полной и упругой деформации или отсчитываемого от начального момента.

Введем тензор скоростей пластической деформации в точке (x_0, t_0) – $\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{x}_0, t_0)$, по определению равный полной производной по t в момент t_0 тензора пластической деформации в точке x_0 от момента t_0, т.е.

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{x}_0, t_0) = (\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p/\mathrm{d}t)\big|_{t_0} \tag{7.10}$$

8. Уравнение согласования деформаций. На траектории материальной точки, в момент t_0 находившейся в x_0, согласно (7.3):

$$\frac{\partial x_{t_0}(\mathrm{x}_0, t)}{\partial \mathrm{x}}\breve{a}(\mathrm{x}_0, t_0) = (B(x, t))^T \breve{a}(x, t), \quad x = x_{t_0}(\mathrm{x}_0, t)$$

Дифференцируя это тождество полным образом по t при $t = t_0$ и меняя порядок дифференцирования слева, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}(\mathrm{x}_0, t_0)}{\partial \breve{a}(\mathrm{x}_0, t_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B^T(x, t)\right]\bigg|_{t_0} \breve{a}(\mathrm{x}_0, t_0) + B^T(\mathrm{x}_0, t_0)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\breve{a}(x, t)\right]\bigg|_{t_0}$$

Учитывая, что $B^T(\mathrm{x}_0, t_0) = I$, и переходя к сокращенным обозначениям, получим уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial \breve{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}B^T}{\mathrm{d}t}\right)\bigg|_{t_0} \breve{a} + \left(\frac{\mathrm{d}\breve{a}}{\mathrm{d}t}\right)\bigg|_{t_0} \tag{8.1}$$

которому в точке (x_0, t_0) удовлетворяет любое поле РУД $\breve{a}$ и соответствующая ему B (поскольку речь идет о конкретном движении среды, то поле $\boldsymbol{\upsilon}$ фиксировано).

Дифференцируя (7.9) полным образом по t, получим при $t = t_0$ закон изменения матрицы $\mathrm{d}B/dt|_{t_0}$ при переходе к произвольному полю РУД $\breve{a}'(\mathrm{x}, t)$ (см. (7.8))

$$\frac{\mathrm{d}B'}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0} Q_0^T + Q_0\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0} Q_0^T \tag{8.2}$$

Для того, чтобы этот закон был тензорным на W, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{d}Q(\mathrm{x}_0, t_0)/\mathrm{d}t = 0 \ \forall(\mathrm{x}_0, t_0) \in W \tag{8.3}$$

т.е. чтобы $Q(x, t)$ не менялось вдоль пространственно-временных траекторий движения точек среды.

Поля РУД $\breve{a}$ и $\breve{a}'$, связанные соотношением (7.8) с Q, удовлетворяющим (8.3), назовем кинематически эквивалентными.

Таким образом множество полей РУД распадается на классы кинематически эквивалентных полей и на каждом из классов матрица $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t|_{t_0}$ меняется по тензорному закону.

При этом классы эти достаточно богаты, а именно справедливо утверждение: если $\breve{a}(x, t)$ – поле РУД среды в W, то для $\forall t_0$ и любого заданного в момент t_0 на V_{t_0} поля РУД $\breve{a}_0(x)$ существует кинематически эквивалентное $\breve{a}(x, t)$ поле $\breve{a}^*(x, t)$, в момент t_0 совпадающее с $\breve{a}_0(x)$.

Действительно, обозначим через $Q_0(x)$ поле ортогональных матриц таких, что $\breve{a}_0(x) = Q_0(x)\breve{a}(x, t_0)$. Введем поле ортогональных матриц на W, положив $Q(x, t_0) = Q_0(x)$ и $Q(x, t)$ не меняется вдоль траекторий точек среды. Полагая $\breve{a}^*(x, t) := Q(x, t)\breve{a}(x, t)$ будем иметь: во-первых, $\breve{a}^*(x, t_0) := Q(x, t_0)\breve{a}(x, t_0) = \breve{a}_0(x)$ и, во-вторых, поскольку $\mathrm{d}Q(x, t)/\mathrm{d}t = 0$, поле $\breve{a}^*$ кинематически эквивалентно $\breve{a}(x, t)$.

Предположение. Существует поле РУД среды класса $C^1(W)$, будем называть его кинематически связанным, для которого матрица $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t|_{t_0}$ симметрична на W.

Замечание 8.1. В работе 2, упомянутой в сноске п. 1, показано, что при законе движения среды класса C^3 существование такого поля автоматически следует из существования хотя бы какого-нибудь поля РУД класса C^2.

Оказывается множество кинематически связанных полей РУД образует класс кинематически эквивалентных полей РУД.

Действительно, если $\breve{a}$ – кинематически связанное поле РУД, $\breve{a}'$ – кинематически эквивалентное ему поле, то согласно (8.2) матрица $(\mathrm{d}B'/\mathrm{d}t)|_{t_0} = Q_0(\mathrm{d}B/\mathrm{d}t)|_{t_0}Q_0^T$ и следовательно симметрична (поскольку симметрична $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t|_{t_0}$), т.е. $\breve{a}'$ – тоже кинематически связанное. С другой стороны, если поля РУД $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ – кинематически связанные, то матрицы $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t|_{t_0}$ и $\mathrm{d}B'/\mathrm{d}t|_{t_0}$ симметричны, а значит (см. (8.2)) $(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t|_{t_0})Q_0^T$ – тоже. Следовательно $(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t)|_{t_0}Q_0^T = Q_0(\mathrm{d}Q^T/\mathrm{d}t)|_{t_0}$ и поэтому

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}Q_0^T = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}Q_0^T + Q_0\left.\frac{\mathrm{d}Q^T}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right) = \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(QQ^T)}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = 0$$

поскольку $QQ^T = I$. Таким образом $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t|_{t_0} = 0$ т.е. $\breve{a}$ и $\breve{a}'$ кинематически эквивалентны.

Класс кинематически связанных полей РУД играет особую роль. Пусть $\breve{a}$ – кинематически связанное поле РУД, (x_0, t_0) – произвольная точка из W. Учитывая симметричность $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t|_{t_0}$, равенство $B|_{t_0} = I$ и формулы (7.10) и (7.6), получаем выражение для матрицы $\boldsymbol{\zeta}(\mathrm{x}_0, t_0)$ в репере $\breve{a}_0$:

$$\zeta_{\breve{a}_0}(\mathrm{x}_0, t_0) = \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)\Big|_{t_0}\right]_{\breve{a}_0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\varepsilon}^p\right)\Big|_{t_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B^TB - I)\right]\Big|_{t_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}B^T}{\mathrm{d}t}B\right)\Big|_{t_0} + \left(B^T\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t_0}\right] = \frac{\mathrm{d}B^T}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_0}$$

Подставляя это в (8.1), получим уравнение согласования скоростей деформаций

$$\partial\boldsymbol{\upsilon}/\partial\breve{a} = \zeta_{\breve{a}}\breve{a} + \mathrm{d}\breve{a}/\mathrm{d}t \tag{8.4}$$

которому удовлетворяет в W любое кинематически связанное поле РУД.

Физический смысл уравнения (8.4), если вспомнить, как было получено (8.1), ясен: $\partial\boldsymbol{\upsilon}(x, t)/\partial\breve{a}(x, t)$ – полная (субстанциональная) скорость полного изменения в результате движения среды репера, совпадающего с $\breve{a}(x, t)$, в точке (x, t), в момент t равна полной скорости изменения РУД $\mathrm{d}\breve{a}(x, t)/\mathrm{d}t$ плюс добавка, зависящая от матрицы в репере $\breve{a}$ тензора скоростей пластической деформации.

Замечание 8.2. Когда упругие деформации "малы", точнее в предположении, что существует ортонормальный репер $\breve{e}$ и число $\delta \ll 1$ такие, что $|\mathbf{a}_i - \mathbf{e}_i|$ и $|\partial\mathbf{a}_i/\partial x_j|$, $|\partial\mathbf{a}_i/\partial t|$, $|\partial\boldsymbol{\upsilon}/\partial x_i| \le \delta$, из (8.1), пренебрегая величинами порядка δ^2, можно получить:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}(x_0, t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varepsilon}^p_{t_0}(x_0, t_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varepsilon}^e(x_0, t_0), \quad \forall(x_0, t_0) \in W$$

где полная и пластическая деформации отсчитываются от момента t_0. Именно этим уравнением, хотя и необоснованно, но в рассматриваемой ситуации правильно, фактически подменяют традиционное $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e$.

9. Уравнения упругого и пластического состояния для упругопластических сред "однородных и изотропных в естественном состоянии". Под указанными в заголовке средами понимаем среды, обладающие следующими свойствами.

Предположение 9.1. При упругопластической деформации РУД и естественные напряжения связаны тем же, что и для упругих сред, однородных и изотропных в естественном состоянии, уравнением упругого состояния (6.3) ≡ (6.4).

Пусть $\breve{a}^*$ – главный РУД в точке $(x, t) \in W$, тогда согласно предположению 9.1 $\breve{t}(\breve{a}^*) = (\mathbf{t}_1(\breve{a}^*), \mathbf{t}_2(\breve{a}^*), \mathbf{t}_3(\breve{a}^*))^T$ – главный репер естественных напряжений на гранях $\breve{a}^*$ и репер $\breve{a}^*$ соосны; $\mathbf{t}_i(\breve{a}^*)$ – главные естественные напряжения. Единственную возможно отличную от нуля координату $\mathbf{t}_i(\breve{a}^*)$ в репере $\breve{a}^*$ – $t_{\underline{ii}}(\breve{a}^*) =: t_i(\breve{a}^*)$ будем тоже называть главным напряжением, что, учитывая обозначения, не грозит путаницей; $(t_1(\breve{a}^*), t_2(\breve{a}^*), t_3(\breve{a}^*)) =: \mathrm{t}(\breve{a}^*)$.

Предположение 9.2. Если $\breve{a}^*$ – главный РУД среды в точке (x, t), то тензор $\boldsymbol{\zeta}(x, t)$ соосен $\breve{a}^*$ при $\forall(x, t) \in W$; более того, существуют и известны характеризующие пластические свойства среды функции p_i: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, 3)$, такие, что матрица

$$\zeta_{\breve{a}^*}(x,t) = \left\| \begin{matrix} p_1(\mathrm{t}(\breve{a}^*)) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(\mathrm{t}(\breve{a}^*)) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(\mathrm{t}(\breve{a}^*)) \end{matrix} \right\| =: P(\mathrm{t}(\breve{a}^*)) \qquad (9.1)$$

Замечание. 1. Таким образом, пока рассматриваемая среда является "идеально-пластической" в том смысле, что скорости пластической деформации не зависят от предыстории деформации, а зависят лишь от главных напряжений.

2. Предположение, что $\zeta_{\breve{a}^*}$ зависит только от главных напряжений и не зависит от приращений напряжений, кажется нам при "медленных" деформациях вполне естественным.

3. Используя технику, применяемую при изучении кривой текучести изотропного материала (см., например, [14]), нетрудно показать, что

$$p_3(t_2,t_3,t_1) = p_2(t_3,t_1,t_2) = p_1(t_1,t_2,t_3) =: p(\mathrm{t}) \ \forall t$$

Для произвольного РУД $\breve{a}$ в точке (x, t) обозначим через R ортогональную матрицу такую, что $\breve{a} = R\breve{a}^*$. Тогда $\zeta_{\breve{a}} = R\zeta_{\breve{a}^*}R^T$ и уравнение пластического состояния среды (9.1) можно записать в виде

$$\zeta_{\breve{a}}(x,t) = RP(\mathrm{t}(\breve{a}^*))R^T, \quad \forall (x,t) \in W \qquad (9.2)$$

10. Система уравнений упругопластической деформации в эйлеровых переменных. Подведем итог. Рассматривается удовлетворяющая предположениям п.п. 6 и 8 упругопластическая среда, движущаяся в пространственно-временной области W. Известны естественная плотность приложенных объемных сил – $\mathbf{\Phi}(x, t)$ класса $C(W)$ и плотность среды в недеформированном состоянии – ρ_0. Искомыми являются поле скоростей точек среды – $\mathbf{\upsilon}(x, t)$ и какое-нибудь из кинематически эквивалентных полей кинематически связанных РУД среды – $\breve{a}(x, t)$, где $\breve{a}$ и $\mathbf{\upsilon}$ связаны двумя уравнениями: уравнением согласования деформаций (8.4) (или (8.1), когда на $\breve{a}$ не накладывается условие кинематической связанности) и уравнением движения, которое получается из уравнения равновесия сил (5.6), если в качестве $\breve{b}(x)$ взять $\breve{a}(x, t)$. При этом относительные напряжения $\mathbf{u}_i(x)$ переходят в естественные – $\mathbf{t}_i(x, t)$, а в объемные силы включаются и силы инерции, т.е. $\mathbf{\Psi}(x)$ заменяется на $\mathbf{\Phi}(x, t) - \rho_0(\mathrm{d}\mathbf{\upsilon}/\mathrm{d}t)$.

Эти уравнения справедливы для любых сред с "упругой структурой". Помимо искомых $\breve{a}$ и $\mathbf{\upsilon}$ они содержат еще репер естественных напряжений $\breve{t}$ и матрицу, характеризующую пластическую деформацию, поэтому для получения замкнутой системы уравнений их необходимо дополнить уравнениями, описывающими упругие и пластические свойства материала.

В случае однородных и изотропных в недеформированном состоянии сред, т.е. удовлетворяющих еще и предположениям 9.1 и 9.2, дополняющими уравнениями служат уравнения упругого и пластического состояния (6.4) и (9.2).

Таким образом система уравнений динамики упругопластической деформации в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\rho_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{a}_i} + \left(\operatorname{div}\mathbf{a}_i - \frac{\partial \ln|\breve{a}|}{\partial \mathbf{a}_i}\right)\mathbf{t}_i + \mathbf{\Phi} \\ &\frac{\mathrm{d}\breve{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{\upsilon}}{\partial a} - RPR^T\breve{a}, \quad \forall (x,t) \in W \end{aligned} \qquad (10.1)$$

$$\mathbf{t}_i = f_{ji}(\hat{\varepsilon}^e(\breve{a}))\mathbf{a}_j \tag{10.2}$$

Полные производные в (10.1) выражаются через $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\breve{a}$ следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{\upsilon}} + \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{\partial t}, \quad \frac{d\breve{a}}{dt} = \frac{d\breve{a}}{d\boldsymbol{\upsilon}} + \frac{d\breve{a}}{dt} \tag{10.3}$$

Система (10.1) (с учетом (10.2)) представляет собой систему векторного и реперного уравнения для нахождения векторной функции $\boldsymbol{\upsilon}$ и реперной – $\breve{a}$. В векторной форме это четыре уравнения для $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Уравнения записаны в бескоординатной форме. После введения какой-нибудь системы координат и замены производных по вектору их выражениями через частные производные по координатам – это система квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных.

Уравнения (10.1) разрешены относительно производных по времени от искомых функций, что делает систему удобной для численного решения по временным слоям.

В случае, когда функции p_i, характеризующие пластические свойства среды, зависят не только от главных напряжений, но и от параметров, определяемых предысторией деформации, систему надо дополнить уравнениями, связывающими эти параметры с искомыми функциями.

В случае, когда пластические деформации отсутствуют ($p_i = 0$), (10.1) переходит в систему уравнений теории упругости (41)[2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соломещ И.А., Соломещ М.А.* Уравнения упругопластичности для репера упругой деформации и скоростей точек // Докл.РАН. 1997. Т. 354. № 6. С. 759–761.
2. *Naghdi P.M.* A Critical review of the state of finite plasticity // ZAMP. 1990. V. 41. № 3. P. 315–394.
3. *Khan A.S., Huang S.* Continuum Theory of Plastisity // New York: Wiley, 1995. 440 p.
4. *Reuss A.* Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie // ZAMM., 1930. Bd. 10. H. 3. S. 266–274.
5. *Green A.E., Naghdi P.M.* A general theory of an elastic – plastic continuum // Archiv. Ration. Mech. Analyses. 1965. V. 18. № 4. P. 251–281.
6. *Rubin M.B.* Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables // Intern. J. Solids Structures. 1994. V. 31. № 19. P. 2615–2634.
7. *Besseling J.F., Van der Giessen E.* Mathematical Modelling of Inelastic Deformation // London: Chapman and Hall, 1994. 324p.
8. *Eckart C.* The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and plasticity // Phys. Rev. 1948. V. 73. № 4. P. 373–382.
9. *Naghdi P.M., Srinivasa A.R.* A dynamical theory of structured solids. I Basic developments // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 345. № 1677. P. 425–458.
10. *Lee E.H., Liu D.T.* Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane – wave Analysis // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. № 1. P. 19–27.
11. *Шитиков А.В.* О вариационном принципе построения уравнений упругопластичности при конечных деформациях // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 158–161.
12. *Съярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
13. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
14. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Израиль

Поступила в редакцию
26.06.2002

[2] См. *Соломещ И.А., Соломещ М.А.* Уравнения теории упругости для репера деформации и скоростей точек при произвольном начальном состоянии среды. Деп. в ВИНИТИ. 14.07.93. Т № 1941-В93. 1993. 20 с.