**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2005**

УДК 539.3

© 2005 г. **Ю.А. БОГАН**

РЕГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Построены регулярные интегральные уравнения (уравнения Фредгольма второго рода) для решения второй краевой задачи анизотропной теории упругости (на границе задан вектор перемещений) в односвязной ограниченной области на плоскости в области с ляпуновской границей. Отметим, что для изотропного материала аналогичные уравнения были построены в [1] другим методом. Д.И. Шерман в [2] дал комплексные уравнения для изотропного материала при весьма жестких ограничениях на гладкость границы: функции, задающие форму границы, имеют четыре непрерывные производные. Оказалось, что можно построить полную теорию потенциала, аналогичную той, что существует для одного эллиптического уравнения второго порядка, при минимальных (если решать краевую задачу в гельдеровом классе функций) предположениях о гладкости границы и граничных данных для второй краевой задачи. Напомним суть ситуации. Обозначим через D_i решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, через N_e – решение внешней задачи Неймана. Как известно, (см. например, [3]), интегральные уравнения этих задач составляют сопряженную по фредгольму пару. Именно такая пара уравнений построена в данной работе для второй краевой задачи теории упругости. При этом, как показано ниже, использование анизотропии материала существенно упрощает формальную, алгебраическую, сторону дела. Часть представленных ниже уравнений была опубликована в [4], однако та полнота анализа, что дана здесь, в ней отсутствует. Следует отметить, что попытка построения аналогичных уравнений была сделана в [5], однако корректные доказательства, например, доказательство фредгольмовости уравнений, построенных в [5], отсутствуют. Не доказана адекватность этих уравнений и краевой задачи.

1. Предварительные сведения. Для определенности будем считать, что рассматривается обобщенное плоское состояние. В дальнейшем в основном используются обозначения из [6]. Примем обобщенный закон Гука в виде:

$$\varepsilon_{11} = c_{11}\sigma_{11} + c_{12}\sigma_{22} + c_{16}\sigma_{12}$$
$$\varepsilon_{22} = c_{12}\sigma_{11} + c_{22}\sigma_{22} + c_{26}\sigma_{12}$$
$$2\varepsilon_{12} = c_{16}\sigma_{11} + c_{26}\sigma_{22} + c_{66}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \; (i, j = 1, 2)$$

Здесь ε_{ij}, – деформации, σ_{ij}, $(i, j = 1, 2)$ – напряжения, c_{ij}, $(i, j = 1, 2, 6)$ – податливости, $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ – перемещения.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \; (i, j = 1, 2)$$

Предполагается, что матрица податливостей положительно определена. При решении краевых задач плоской теории упругости обычно используется функция напряжений $u(x_1, x_2)$, уравнение для которой имеет вид:

$$c_{22}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 2c_{26}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2c_{12} + c_{66})\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2c_{16}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + c_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0$$

Это уравнение эллиптическое. С ним связано характеристическое уравнение

$$c_{11}\mu^4 - 2c_{16}\mu^3 + (2c_{12} + c_{66})\mu^2 - 2c_{26}\mu + c_{22} = 0$$

имеющее две пары комплексно сопряженных корней $\mu_1 = \beta_1 + i\gamma_1, \mu_2 = \beta_2 + i\gamma_2, \gamma_k > 0$, $k = (1, 2)$, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$. Общее решение уравнения для функции напряжений можно представить в виде:

$$u(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\{F_1(x_1 + \mu_1 x_2) + F_2(x_1 + \mu_2 x_2)\}$$

где $F_k(x_1 + \mu_k x_2)$, $(k = 1, 2)$ – аналитические функции усложненных комплексных переменных $z_k = x_1 + \mu_k x_2$, $(k = 1, 2)$. Отсюда для перемещений получим представление через аналитические функции (с точностью до жесткого перемещения):

$$u_1(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\{b_{11}\varphi_1(z_1) + b_{12}\varphi_2(z_2)\}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\{b_{21}\varphi_1(z_1) + b_{22}\varphi_2(z_2)\} \qquad (1.1)$$

$$b_{1k} = c_{11}\mu_k^2 + c_{12} - c_{16}\mu_k, \quad b_{2k} = c_{12}\mu_k + c_{22}\mu_k^{-1} - c_{26} \ (k = 1, 2)$$

Пусть Q – ограниченная односвязная область на плоскости с ляпуновской границей ∂Q длины $L > 0$. Это означает, что функции $x_k(s)$, $(k = 1, 2)$, задающие форму границы, непрерывны и непрерывно дифференцируемы, и при этом существует число α $(0 < \alpha < 1)$ такое, что $|x_k'(s) - x_k'(s_0)| < C|s - s_0|^\alpha$ $(k = 1, 2)$. Здесь s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки в направлении против часовой стрелки. Без ограничения общности можно предполагать, что начало координат лежит внутри области. Напомним (см. например, [7]), что гладкие замкнутые кривые Жордана имеют следующее важное свойство: для каждой кривой существует положительное число δ_0, такое, что окружность с центром в любой точке границы радиуса $\delta < \delta_0$ ровно два раза ее пересекает. Число δ_0 называют стандартным радиусом кривой. При этом дугу, высекаемую окружностью стандартного радиуса на кривой, называют стандартной дугой. Здесь и в дальнейшем под $C^{l,\alpha}(\partial Q)$ понимается банахово пространство функций, имеющих l непрерывных производных по s, причем производная порядка l удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$.

2. Формальный вывод уравнений. Рассмотрим краевую задачу: определить поле перемещений по граничным условиям

$$\mathrm{Re}\{b_{11}\varphi_1(z_1) + b_{12}\varphi_2(z_2)\} = g_1(s_0)$$

$$\mathrm{Re}\{b_{21}\varphi_1(z_1) + b_{22}\varphi_2(z_2)\} = g_2(s_0) \qquad (2.1)$$

$$g_k(s_0) \in C^{0,\alpha}(\partial Q) \ (k = 1, 2)$$

При этом поле перемещений должно иметь первые производные всюду в области Q, интегрируемые с квадратом в замкнутой области $\bar{Q}$. Будем искать аналитические функции $\varphi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) в виде интегралов типа Коши

$$\varphi_k(z_k) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{\omega_k(s)dt_k}{t_k - z_k}\ (k = 1, 2)$$
$$t_k = x_1(s) + \mu_k x_2(s)\ (k = 1, 2) \tag{2.2}$$

Пусть $f_k(s)$ ($k = 1, 2$) – набор из двух *вещественных* функций. Решим систему уравнений:

$$b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2 = f_1(s),\quad b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2 = f_2(s) \tag{2.3}$$

по правилу Крамера и подставим ее решение в (2.2). Тогда перемещения будут записаны в виде

$$u_1(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\left\{\frac{b_{11}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}\frac{(b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s))dt_1}{t_1 - z_1} + \frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}\frac{(-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s))dt_2}{t_2 - z_2}\right\}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\left\{\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}\frac{(b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s))dt_1}{t_1 - z_1} + \frac{b_{22}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}\frac{(-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s))dt_2}{t_2 - z_2}\right\}$$

где $\delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ – определитель системы (2.3). Он пропорционален разности $\mu_1 - \mu_2$ и потому его можно записать так: $\delta = \xi(\mu_1 - \mu_2)$. При этом ξ зависит только от симметрических функций от корней характеристического уравнения, и, как следствие, только от коэффициентов обобщенного закона Гука. В дальнейшем предполагается, что $\xi \neq 0$. В краевых задачах теории упругости он всегда отличен от нуля ввиду положительной определенности удельной потенциальной энергии деформации. Например, для ортотропного материала ($c_{16} = 0$, $c_{26} = 0$) он равен

$$\xi = (\gamma_1\gamma_2)^{-1}\left\{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)\sqrt{c_{22}c_{11}^{-1}} + c_{22}c_{66}\right\}$$

и всегда положителен, так как $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$, $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$, $c_{66} > 0$. При этом для изотропного материала $\xi = (1 + \nu)(3 - \nu)E^{-2}$, ($\nu$ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга).

Видно, что перемещения можно представить так

$$u_1(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_1(s)dt_1}{t_1 - z_1} + \mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}(-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s))\left(\frac{dt_2}{t_2 - z_2} - \frac{dt_1}{t_1 - z_1}\right)$$
$$u_2(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_2(s)dt_2}{t_2 - z_2} + \mathrm{Re}\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int_{\partial Q}(b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s))\left(\frac{dt_1}{t_1 - z_1} - \frac{dt_2}{t_2 - z_2}\right) \tag{2.4}$$

В силу формулы Сохоцкого, когда точка $z \in Q$ стремится к точке $t_0 = x(s_0) + iy(s_0) \in \partial Q$, $s_0 \in (0, L)$ изнутри области, то будем иметь

$$\lim_{z \to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{g_j dt_j}{t_j - z_j} = g_j(s_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{g_j dt_j}{t_j - t_{j0}}$$
$$t_{j0} = x_1(s_0) + \mu_j x_2(s_0)\ (j = 1, 2) \tag{2.5}$$

Если же точка $z \in Q$ стремится к точке $t_0 = x(s_0) + iy(s_0) \in \partial Q$, s_0 $(0, L)$ извне области, то

$$\lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{g_j dt_j}{t_j - z_j} = -g_j(s_0) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{g_j dt_j}{t_j - t_{j0}} \tag{2.6}$$

Заметим, что формула Сохоцкого применима, если $g_j(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$. Применив формулу (2.5), на границе получим систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} f_1(s_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_1(s)dt_1}{t_1 - t_{10}} + \\ + \mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} (-b_{21} f_1(s) + b_{11} f_2(s)) \left(\frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} - \frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} \right) = g_1(s_0) \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} f_2(s_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_2(s)dt_2}{t_2 - t_{20}} + \\ + \mathrm{Re}\frac{b_{21}}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} (b_{22} f_1(s) - b_{12} f_2(s)) \left(\frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} - \frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} \right) = g_2(s_0) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Как показано ниже, система уравнений (2.7), (2.8) – это система уравнений Фредгольма второго рода. Очевидно, что формулы (2.4) дают явное решение краевой задачи в полуплоскости $x_2 > 0$. Действительно, сразу видно, что при этом $u_k(x_1, +0) = f_k(x_1)$ $(k = 1, 2)$.

Нетрудно построить систему уравнений, сопряженную к системе уравнений (2.7), (2.8). Действительно, запишем систему уравнений (2.7), (2.8) в виде:

$$f_1(s_0) + K_{11}(s, s_0) f_1 + K_{12}(s, s_0) f_2 = g_1(s_0)$$

$$f_2(s_0) + K_{21}(s, s_0) f_1 + K_{22}(s, s_0) f_2 = g_2(s_0)$$

Здесь K_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – интегральные операторы, действующие на функции $f_i (i = 1, 2)$. Введем две вещественные функции $m_k(s)$ $(k = 1, 2)$. Тогда сопряженная система уравнений запишется так:

$$m_1(s_0) + K_{11}(s_0, s) m_1 + K_{21}(s_0, s) m_2 = h_1(s_0)$$

$$m_2(s_0) + K_{12}(s_0, s) m_1 + K_{22}(s_0, s) m_2 = h_2(s_0)$$

Т.е., чтобы построить сопряженную систему, необходимо транспонировать матрицу, составленную из интегральных операторов и поменять местами аргументы s, s_0. Отметим, что рассматривается система вещественных уравнений. Проделав эту операцию, получим сопряженную систему. Сопряженную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{gathered} m_1(s_0) + \mathrm{Re}\frac{t_1'(s_0)}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{m_1(s)ds}{t_{10} - t_1} + \\ + \mathrm{Re}\frac{b_{21}}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} (b_{12} m_1 + b_{22} m_2) \left(\frac{t_1'(s_0)ds}{t_{10} - t_1} - \frac{t_2'(s_0)ds}{t_{20} - t_2} \right) = h_1(s_0) \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$m_2(s_0) + \mathrm{Re}\frac{t_2'(s_0)}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{m_2(s)ds}{t_{20}-t_2} +$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}(b_{11}m_1 + b_{21}m_2)\left(\frac{t_2'(s_0)ds}{t_{20}-t_2} - \frac{t_1'(s_0)ds}{t_{10}-t_1}\right) = h_2(s_0) \tag{2.10}$$

С системой уравнений (2.9), (2.10) связаны функции $\upsilon_k(x_1, x_2)$ $(k = 1, 2)$, определяемые следующим образом:

$$\upsilon_1(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} m_1(s)\ln(z_1 - t_1)ds +$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}(b_{12}m_1 + b_{22}m_2)(\ln(z_1 - t_1) - \ln(z_2 - t_2))ds \tag{2.11}$$

$$\upsilon_2(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} m_2(s)\ln(z_2 - t_2)ds +$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}(b_{11}m_1 + b_{21}m_2)(\ln(z_2 - t_2) - \ln(z_1 - t_1))ds \tag{2.12}$$

Можно проверить, что при этом

$$\left.\frac{\partial\upsilon_k}{\partial s_0}\right|_{\partial Q} = h_k(s_0) \ (k = 1, 2) \tag{2.13}$$

если при этом рассматривать предельный переход при стремлении к границе из внешней области Q_e. Поэтому вектор $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$ можно назвать потенциалом двойного слоя, а вектор $\mathbf{V} = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ – потенциалом простого слоя по аналогии с уравнением Лапласа. Необходимо, однако, отметить, что, в отличие от потенциала двойного слоя $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$ потенциал $\mathbf{V} = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ многозначен ввиду многозначности функции $\ln z$. Фиксируем, например, главную ветвь функции $\ln z$. Можно показать, что для однозначности $\mathbf{V} = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ необходимо, чтобы плотности $m_k(s)$ $(k = 1, 2)$ подчинялись условию

$$\int\limits_{\partial Q} m_k(s)ds = 0 \ (k = 1, 2) \tag{2.14}$$

Действительно, представим $m_k(s)$ в виде производных:

$$m_k(s) = d\mu_k/ds \ (k = 1, 2)$$

и подставим в (2.11), (2.12), проведя при этом интегрирование по частям. Получим для типичного интеграла выражение:

$$\int\limits_{\partial Q}\frac{d\mu_k}{ds}\ln(z_k - t_k)ds = \mu_k(s)\ln(z_k - t_k)\big|_{\partial Q} - \int\limits_{\partial Q}\frac{\mu_k dt_k}{t_k - z_k} \ (k = 1, 2) \tag{2.15}$$

При полном обходе границы функция $\ln(z_k - t_k)$ приобретет приращение $2\pi i$, а последний интеграл в (2.15) – это однозначный интеграл типа Коши. Отсюда следует необходимость выполнения условия (2.14).

Рассмотрим далее предельный переход к изотропному материалу. Действительно, для изотропного материала два корня характеристического уравнения μ_1, μ_2 сливаются в один: $\mu = i$. Благодаря наличию множителя $\mu_1 - \mu_2$ у числа δ разность

$$\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)}\left(\frac{dt_2}{t_2-z_2}-\frac{dt_1}{t_1-z_1}\right)$$

стремится в пределе к разности

$$\frac{x_1'(s)(x_2(s)-x_2)-x_2'(s)(x_1(s)-x_1)}{(t-z)^2}$$

и потому для вектора перемещений получим соотношения:

$$u_1^0 = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_1(s)dt}{t-z}-$$

$$-\mathrm{Re}\frac{i}{\pi i}\frac{1+\nu}{3-\nu}\int_{\partial Q}(f_1+if_2)\frac{x_1'(s)(x_2(s)-x_2)-x_2'(s)(x_1(s)-x_1)}{(t-z)^2}ds$$

$$u_2^0 = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_2(s)dt}{t-z}-$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\frac{1+\nu}{3-\nu}\int_{\partial Q}(f_1+if_2)\frac{x_1'(s)(x_2(s)-x_2)-x_2'(s)(x_1(s)-x_1)}{(t-z)^2}ds$$

Аналогично для v_1, v_2 имеем

$$v_1^0 = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}m_1(s)\ln(z-t)ds+\mathrm{Re}\frac{i}{\pi i}\frac{1+\nu}{3-\nu}\int_{\partial Q}(m_1+im_2)\frac{x_2-x_2(s)}{z-t}ds$$

$$v_2^0 = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}m_2(s)\ln(z-t)ds+\mathrm{Re}\frac{i}{\pi i}\frac{1+\nu}{3-\nu}\int_{\partial Q}(m_1+im_2)\frac{x_2-x_2(s)}{z-t}ds$$

где нуль вверху означает поле перемещений для изотропного материала.

3. Исследование интегральных уравнений. Рассмотрим вопрос о существовании решения системы уравнений (2.8), (2.9) и исследуем его дифференциальные свойства. Покажем, что все интегралы, входящие в (2.4), имеют, самое большее, слабую особенность при ляпуновской границе. Рассмотрим сначала какой-либо из интегралов

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_k(s)dt_k}{t_k-z_k}\quad(k=1,2)\tag{3.1}$$

Имеем $z_k = x_1 + \mu_k x_2 = x_1 + (\gamma_k + i\beta_k)x_2$. Если ввести новые независимые переменные $x = x_1 + \gamma_k x_2$, $y = \beta_k x_2$ (напомним, что $\beta_k > 0$), то его можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f_k(s)dt}{t-z}\quad(k=1,2),\quad z = x+iy,\quad t = x(s)+iy(s)$$

Тогда его действительная часть $N(x, y)$ (см. [7]) представляется в виде

$$N(x,y) = -\mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q} f_k(s)\frac{\partial \ln r}{\partial n}ds, \quad r = \sqrt{(x-x(s))^2+(y-y(s))^2} \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что $N(x, y)$ с точностью до множителя – это потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа на плоскости. В [7], (стр. 47) показано, что в области с ляпуновской границей интеграл (3.2) – это интеграл со слабой особенностью. К сожалению, прямое непосредственное доказательство этого факта в [7] отсутствует. Ниже дано это доказательство.

Ядро $m(s, s_0)$ действительной части интеграла (3.1) можно записать так:

$$m(s,s_0) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\frac{t_k'(s)}{t_k(s)-t_k(s_0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\beta(-x_1'(s)(x_2(s)-x_2(s_0))+x_2'(s)(x_1(s)-x_1(s_0)))}{[x_1(s)-x_1(s_0)+\gamma(x_2(s)-x_2(s_0))]^2+\beta^2(x_2(s)-x_2(s_0))^2}$$

Покажем, что при любых γ, $\beta > 0$,если $x_1(s), x_2(s) \in C^{1,\alpha}(0, L)$, функция $m(s, s_0)$ допускает оценку $|m(s, s_0)| \le C|s-s_0|^{\alpha-1}$. Положим

$$\nu(s,s_0) = -x_1'(s)(x_2(s)-x_2(s_0))+x_2'(s)(x_1(s)-x_1(s_0))$$

Видно, что

$$\nu(s,s_0) = x_2'(s)\int\limits_{s_0}^{s}(x_1'(t)-x_1'(s_0))dt - x_1'(s)\int\limits_{s_0}^{s}(x_2'(t)-x_2'(s_0))dt +$$

$$+(x_1'(s_0)-x_1'(s))x_2'(s_0)(s-s_0)+(x_2'(s)-x_2'(s_0))x_1'(s_0)(s-s_0)$$

Так как

$$|x_k'(t)-x_k'(s_0)| \le c|t-s_0|^{\alpha} \quad (k=1,2)$$

то отсюда следует, что $|\nu(s, s_0)| \le c|s-s_0|^{\alpha+1}$. Оценим теперь знаменатель функции $m(s, s_0)$. Положим $\psi(s) = x_1(s) + (\gamma + i\beta)x_2(s)$:

$$\chi(s) = \frac{|\psi(s)-\psi(s_0)|}{|s-s_0|} \; (s \ne s_0), \quad \chi(s) = |\psi'(s_0)| \; (s = s_0)$$

Функция $\chi(s)$ непрерывна на сегменте $[0, L]$ и принимает на нем в некоторых точках свое наименьшее значение q (которое зависит от s_0). Предположение, что $q = 0$ влечет вывод о том, что существует хотя бы одна точка s_1, в которой $\chi(s_1) = 0$. Но тогда либо $\psi(s_1) = \psi(s_0)$ $(s_1 \ne s_0)$, а это противоречит тому, что кривая является жордановой, либо $|\psi'(s_1)| = 0$, что несовместимо с гладкостью границы. Следовательно, $q > 0$ и потому $|\psi(s) - \psi(s_0)| \ge q|s-s_0|$. В результате для функции $m(s, s_0)$ получим оценку

$$|m(s,s_0)| \le c\frac{|s-s_0|^{\alpha+1}}{q^2|s-s_0|^2},$$

что и означает наличие у рассматриваемого интеграла слабой особенности. Отсюда немедленно следует, что если функция $g_k(s)$ непрерывна в окрестности точки $t_k(s_0)$, то имеет место оценка

$$\left|\int_{\zeta_1\zeta_2} g_k(s)\frac{dt_k}{t_k(s)-t_k(s_0)}\right| \le \frac{A}{q^{1-\alpha}}\int_{\zeta_1\zeta_2}\frac{ds}{|s-s_0|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{A}{q^{1-\alpha}}\left[\int_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{(s_0-s)^{1-\alpha}}+\int_{s_0}^{s_2}\frac{ds}{(s-s_0)^{1-\alpha}}\right] =$$

$$= \frac{A}{\alpha q^{1-\alpha}}[(s_2-s_0)^{\alpha}+(s_0-s_1)^{\alpha}] \le \frac{A}{\alpha q^{1-\alpha}}2^{1-\alpha}|s_2-s_1|^{\alpha}$$

Здесь $t_1 = t_k(s_1)$, $t_2 = t_k(s_2)$, $s_1 < s_0 < s_2$ –две точки на границе, настолько близкие к точке $t_k(s_0)$, что дуги $\zeta_1\zeta_0$, $\zeta_1\zeta_2$, соединяющие точки t_1, $t_k(s_0)$, $t_k(s_0)$, t_2 принадлежат стандартному кругу, A – максимум функции $g_k(s)$ на рассматриваемой дуге. По предыдущему на дуге $\zeta_1\zeta_2$ выполняется неравенство $q|s-s_0| \le |t_k(s)-t_k(s_0)|$, и потому имеет место предыдущая цепочка неравенств.

Рассмотрим оставшиеся разности интегралов типа Коши. Типичную разность интегралов типа Коши $S_{n,k}(s, s_0)$, входящую в формулы (2.7), (2.8), можно записать в виде

$$S_{n,k}(s,s_0) = \frac{1}{\pi i\delta}\int_{\partial Q} g_k(s)\frac{d}{ds}\ln\frac{t_n-t_{0n}}{t_k-t_{0k}}ds$$

Положим

$$U_{n,k}(s,s_0) = \frac{d}{ds}\ln\frac{t_n-t_{0n}}{t_k-t_{0k}}$$

В этом случае имеет место следующая лемма.

Лемма. Если $\partial Q \in C^{1,\alpha}(0, M)$, то функция $U_{n,k}(s, s_0)$ допускает оценку

$$|U_{n,k}(s,s_0)| \le C|s-s_0|^{\alpha},\ 0<\alpha<1$$

Действительно, положим

$$p(s,s_0) = \frac{(x(s)-x(s_0))^2+(y(s)-y(s_0))^2}{(t_n(s)-t_n(s_0))(t_k(s)-t_k(s_0))}$$

$$q(s,s_0) = \frac{x'(s)(y(s)-y(s_0))^2-y'(s)(x(s)-x(s_0))}{(x(s)-x(s_0))^2+(y(s)-y(s_0))^2}$$

Тогда функцию $U_{n,k}(s, s_0)$ можно записать в виде произведения

$$U_{n,k}(s,s_0) = (\lambda_k-\lambda_n)p(s,s_0)q(s,s_0)$$

По доказанному выше, $q(s, s_0)$ допускает оценку $|q(s, s_0)| \le C_1|s-s_0|^{\alpha-1}$. Функция $p(s, s_0)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема, при этом $\lim_{s\to s_0} p(s, s_0) = (t_n'(s_0)t_k(s_0))^{-1}$

и всюду на границе отличен от нуля. Поэтому $p(s, s_0)$ удовлетворяет условию Липшица: $|p(s, s_0)| \le C_2|s - s_0|$. Но тогда функция $U_{n,k}(s, s_0) \in C^{0,\alpha}(0, L)$.

Таким образом, при ляпуновской границе все интегралы, входящие в (2.4), имеют, самое большее, слабую особенность. Видно, что если граница принадлежит классу $C^2(0, L)$, то функции $U_{n,k}(s, s_0)$ непрерывны. Таким образом, система уравнений (2.7), (2.8) действительно является системой уравнений Фредгольма второго рода. Как следствие, и сопряженная система уравнений (2.9), (2.10) тоже фредгольмова. Однако из предыдущих рассуждений еще не следует, что система уравнений (2.7), (2.8) имеет единственное решение, так как при этом напряжения (а это первые производные от перемещений) могут не принадлежать классу $L^2(\overline{Q})$.

Рассмотрим представление (2.4). Как следует из предыдущего, если существует решение системы уравнений (2.7), (2.8),то u_k $(k = 1, 2) \in C^{0,\alpha}(\overline{Q})$; для того, чтобы u_k $(k = 1, 2) \in C^{1,\alpha}(\overline{Q})$ по теореме 1.10 из [8] следует повысить гладкость границы и граничных данных и потребовать, чтобы $g_k \in C^{1,\alpha}(\overline{Q})$, $\partial Q \in C^{2,\alpha}$. С другой стороны, все интегралы, входящие в (2.7), (2.8) – это интегралы типа Коши; обозначим типичный интеграл, входящий в (2.7), (2.8) через $\Phi(z_j)$, $(j = 1, 2)$. Как известно, (см. [8], теорема 1.11), если функция $\Phi(z_j)$ представима в виде интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{f(t)dt}{t-z}, \quad f(t) \in C^{0,\alpha}(\partial Q), \quad 0 < \alpha < 1$$

то $\Phi(z_j) \in C^{0,\alpha}(\overline{Q})$ и ее производная по z_j допускает оценку:

$$|\Phi'(z_j)| \le C(f)d_P^{\alpha-1}$$

При этом отсюда следует, что $\Phi'(z_j) \in L^p(\overline{Q})$ для любого p, удовлетворяющего неравенству

$$1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$$

причем

$$\|\Phi'(z_j)\|_p \le C_1(f, \partial Q)$$

где $\|\ldots\|_p$ – норма в $L^p(\overline{Q})$. В частности, при $1/2 < \alpha < 1$ число p можно выбрать большим или равным двум. Так как любая производная функции $u_k(x, y)$ представима в виде сумм производных интегралов типа Коши с плотностью класса $C^{0,\alpha}(\partial Q)$, то отсюда следует требуемая оценка для первых производных. Как известно [8], если $\alpha > 1/2$, это влечет интегрируемость с квадратом любой частной производной первого порядка во всей плоскости. Так как система уравнений теории упругости – равномерно эллиптическая, то задача Дирихле имеет единственное решение. Это влечет единственность решения системы уравнений (2.7), (2.8). На систему уравнений теории упругости можно смотреть как на систему уравнений Эйлера для квадратичного функционала

$$J(u) = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{m} b_{i,j}\frac{\partial u_j}{\partial x_s}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dxdy$$

При этом $J(u)$ удовлетворяет оценке

$$J(u) \ge C\int\limits_{Q}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)^2\right)dxdy, \quad C>0$$

если $\alpha > 1/2$, ввиду указанной выше оценки для $\Phi'(z_j)$. Отсюда следует справедливость сформулированной ниже теоремы.

Теорема. Предположим, что

$$g_k(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q), \quad \partial Q \in C^{1,\alpha}(0, L)\ (k = 1, 2), \quad \alpha > 1/2$$

Тогда существует единственное решение второй краевой задачи теории упругости, представимое в виде (2.4), и при этом

$$u_k(x, y) \in C^{0,\alpha}(\partial Q) \cap H^1(Q)\ (k = 1, 2)$$

Если при этом

$$g_k(s) \in C^{1,\alpha}(\partial Q)\ (k = 1, 2, \ldots, m), \quad \partial Q \in C^{2,\alpha}(0, L)$$

то тогда вектор – функция

$$u = (u_1, u_2) \in C^{2,\alpha}(\partial Q)$$

при любом показателе Гельдера α, где $H^1(Q)$ – стандартное соболевское пространство функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лопатинский Я.Б.* Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости // Теорет. и прикл. мат. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1958. № 1, С. 22–27.
2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз., 1961. 400 с.
3. *Шерман Д.И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях // Докл. АН. СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 911–913.
4. *Боган Ю.А.* Об интегральных уравнениях Фредгольма в двумерной анизотропной теории упругости // Сиб. ж. вычисл. мат. 2001. Т. 4. № 1. С. 21–30.
5. *Башелейшвили М.О.* Решение плоских граничных задач статики анизотропного упругого тела // Тр. ВЦ АН ГССР. 1963. Т. 3. С. 93–139.
6. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.; Л. Гостехиздат, 1947. 364 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М: Наука, 1968. 511 с.
8. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.07.2003