

## **ДИНАМИКА МОСТОВЫХ И ПУТЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ**

Рассматриваются вертикальные колебания мостовой конструкции при движении группы вагонов по балке большой протяженности, опирающейся через дискретные, упруговязкие, инерционные опоры на пролетные строения моста и на участки насыпи, жесткие в предмостовой зоне. При решении задачи о действии на балку простейшей подвижной нагрузки в виде движущегося груза находят применение два основных метода решения этой задачи, они же реализуются и для других конструкций и нагрузок. В первом случае используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1–3]. Во втором случае, после расчленения системы “балка – груз”, как и в задаче с ударом груза о балку [4], действие сводится к решению интегрального уравнения относительно динамической реакции груза [5, 6]. В [1–3] увеличение числа удерживаемых форм приводит к увеличению порядка системы уравнений, в [5, 6] возникают трудности при решении интегральных уравнений, связанные с условной устойчивостью шаговых процедур. Предложенный в [7, 8] для балок и стержневых систем метод объединяет между собой указанные подходы и ликвидирует указанные у них недостатки, так как доступно учитывает любое необходимое число форм в разложении прогиба, и имеет разрешающую систему уравнений при безусловно устойчивой схеме интегрирования с минимальным числом неизвестных, как и в методе интегральных уравнений [5, 6]. Этот метод далее развивается для комбинированных систем, моделирующих дискретную модель железнодорожного пути, подвижной состав и мосты. Вопросы развития методов расчета непрерывных и дискретных моделей железнодорожного пути, исследование совместных вибраций пути и искусственных сооружений и подвижной нагрузкой остаются актуальными в настоящее время, особенно в связи повышением скорости движения подвижного состава [9–14, 17].

Предлагается решение указанной задачи с использованием специализированных, балочных граничных элементов в виде системы, состоящей из двух параллельных балок большой протяженности, связанных набором вертикальных, нелинейных связей, моделирующих работу шпал, прокладок и балластного слоя на насыпи и на пролетном строении моста. Верхняя балка в этом случае моделирует рельс, нижняя – пролетное строение моста. Удаление нижней балки из этой системы, с наложением ограничений на перемещения промежуточных связей, приводит к элементу, моделирующему путь вне моста. Граничные элементы, стыкующиеся по длине, моделируют работу рельсового пути на мосту и вне моста.

Указанные элементы включаются в состав предложенных ранее граничных элементов [8, 15], позволяя исследовать неустановившиеся колебания в системе “состав – путь – мост” (СПМ), при учете различных неоднороднос-

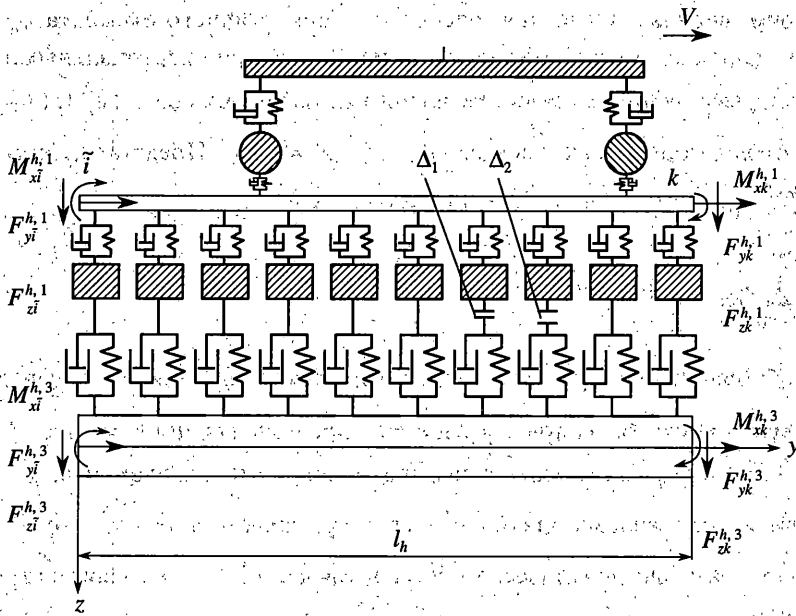
тей у рельсового пути. Достигается высокая степень пространственной дискретизации, при исследовании колебаний рельсового пути и стержневой системы, моделирующей мост, путем привлечения к расчету стержней с распределенными параметрами, при аппроксимации смещений линейными функциями и тригонометрическими рядами Фурье, что, как отмечалось, позволяет увеличивать число степеней свободы у рассматриваемой системы, сохраняя неизменным порядок разрешающей системы уравнений.

При решении указанной задачи используется шаговая процедура по времени и метод учета подвижной нагрузки, предложенные, соответственно, в [15, 7]. Указанный подход позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние системы СПМ при учете неровностей на рельсах или просадок под шпалами. При этом, предлагаемая числовая процедура, позволяет единообразно решать линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие работу модели, заменяющей систему из шпал, расположенных на балластном слое, с прокладками между ними и рельсами. Предлагаемый подход позволяет максимально сократить число неизвестных в разрешающей системе уравнений на каждом шаге ее решения, ограничиваясь только узловыми ускорениями в местах стыковки граничных элементов и вертикальными ускорениями подвижных узлов (в точках контакта колес с рельсами): В предшествующих исследованиях указанной проблемы, авторы ограничивались либо бесконечными балками на дискретных опорах, при достаточно простых нагрузках [12], либо балками конечной длины, моделирующими путь, в нелинейной постановке, но с упрощенной подвижной нагрузкой [11], либо исследованием колебаний, в линейной постановке, балочных мостов с применением традиционного метода конечных элементов, т.е. при степенной аппроксимации смещений несущих конструкций СПМ [13]. Предлагаемый метод решения задачи, используя тригонометрическую аппроксимацию смещений в балке – рельсе, расширяет возможности задачи в конечноэлементной постановке, позволяя исследовать динамические реакции в системе СПМ при различных ее возмущениях, включая короткие неровности и просадки пути.

1. Рассмотрим комбинированную стержневую систему, моделирующую мост, путь (на мосту и вне моста) и движущуюся нагрузку в виде железнодорожного состава. Используем для решения задачи метод декомпозиции. Первоначально расчленим систему “состав – путь – мост” на две части: подвижную нагрузку и несущую конструкцию. Будем считать, что система, моделирующая “путь – мост”, состоит из трех подсистем, в том числе: подсистемы  $\{\tilde{e}_h\}$  ( $h = 1, \dots, \tilde{m}$ ), каждый элемент которой (на фиг. 1 элемент обозначается, как E2) после расчленения, включает элементы  $\{\tilde{e}_h^X\}$ ,  $X = 1, 2, 3$ , соответствующие (при  $X = 1$ ) рельсу, (при  $X = 3$ ) – несущей балке проезжей части (при  $X = 2$ ) – набору вертикальных упруговязких связей между рельсом и балкой; подсистемы  $\{\tilde{e}_h^*\}$  ( $h = 1, \dots, \tilde{m}^*$ ), моделирующей путь вне моста (на фиг. 1 элемент обозначается, как E1); подсистемы  $\{e_h\}$  ( $h = 1, \dots, \tilde{m}_b$ ), моделирующей мост стержневыми граничными элементами (на фиг. 1 элемент обозначается, как E3). Будем далее, при необходимости, обозначать характеристики, соответствующие элементам  $\{\tilde{e}_h^X\}$  ( $X = 1, 2, 3$ ), с верхним индексом  $X$ .

Продолжая исследования [8], будем считать, что стержневая система состоит из  $m = \tilde{m} + \tilde{m}^* + \tilde{m}_b$  стержней и имеет  $n$  узлов. Введем правую глобальную систему координат  $oxuz$ . Введем для каждого стержня правые местные системы координат





Фиг. 2

$\vec{q}^o = [q^{oh}]$  и  $\vec{R} = [\vec{R}^h]$  – векторы вертикальных смещений движущихся узлов системы  $\vec{e}_h^*$ ,  $\vec{e}_h$  и, соответственно, вектор динамических добавок к статическим давлениям колесных пар, действующих на  $\vec{e}_h^*$  и  $\vec{e}_h$ ;  $\mathbf{R}^X = [R_{k_1}^{h,X}]$  ( $k_1 = 1, \dots, n_{h2}$ ) – векторы столбцы динамических реакций в вертикальных упруговязких связях для  $\vec{e}_h^*$  и  $\vec{e}_h$  после их расчленения.

Рассмотрим векторы – столбцы с компонентами в основной системе координат при нумерации узлов  $\vec{j} = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{q} = [q_j]$  – вектор узловых перемещений;  $\mathbf{q}_S = [q_{Sj}]$  – вектор заданных узловых перемещений [8, 16]. Будем полагать  $q_i^{h,X}$ ,  $q_k^{h,X}$ ,  $q_{ri}^{h,X}$ ,  $q_{rk}^{h,X}$ ,  $q_{ei}^{h,X}$ ,  $q_{ek}^{h,X}$ ,  $q_j$ ,  $f_i^{h,X}$ ,  $f_k^{h,X}$ ,  $q_{Sj}$  – векторами с тремя составляющими, например  $q_i^{h,X} = [q_{in}^{h,X}]$ ,  $f_i^{h,X} = [f_{in}^{h,X}]$  при  $\tilde{n} = 1, 2, 3$ , первые две компоненты, в порядке возрастания  $\tilde{n}$ , означают величины узловых смещений или, соответственно, узловых сил, направленных вдоль осей  $y, z$  (фиг. 2), аналогично и в основной системе координат, а третья компонента – величина угла поворота узла или, соответственно, узлового момента относительно оси  $x$ . Рассмотрим  $q^{oh}$ ,  $q_e^{oh}$ ,  $\mathbf{q}_r$ ,  $\mathbf{q}^{Sh,X}$ ,  $\mathbf{q}_e^{Sh,X}$ ,  $\mathbf{q}_r^{Sh,X}$  ( $X = 1, 3$ ) – векторы столбцы, соответственно, абсолютных, переносных и относительных смещений движущихся и промежуточных узлов балки – рельса и продольных балок над и под шпалами. При учете затуханий по Фойгту для случая изгибных колебаний динамическая модель  $\{\vec{e}_h, \vec{e}_h^*, e_h\}$  в относительном движении выбирается в виде шарнирно-опертой балки Эйлера, для продольных относительных колебаний выбирается модель стержня с одним заделанным (в узле  $i$ ) и другим свободным концами.

Рассмотрим, первоначально, построение комбинированного элемента  $\tilde{e}_h$ , состоящего из двух параллельных стержней, соединенных набором вертикальных линейных и нелинейных, вязкоупругих связей. Расчленим  $\tilde{e}_h$  на три элемента  $\{\tilde{e}_h^X\}$ ,  $(X = 1, 2, 3)$ .

2. Рассмотрим стержневые элементы  $\{\tilde{e}_h^X\}$ ,  $(X = 1, 3)$ . Представим компоненты вектора  $\tilde{q}_r^{h,X}$  при  $\tilde{k} = 1, 2$  (плоские элементы) в виде

$$\tilde{q}_{rk}^{h,X} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_{rki}^{h,X} w_{ki}(\eta_1), \quad \eta_1 = \frac{\tilde{y}_{1h}}{l_h} \quad (2.1)$$

где  $\tilde{q}_{rki}^{h,X}$  – обобщенные координаты (подвектор вектора  $\tilde{q}_r^{h,X}$ );  $w_{ki}(\eta_1) = \sin r_i \eta_1$  – собственные функции изгибных при  $\tilde{k} = 2$  и  $r_i = \pi i$ , продольных при  $\tilde{k} = 1$  и  $r_i = (2i - 1)\pi/2$  колебаний  $\{\tilde{e}_h^*\}$  и  $\{\tilde{e}_h\}$  в относительном движении;  $l_h$  – длина элемента.

Применим общее уравнение динамики при варьировании векторов  $\tilde{q}_e^{h,X}$ ,  $\tilde{q}_r^{h,X}$   $(X = 1, 3)$ . В итоге имеем уравнения динамического равновесия для  $\tilde{e}_h^X$  в переносном и относительном движениях

$$\begin{aligned} (H^{h,X})' f^{h,X} - M^{h,X} \ddot{H}^{h,X} \dot{q}^{h,X} - \int_0^1 \tilde{M}^{h,X} \tilde{q}_r^{h,X} d\eta = \\ = \begin{cases} \Pi_1(\tilde{R}^h + \tilde{P}_1) + \Pi_2^X R^{h,X} & \text{при } \tilde{k} = 2 \quad (X = 1) \\ \Pi_2^X R^{h,X} & \text{при } \tilde{k} = 1, 2 \quad (X = 3) \text{ и } \tilde{k} = 1 \quad (X = 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{rki}^{h,X} + \mu_{ki}^{h,X} \omega_{hki}^2 \tilde{q}_{rki}^{h,X} + \omega_{hki}^2 \tilde{q}_{rki}^{h,X} = \tilde{\eta}_{ki}^{h,X} f^{h,X} + \tilde{\eta}_{ki}^{h,X} \dot{q}^{h,X} + \int_0^1 \tilde{\eta}_{ki}^{h,X} R^{h,X} d\eta + \\ + \begin{cases} \int_0^1 \tilde{\eta}_{ki}^{h,X} (\tilde{R}^h + P_1^h) d\eta & \text{при } \tilde{k} = 2 \quad (X = 1, i = 1, 2, \dots, \infty) \\ 0 & \text{при } \tilde{k} = 1, 2 \quad (X = 3) \text{ и } \tilde{k} = 1 \quad (X = 1, i = 1, 2, \dots, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\omega_{hki} = (r_i^2/l_h^2) \sqrt{E_h^X J_{kh}^X / m_h^X} \quad \text{при } \tilde{k} = 2$$

$$\omega_{hki} = (r_i/l_h) \sqrt{E_h^X / \rho_h^X} \quad \text{при } \tilde{k} = 1$$

где  $H^{h,X}$ ,  $\tilde{H}^{h,X}$  – матрицы преобразования векторов  $q_e^{h,X} = H^{h,X} \tilde{q}_e^{h,X}$ ,  $\tilde{q}_e^{h,X} = \tilde{H}^{h,X} q_e^{h,X}$ ;  $M^{h,X}$  – диагональная матрица масс и моментов инерции, относительно главных и центральных осей  $\tilde{e}_h^X$ , если в качестве компонент вектора  $\tilde{q}_h^{h,X}$  выбрать смещение центра жесткого  $\tilde{e}_h^X$  вдоль этих осей и поворот вокруг оси  $\tilde{O}_h \tilde{x}_h$ ; матрицы  $\Pi_1$ ,  $\tilde{M}^{h,X}$  –

отражают действие на  $\tilde{e}_h^X$ , соответственно, давление колесных пар и относительных сил инерции;  $\mu_{ki}^h$  – коэффициенты, учитывающие вязкость;  $\omega_{hki}$  – круговая частота соответствующего вида колебаний  $\tilde{e}_h^X$  в относительном движении;  $E_h^X$  – модули упругости материалов;  $J_{kh}^X$  – момент инерции сечения;  $m_h^X$  – погонная масса;  $\rho_h^X$  – масса единицы объема;  $\bar{\eta}_{ki}^{h,X}$ ,  $\tilde{\eta}_{ki}^{h,X}$ ,  $\approx\eta_{ki}^{h,X}$ ,  $\bar{\bar{\eta}}_{ki}^{h,X}$  – матрицы, отражающие, соответственно: действие на элемент  $\tilde{e}_h^X$  при  $\tilde{k} = 2$  внешней нагрузки  $R^{h,X}$  от реакций элементов, моделирующих шпалы с прокладками; сосредоточенных моментов  $f_{i\tilde{n}}^h$ ,  $f_{k\tilde{n}}^h$  ( $\tilde{n} = 3$ ); переносного поля сил инерции, выраженного через  $\dot{q}_{i\tilde{n}}^{h,X}$ ,  $\dot{q}_{k\tilde{n}}^{h,X}$  ( $\tilde{n} = 2$ ) (при  $\tilde{k} = 2$ ); вертикальных давлений колесных пар (при  $\tilde{k} = 1$ , влияния продольной силы  $f_{k\tilde{n}}^{h,X}$  ( $\tilde{n} = 1$ ) и переносного поля сил инерции, выраженного через  $\dot{q}_{i\tilde{n}}^{h,X}$  ( $\tilde{n} = 1$ )).

Выражения (2.3) могут быть получены, если использовать (2.1) и ортогональность собственных функций в (2.1) при разложении по ним в ряд правых частей дифференциальных уравнений изгибных (продольных) колебаний шарнирно опертой (заделанной одним концом) балок, при использовании дельта-функции Дирака или ее производной для выражения действия сосредоточенных сил и концевых моментов [8, 15]:

Уравнения  $q^h = q_e^h + q_r^h$ , обеспечивающие неразрывность линейных и угловых перемещений в неподвижных узлах системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h\}$ , в том числе и для  $\tilde{e}_h^X$ , имеют вид

$$(E - H^{h,X} \tilde{H}^{h,X}) q^{h,X} = \Pi^{h,X} q_{r,g}^{h,X} \quad (X = 1, 3) \tag{2.4}$$

$$q_{r,g}^{h,X} = [\approx\tilde{q}_r^{h,X}(0, t), \partial\approx\tilde{q}_r^{h,X}(0, t)/\partial\eta_1, \approx\tilde{q}_r^{h,X}(1, t), \partial\approx\tilde{q}_r^{h,X}(1, t)/\partial\eta_1]'$$

В (2.4) вектор  $\approx\tilde{q}_r^{h,X}(\eta_1, t)$  имеет компонентами только те и в том же порядке компоненты вектора  $\approx\tilde{q}_r^{h,X}(\eta_1, t)/l_h$ , которые являются поперечными смещениями  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h\}$  в системе  $\tilde{O}_1 h \tilde{x}_1 h \tilde{y}_1 h \tilde{z}_1 h$ ;  $\Pi^{h,X}$  – матрица преобразования  $q_{r,g}^{h,X}$  в  $q_r^{h,X}$ .

Аналогичные выражения можно записать для движущихся узлов подсистемы  $\{\tilde{e}_h^X\}$  ( $X = 1$ ). Объединим уравнения (2.2)–(2.4), ограничив в (2.3) число уравнений до  $N$ . Проведем дискретизацию по времени полученной системы уравнений. Используем безусловно устойчивую шаговую процедуру по времени, из [15] для  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1, 3$ ), записав на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , уравнение (2.2) для момента времени  $t_{j+1/2}$ , а для (2.3), (2.4) для момента времени  $t_{j+1}$  и используя соотношения

$$q_{j+1}^{oh} = q_{ej+1}^{oh} + q_{rj+1}^{oh} \quad \text{для } \tilde{e}_h^X \quad (X = 1) \tag{2.5}$$

$$q_{j+1}^{Sh,X} = q_{ej+1}^{Sh,X} + q_{rj+1}^{Sh,X} \quad \text{для } \tilde{e}_h^X \quad (X = 1, 3) \tag{2.6}$$

$$q_{j+1}^{h,X} = q_j^{h,X} + \dot{q}_j^{h,X} \Delta t_j + \dot{q}_{j+1/2}^{h,X} \Delta t_j^2/2, \quad \dot{q}_{j+1}^{h,X} = \dot{q}_j^{h,X} + \dot{q}_{j+1/2}^{h,X} \Delta t_j \tag{2.7}$$

$$q_{j+1}^{Sh, X} = q_j^{Sh, X} + \dot{q}_j^{Sh, X} \Delta t_j + \ddot{q}_{j+1/2}^{Sh, X} \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{q}_{j+1}^{Sh, X} = \dot{q}_j^{Sh, X} + \ddot{q}_{j+1/2}^{Sh, X} \Delta t_j \quad (2.8)$$

$$\tilde{q}_{rj+1}^{h, X} = \tilde{q}_{rj}^{h, X} + \dot{\tilde{q}}_{rj}^{h, X} \Delta t_j + \ddot{\tilde{q}}_{rj+1/2}^{h, X} \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{\tilde{q}}_{rj+1}^{h, X} = \dot{\tilde{q}}_{rj}^{h, X} + \ddot{\tilde{q}}_{rj+1/2}^{h, X} \Delta t_j \quad (2.9)$$

$$q_{j+1}^{oh} = q_j^{oh} + \dot{q}_j^{oh} \Delta t_j + \ddot{q}_{j+1/2}^{oh} \Delta t_j^2 / 2, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (2.10)$$

$$f_{j+1}^{h, X} = 2f_{j+1/2}^{h, X} - f_j^{h, X}, \quad \dot{q}_{j+1}^{h, X} = 2\dot{q}_{j+1/2}^{h, X} - \dot{q}_j^{h, X}, \quad \dot{\tilde{q}}_{rij+1}^{h, X} = 2\dot{\tilde{q}}_{rij+1/2}^{h, X} - \dot{\tilde{q}}_{rij}^{h, X} \quad (2.11)$$

Подставим (2.7)–(2.11) в (2.2)–(2.4), после их дискретизации, и дополним полученную систему выражениями из [8] для полного ускорения точки контакта колеса и рельса ( $\ddot{q}_{k_1j+1/2}^{oh}$ ,  $\tilde{k}_1 = 1, \dots, n_{h1}$ ) и для ускорения рельса в точке контакта с промежуточными опорами ( $\ddot{q}_{k_1j+1/2}^{Sh, X}$  ( $X = 1, 3$ ;  $k_1 = 1, \dots, n_{h2}$ ))

$$\ddot{q}_{k_1j+1/2}^{oh} = \Phi_{k_1j+1/2}^* (C_{k_1}, V, X, Z^*) \text{ при } C_{k_1} = C_{1k_1} \quad (\tilde{k}_1 = 1, \dots, n_{h1}), \quad X = 1, \quad Z^* = 1 \quad (2.12)$$

$$\ddot{q}_{k_1j+1/2}^{Sh, X} = \Phi_{k_1j+1/2}^* (C_{k_1}, V, X, Z^*) \text{ при } C_{k_1} = C_{2k_1} \quad (\tilde{k}_1 = 1, \dots, n_{h2}) \quad (2.13)$$

$$V = 0, \quad X = 1, \quad Z^* = 1 \text{ и } X = 3, \quad Z^* = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1j+1/2}^* (C_{k_1}, V, X, Z^*) = & \ddot{q}_{i2j+1/2}^{h, X} + ((C_{k_1} / l_h) + \\ & + V \Delta t_j / l_h) (\ddot{q}_{k2j+1/2}^{h, X} - \ddot{q}_{i2j+1/2}^{h, X}) + 2V (\dot{q}_{k2j}^{h, X} - \dot{q}_{i2j}^{h, X}) / l_h + \\ & + f_{i3j+1/2}^{h, X} \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} b_{1i}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h + f_{k3j+1/2}^{h, X} \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} (-1)^i b_{1i}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h - \\ & - \dot{q}_{i2j+1/2}^{h, X} \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} b_{2i}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h + \dot{q}_{k2j+1/2}^{h, X} \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} (-1)^i b_{2i}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h + \\ & + Z^* \times \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} (\tilde{R}_{k_1j+1/2}^h + P_{1k_1}^h) \times \left( \tilde{b}_n^X \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h S_{ik_1} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^N \beta_{1i\tilde{k}_1}^h \tilde{a}_{kij}^{h, X} \omega_{h\tilde{k}_1}^2 [\tilde{q}_{rkij}^{h, X} + (\mu_{\tilde{k}}^{h, X} + \Delta t_j / 2) \dot{\tilde{q}}_{rkij}^{h, X}] + \\ & + \sum_{i=1}^N \left\{ \beta_{2i\tilde{k}_1}^h \tilde{q}_{rkij}^{h, X} + \beta_{3i\tilde{k}_1}^h \tilde{q}_{rkij}^{h, X} \right\} + \sum_{k_1=1}^{n_{h2}} R_{k_1j+1/2}^{h, X} \times \left\{ \tilde{b}_h^X \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{kij}^{h, X} \beta_{1i\tilde{k}_1}^h S_{ik_1}^* \right\} \quad (\tilde{k} = 2) \end{aligned}$$

$$b_{1i}^{h, X} = 2r_i / (m_h^X l_h^2), \quad b_{2i}^h = 2/r_i, \quad \tilde{b}_h^X = 2 / (m_h^X l_h)$$

$$\beta_{1i\tilde{k}_1}^h = S_{i\tilde{k}_1} (1 - V^2 (r_i / l_h)^2 \Delta t_j^2 / 4) + \Delta t_j V (r_i / l_h) \bar{S}_{i\tilde{k}_1}$$

$$\beta_{2i\tilde{k}_1}^h = 2V (r_i / l_h) \bar{S}_{i\tilde{k}_1} - V^2 (r_i / l_h)^2 (\Delta t_j / 2) S_{i\tilde{k}_1}$$

$$\beta_{3i\bar{k}_1}^h = -V^2(r_i/l_h)^2 S_{i\bar{k}_1}, \quad S_{i\bar{k}_1} = \sin(r_i C_{1\bar{k}_1}/l_h)$$

$$\bar{S}_{i\bar{k}_1} = \cos(r_i C_{1\bar{k}_1}/l_h), \quad S_{i\bar{k}_1}^* = \sin(r_i C_{2\bar{k}_1}/l_h)$$

$$r_i = \pi \times i, \quad \delta_{ij}^{h,X} = (\Delta t_j^2/2) \bar{a}_{ij}^{h,X}, \quad \mu_k^{h,X} = \mu_{ki}^{h,X}$$

$$\bar{a}_{ij}^{h,X} = 1/(1 + (1/2)\omega_{hki}^2(\mu_k^{h,X} \Delta t_j + \Delta t_j^2/2))$$

где  $C_{1\bar{k}_1}$  – абсциссы движущихся колесных пар в данный момент по  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1$ );  $C_{2\bar{k}_1}$  – абсциссы связей, моделирующих шпалы, прокладки и балластную прослойку между рельсом и несущей балкой;  $n_{h1}$  – число колесных пар на  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1$ ) в данный момент времени;  $n_{h2}$  – число шпал на несущей балке;  $V$  – скорость движения состава.

Введем в рассмотрение векторы

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{h,X} &= \begin{cases} [f^{h,X} \tilde{R}^h R^{h,X}]^T & (X = 1) \\ [f^{h,X} R^{h,X}]^T & (X = 3) \end{cases} \\ \tilde{q}^{h,X} &= \begin{cases} [q^{h,X} q^{oh} q^{Sh,X}]^T & (X = 1) \\ [q^{h,X} q^{Sh,X}]^T & (X = 3) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Объединим подсистемы (2.2)–(2.4), после указанной дискретизации по времени, с системами (2.12) и (2.13). В итоге будем иметь соотношения для  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1, 3$ ):

$$A^{h,X} \tilde{f}_{j+1/2}^{h,X} + B^{h,X} \tilde{q}_{j+1/2}^{h,X} = C^{h,X} \quad (2.15)$$

где  $A^{h,X}$ ,  $B^{h,X}$  – квадратные матрицы с размерами  $[N_1 \times N_1]$ , где  $N_1 = 6 + n_{h1} + n_{h2}$  ( $X = 1$ ) и  $N_1 = 6 + n_{h2}$  ( $X = 3$ );  $C^{h,X}$  – вектор. Окончательные базовые формулы (при совпадающих обозначениях) для вычисления матриц  $A^{h,X} = [A_{ki}]$ ,  $B^{h,X} = [B_{ki}]$  ( $k, i = 1, \dots, 6 + N_h^*$ ), где  $N_h^* = n_{h1}$  приведены в [8] ( $C_{1\bar{k}_1} = C_{1\bar{k}_1}$ ,  $\varepsilon = 1$ ). Дополним эти результаты ненулевыми элементами для матриц  $A^{h,X} = [A_{ki}]$  и  $B^{h,X} = [B_{ki}]$  из (2.15) для элемента  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1$ ) (фиг. 2):

$$A_{2, 6+n_{h1}+k_2} = -1 - \tilde{a}_9 \sum_{i=1}^N v_{1i} S_{ik_2}^*$$

$$A_{3, 6+n_{h1}+k_2} = \tilde{a}_{10} \sum_{i=1}^N v_{3i} S_{ik_2}^*$$

$$A_{5, 6+n_{h1}+k_2} = -l_h \left( \frac{C_{2k_2}}{l_h} - 0.5 - \tilde{a}_9 \sum_{i=1}^N v_{2i} S_{ik_2}^* \right)$$

$$A_{6+n_{h1}+i_2, 3} = \tilde{a}_7 \sum_{i=1}^N v_{3i} S_{ik_2}^*$$



$$A_{6+n_{h1}+i_2,6} = \tilde{a}_7 \sum_{i=1}^N (-1)^i v_{3i} S_{ik_2}^*$$

$$A_{6+n_{h1}+i_2,6+k_1} = \tilde{a}_8 \sum_{i=1}^N v_{3i} \tilde{\chi}_i S_{ii_2}^* S_{ik_1} \tag{2.16}$$

$$A_{6+i_1,6+n_{h1}+k_2} = \tilde{a}_8 \sum_{i=1}^N v_{3i} \tilde{\chi}_i \beta_{1ii_1} S_{ik_2}$$

$$A_{6+n_{h1}+i_2,6+n_{h1}+k_2} = \tilde{a}_8 \sum_{i=1}^N v_{3i} \tilde{\chi}_i S_{ii_2}^* S_{ik_2}$$

$$B_{6+n_{h1}+i_2,2} = 1 - \frac{C_{2k_2}}{l_h} - \tilde{a}_4 \sum_{i=1}^N \tilde{\chi}_i S_{ii_2} \frac{v_{3i}}{r_i}$$

$$B_{6+n_{h1}+i_2,5} = \frac{C_{2k_2}}{l_h} + \tilde{a}_4 \sum_{i=1}^N (-1)^i \tilde{\chi}_i S_{ii_2} \frac{v_{3i}}{r_i}$$

$$B_{6+n_{h1}+i_2,6+n_{h1}+k_2} = -1 \quad (i_1, k_1 = 1, \dots, n_{h1}, i_2, k_2 = 1, \dots, n_{h2})$$

$$v_{1i} = \vartheta_{kij}^h ((-1)^i - 1)/r_i, \quad v_{2i} = \vartheta_{kij}^h ((-1)^i + 1)/(2r_i)$$

$$v_{3i} = \vartheta_{kij}^h r_i, \quad \tilde{a}_2 = -2\delta_j/l_h, \quad M_h = m_h l_h$$

$$\tilde{a}_4 = l_h \tilde{a}_2, \quad \delta_j = 2/\Delta t_j^2, \quad \tilde{a}_7 = 2\delta_j/(l_h^2 m_h)$$

$$\tilde{a}_8 = -l_h \tilde{a}_7, \quad \tilde{a}_9 = 2\delta_j, \quad \tilde{a}_{10} = -\tilde{b}_h^X/l_h, \quad \tilde{\chi}_i = -1/r_i$$

Элементы вектора  $C^{h,X} = [C_k^h]$  ( $k = 1, \dots, 6 + n_{h1} + n_{h2}$ ) имеют вид  $C_k^h = C_{0k}^h + C_{Pk}^h$ , где  $C_{0k}^h$  – определяются начальными условиями задачи в момент  $t_j$ , а  $C_{Pk}^h$  – величиной нагрузки  $P_1^h$  на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ . Элементы вектора  $C^{h,X}$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) приведены в [8], дополним недостающие элементы для  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1$ ):

$$C_{0,6+i_1}^h = \sum_{i=1}^N \left\{ \delta_j \beta_{1ii_1}^h \vartheta_{kij}^h \omega_{hki}^2 \left( a_{ij}^{h,X} + \left( \mu_k^h + \frac{\Delta t_j}{2} \right) b_{ij}^h - \beta_{2ii_1}^h b_{ij}^h - \beta_{3ii_1}^h a_{ij}^h \right) - \right. \\ \left. - 2V(\dot{q}_{k3j}^h - \dot{q}_{i3j}^h)/l_h \quad (i_1 = 1, \dots, n_{h1}, \tilde{k} = 2) \right. \\ \left. C_{0,6+n_{h1}+i_2}^h = \sum_{i=1}^N \left\{ \delta_j S_{ii_2}^* \vartheta_{kij}^h \omega_{hki}^2 \left( a_{ij}^h + \left( \mu_k^h + \frac{\Delta t_j}{2} \right) b_{ij}^h \right) \right\} \quad (i_2 = 1, \dots, n_{h2}, \tilde{k} = 2) \right. \tag{2.17}$$

$$a_{ij}^h = \tilde{q}_{rkij}^h, \quad b_{ij}^h = \tilde{q}_{rkij}^h$$

Для плоского элемента, моделирующего рельс совместно с несущей балкой, рассматривается только вертикальная нагрузка от давления колесных пар. Приведем ненулевые элементы  $C_{Pk}^h$  ( $k = 1, \dots, 6 + n_{h1} + n_{h2}$ ) из  $C^{h,X}$ :

$$C_{P2}^h = \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} P_{1k_1}^h \left( 1 + a_{P2} \sum_{i=1}^N S_{ik_1} v_{1i} \right)$$

$$C_{P3}^h = a_{P3} \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} P_{1k_1}^h \sum_{i=1}^N S_{ik_1} v_{3i}$$

$$C_{P5}^h = \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} P_{1k_1}^h l_h \left[ \frac{c_{1k_1}}{l_h} - 0.5 + a_{P2} \sum_{i=1}^N S_{ik_1} v_{2i} \right] \quad (2.18)$$

$$a_{P2} = 2\delta_j, \quad a_{P3} = -\tilde{b}_h^X / l_h$$

$$C_{P6+i_1}^h = a_{P4} \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} P_{1k_1}^h \sum_{i=1}^N S_{ik_1} \beta_{1i i_1} \vartheta_{kij}^h, \quad a_{P4} = -\tilde{b}_h^X \delta_j$$

$$C_{P6+n_{h1}+i_2}^h = a_{P4} \sum_{k_1=1}^{n_{h1}} P_{1k_1}^h \sum_{i=1}^N S_{ik_1} S_{ii_2} \vartheta_{kij}^h$$

Элемент  $C_{P3}^h \rightarrow C_{P6}^h$  путем введения под знак суммы множителя  $(-1)^i$ .

При формировании матриц  $A^{h,X} = [A_{ki}]$ ,  $B^{h,X} = [B_{ki}]$ ,  $C^{h,X} = [C_k^h]$ , соответствующих  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 3$ ) (несущей балке у элемента  $\tilde{e}_h$ ), следует иметь ввиду, что порядок матриц в (2.15) равен  $N_1 = 6 + n_{h2}$ , а для получения элементов достаточно исключить из (2.15)–(2.17) элементы, соответствующие номерам  $k, i = 7, \dots, 6 + n_{h1}$ , а элементы  $C_{Pk}^h$  ( $k = 1, \dots, 6 + n_{h1}$ ) считать нулевыми.

3. Рассмотрим элемент  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 2$ ). Эти элементы моделируют работу шпал, прокладок и балластного слоя на мосту и вне его. Задача о связях, моделирующие работу шпальной решетки, может рассматриваться как в линейной, так и нелинейной постановках. Предварительно приведем, на случай решения нелинейных задач, модификацию шаговой процедуры из [15] и применяемой в [7, 8, 14, 15, 17] для решения линейных задач. Приведем решение тестовой и вспомогательной задачи, на которых продемонстрируем предлагаемый алгоритм. Рассмотрим уравнение вида

$$m\ddot{y} + S(y) = p(t) \quad (3.1)$$

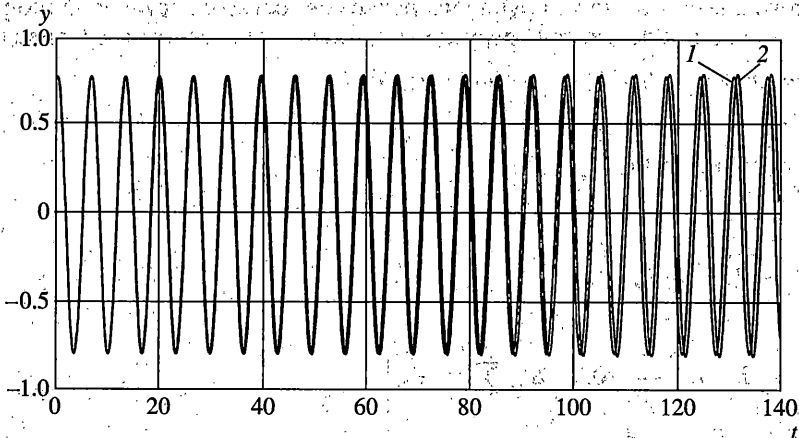
где  $m$  – масса,  $S(y)$  – восстанавливающая сила,  $p(t)$  – внешняя нагрузка,  $y$  – смещение,  $t$  – время.

Проведем дискретизацию (3.1) по времени, обозначив  $S_j = S(t_j)$ . Линеаризуем уравнение (3.1). На шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  запишем (3.1), используя приращение перемещений [18], в виде

$$m\Delta\ddot{y} + S'_j \Delta y = \Delta p$$

$$S_{j+1} - S_j = S'_j \Delta y, \quad \Delta y = y_{j+1} - y_j \quad (3.2)$$

$$S'_j = (dS/dy)|_{t=t_j}, \quad \Delta p = p_{j+1} - p_j$$



Фиг. 3

Перепишем (3.2) в форме

$$m\ddot{y}_{j+1} + S'_j y_{j+1} = L_{j+1/2}, \quad L_{j+1/2} = p_{j+1} + S'_j y_j - S_j \quad (3.3)$$

Применяя для (3.3) алгоритм, предложенный в [15] для решения линейных задач, тогда для ускорения точки имеем

$$\ddot{y}_{j+1/2} = G^{-1} \times \left( -S'_j y_j - S'_j \frac{\Delta t_j}{2} \dot{y}_j + L_{j+1/2} \right)$$

$$L_{j+1/2} = p_{j+1/2} + S'_j y_j - S_j, \quad G^{-1} = 1/(m + (\Delta t_j^2/4)S'_j)$$

В итоге имеем шаговую процедуру

$$\ddot{y}_{j+1/2} = G^{-1} \times \left( -S_j - S'_j \frac{\Delta t_j}{2} \dot{y}_j + p_{j+1/2} \right) \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\dot{y}_{j+1} = \dot{y}_j + \ddot{y}_{j+1/2} \Delta t_j \quad (3.4)$$

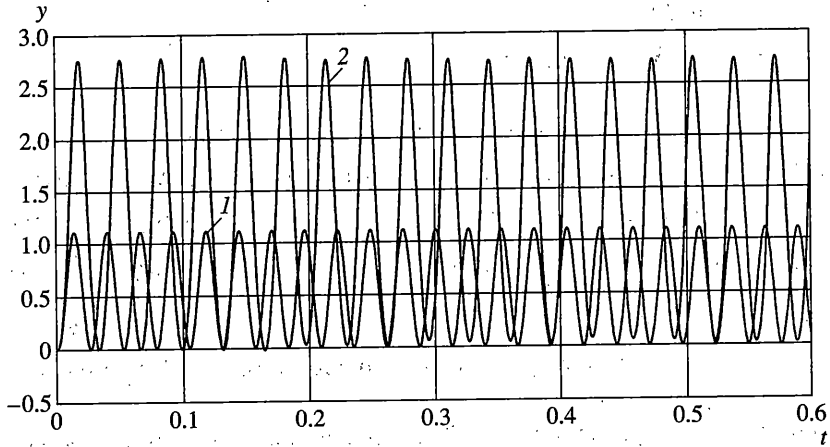
$$y_{j+1} = y_j + \dot{y}_j \times \Delta t_j + (1/2) \ddot{y}_{j+1/2} \Delta t_j^2$$

Алгоритм (3.4) реализовывался, первоначально, при решении задачи о колебаниях математического маятника при  $S(y) = (g/l)^{1/2} \sin y$ ,  $m = 1$ ,  $y_0 = \pi/4$ ,  $y'_0 = 0$ . Численное решение сравнивалось с известным приближенным решением [19] в форме

$$y = \left( y_0 + \frac{1}{192} y_0^3 \right) \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{192} y_0^3 \cos \frac{6\pi t}{T} \quad (3.5)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 + \frac{y_0^2}{16} \right)}$$

На фиг. 3 представлены изменения  $y$  [см] ( $\Delta t_j = 0.05T_F$  и  $T_F = 2\pi \sqrt{g/l}$ ,  $\sqrt{g/l} = 1$ ,  $t$  [сек]) с использованием предложенной процедуры (3.4) (кривая 2) и с использованием решения (3.5) (кривая 1).



Фиг. 4

Алгоритм (3.4) реализовывался при рассмотрении колебаний осциллятора, моделирующего работу шпалы с просадкой  $\Delta_0$  под ней при действии внезапно приложенной силы  $p$ , при нулевых начальных условиях. Закон изменения жесткости выбирался в виде

$$S(y) = \begin{cases} \tilde{c}_1 y & \text{при } y \leq \Delta_0 \\ \tilde{c}_1 \Delta_0 + \tilde{c}_2 (y - \Delta_0) & \text{при } y \geq \Delta_0, \quad \tilde{c}_1 \ll \tilde{c}_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

На фиг. 4 представлены изменения величины  $y$  [см] (для параметров  $m = 300$  кг,  $\tilde{c}_1 = 0.1$  Н/м,  $\tilde{c}_2 = 180 \cdot 10^2$  кН/м,  $p = 100$  кН,  $t$  [сек]). Случаю  $\Delta_0 = 0.01$  м соответствует кривая 2, а случаю  $\Delta_0 = 0$  – кривая 1.

Для формирования элемента  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 2$ ), моделирующего связи между рельсом и несущей балкой, рассмотрим вертикальные колебания одной из шпал (фиг. 2). Рассмотрим случай, когда эта шпала имеет под собой просадку балласта, другая связь (верхняя прокладка) линейна. После дискретизации уравнения движения шпалы на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  в момент времени  $t_{j+1/2}$  можно записать

$$R_{ij+1/2}^{h,X} = c_L \Delta l + \gamma_L \Delta \dot{l} \quad (X = 1)$$

$$R_{ij+1/2}^{h,X} = c^* \Delta l + \gamma^* \Delta \dot{l} + D_{j+1/2}^h \quad (X = 3)$$

$$\dot{q}_{ij+1/2}^{h,m} = -\frac{1}{m_i} \sum_{X=1,3} R_{ij+1/2}^{h,X} \quad (3.7)$$

$$\Delta l = q_{ij+1/2}^{h,m} - q_{ij+1/2}^{Sh,X}, \quad \Delta \dot{l} = \dot{q}_{ij+1/2}^{h,m} - \dot{q}_{ij+1/2}^{Sh,X} \quad (X = 1, 3)$$

$$c^* = \begin{cases} \tilde{c}_1 & \text{при } \Delta l \leq \Delta_0 \\ \tilde{c}_2 & \text{при } \Delta l \geq \Delta_0 \end{cases}, \quad \gamma^* = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta l \leq \Delta_0 \\ \tilde{\gamma}_2 & \text{при } \Delta l \geq \Delta_0 \end{cases}$$

$$D_{j+1/2}^h = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta l \leq \Delta_0 \\ (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2)\Delta_0 & \text{при } \Delta l \geq \Delta_0 \end{cases}$$

Здесь  $c_L, \gamma_L$  – жесткость и вязкость прокладки у шпалы с номером  $i$  ( $i = 1, \dots, n_{h2}$ );  $\tilde{c}_2, \tilde{\gamma}_2$  – жесткость и вязкость пружины, моделирующей упругость и вязкость балластной призмы;  $\tilde{c}_1$  – условная жесткость ( $\tilde{c}_1 \ll \tilde{c}_2$ ), используемая для моделирования зазора (для зазора на фиг. 2  $\tilde{c}_1 = 0$ );  $q_{ij+1/2}^{h,m}$  – вертикальное смещение шпалы;  $m_i$  – масса шпалы с номером  $i$ ;  $R_{ij+1/2}^{h,X}$  – динамические реакции связей после расчленения элемента  $\tilde{e}_h$ , т.е. реакции между рельсом и шпалой (при  $X = 1$ ), и между шпалой и пролетным строением (при  $X = 3$ ).

Подставляя третье уравнение из (3.7) в первые два и объединяя такие системы для всех шпал, входящих  $\tilde{e}_h$ , имеем

$$A^{h,X} \tilde{f}_{j+1/2}^{S,h,X} + B^{h,X} \tilde{q}_{j+1/2}^{S,h,X} = C^{h,X}, \quad X = 2 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j+1/2}^{S,h,X} &= [R^{h,1}, R^{h,3}]^T = [R_1^{h,1}, \dots, R_{n_{h2}}^{h,1}, R_1^{h,3}, \dots, R_{n_{h2}}^{h,3}]^T \\ \tilde{q}_{j+1/2}^{S,h,X} &= [\tilde{q}^{S,h,1}, \tilde{q}^{S,h,3}]^T = [\tilde{q}_1^{S,h,1}, \dots, \tilde{q}_{n_{h2}}^{S,h,1}, \tilde{q}_1^{S,h,3}, \dots, \tilde{q}_{n_{h2}}^{S,h,3}]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$A_i^{h,X} = [A_{kn}^i], \quad B_i^{h,X} = [B_{kn}^i], \quad C_i^{h,X} = [C_k^i] \quad (k, n = 1, 2)$$

где  $A^{h,X} = \{A_i^{h,X}\}$ ,  $B^{h,X} = \{B_i^{h,X}\}$  – блочно-диагональные матрицы,  $C^{h,X} = \{C_i^{h,X}\}$  – блочный вектор.

Для элемента-шпалы, содержащей модель “просадки” имеем

$$\begin{aligned} A_{11}^i &= 1 + \frac{1}{m_i} \tilde{g}, \quad A_{12}^i = -\frac{1}{m_i} \tilde{g}, \quad B_{11}^i = \tilde{g} \\ \tilde{g} &= \left( c_L \frac{\Delta t_j^2}{4} + \gamma_L \frac{\Delta t_j}{2} \right), \quad B_{12}^i = B_{21}^i = 0 \\ C_1^i &= \left( c_L \frac{\Delta t_j}{2} + \gamma_L \right) \times (q_{ij+1/2}^{h,m} - \tilde{q}_{ij+1/2}^{S,h,1}) + c_L (q_{ij+1/2}^{h,m} - q_{ij+1/2}^{S,h,1}) \\ C_2^i &= -\left( c^* \frac{\Delta t_j}{2} + \gamma^* \right) \times (q_{ij+1/2}^{h,m} - \tilde{q}_{ij+1/2}^{S,h,3}) - c^* (q_{ij+1/2}^{h,m} - q_{ij+1/2}^{S,h,3}) + D_{j+1/2}^h \end{aligned} \quad (3.10)$$

В (3.9)  $A_{12}^i \rightarrow A_{21}^i$ ,  $A_{11}^i \rightarrow A_{22}^i$ ,  $B_{11}^i \rightarrow B_{22}^i$ , при замене  $c_L$  на  $c^*$ , а  $\gamma_L$  на  $\gamma^*$  и при замене знака на противоположный во втором и третьем случаях. При отсутствии просадок следует положить  $\Delta_0 = 0$ .

4. Построим элементы  $\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*$ . Остановимся, первоначально, на рассмотрении элемента  $\tilde{e}_h$ . Объединим результаты (2.15) и (3.8), полученные для  $\tilde{e}_h^X$  ( $X = 1, 2, 3$ ).

Представим в (2.15), (3.8) матрицы  $A^{h,X}$ ,  $B^{h,X}$  и вектор  $C^{h,X}$  ( $X = 1, 2, 3$ ), разбивая их на подматрицы, в виде

$$A^{h,X} = [a_{ik}^{h,X}], \quad B^{h,X} = [b_{ik}^{h,X}], \quad C^{h,X} = [c_i^{h,X}] \quad (i, k = 1, 2) \quad (4.1)$$

Используя такой подход, перепишем выражения (2.15), (3.8) при ( $X = 1, 2, 3$ ) в виде

$$a_{11}^{h,X} f_{j+1/2}^{h,X} + a_{12}^{h,X} R_{j+1/2}^{h,X} + b_{11}^{h,X} q_{j+1/2}^{h,X} + b_{12}^{h,X} q_{j+1/2}^{Sh,X} = \tilde{C}_1^{h,X} \quad (X = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

$$a_{21}^{h,X} f_{j+1/2}^{h,X} + a_{22}^{h,X} R_{j+1/2}^{h,X} + b_{21}^{h,X} q_{j+1/2}^{h,X} + b_{22}^{h,X} q_{j+1/2}^{Sh,X} = \tilde{C}_2^{h,X} \quad (X = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

$$f_1^{h,1} = [f^{h,1} \tilde{R}^h], \quad q_1^{h,1} = [q^{h,1}, q^{oh}] \quad \text{при } X = 1$$

$$f_1^{h,2} = R^{h,1}, \quad R_1^{h,2} = R^{h,3}, \quad q_1^{h,2} = q^{Sh,1}, \quad q^{Sh,2} = q^{Sh,3} \quad \text{при } X = 2$$

$$f_1^{h,3} = f^{h,3}, \quad q_1^{h,3} = q^{h,3} \quad \text{при } X = 3$$

Проведем исключение неизвестных для внутренних узлов  $\tilde{e}_h$ . Уравнения (4.3) при ( $X = 1, 3$ ) образуют систему, из которой

$$\ddot{Y}_{j+1/2} = \tilde{D}^{-1} \times (Q_1 \tilde{f}_{j+1/2}^h + Q_2 \tilde{q}_{j+1/2}^{zh} + Q_p) \quad (4.4)$$

$$\ddot{Y} = [\tilde{q}^{S,h,1}, \tilde{q}^{S,h,3}], \quad \tilde{f}^h = [f^{h,1}, R^h, f^{h,3}], \quad \tilde{q}^{zh} = [q^{h,1}, q^{oh}, q^{h,3}]$$

Уравнения (4.2) и (4.3) при ( $X = 2$ ) образуют систему, из которой

$$\tilde{R}_{j+1/2}^h = -\tilde{K}_S \ddot{Y}_{j+1/2} + G_0^S, \quad \tilde{R}^h = [R^{h,1}, R^{h,3}] \quad (4.5)$$

Уравнения (4.2) при ( $X = 1, 3$ ) образуют систему вида

$$A_1 \tilde{f}_{j+1/2}^h + A_2 \tilde{R}_{j+1/2}^h + B_1 \tilde{q}_{j+1/2}^{zh} + B_2 \ddot{Y}_{j+1/2} = \tilde{P} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.4) и (4.5) в (4.6) имеем на каждом шаге для  $\tilde{e}_h$ :

$$\tilde{f}_{j+1/2}^h = -K_*^h \tilde{q}_{j+1/2}^{zh} + \tilde{K}_*^h, \quad K_*^h = L_1^{-1} L_2, \quad \tilde{K}_*^h = L_1^{-1} L_{0p}$$

$$L_1 = A_1 + [B_2 - A_2 \tilde{K}_S] \times \tilde{D}^{-1} \times Q_1 \quad (4.7)$$

$$L_2 = B_1 + [B_2 - A_2 \tilde{K}_S] \times \tilde{D}^{-1} \times Q_2$$

$$L_{0p} = -[B_2 - A_2 \tilde{K}_S] \times \tilde{D}^{-1} \times Q_p - A_2 G_0^S + \tilde{P}$$

где  $\tilde{q}_{j+1/2}^{zh}$  – вектор узловых ускорений только в узлах  $i$  и  $k$  при ( $X = 1, 3$ ) и ускорений в движущихся узлах;  $\tilde{f}_{j+1/2}^h$  – вектор узловых усилий и моментов в узлах  $i$  и  $k$  при ( $X = 1, 3$ ) и динамических добавок к статическим реакциям колес.

Выражения, аналогичные (4.7) для элементов  $\tilde{e}_h^*$ , моделирующих путь вне моста, имеют вид

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^{*h} = -K_*^{*h} \mathbf{q}_{j+1/2}^{*h} + \tilde{K}_*^{*h} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{f}^{*h} = [f^{h,1} \tilde{R}^h], \quad \ddot{\mathbf{q}}^{*h} = [q^{h,1}, q^{oh}]$$

Для остальных элементов, формирующих конструкцию моста, на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  имеем [15]:

$$\mathbf{r}_{j+1/2}^h = -K_h \mathbf{q}_{j+1/2}^h + \bar{\mathbf{K}}_h \quad (4.9)$$

5. Рассмотрим в качестве подвижной нагрузки железнодорожный состав, состоящий из  $N_0$  несвязанных вагонов  $\{e_h^o\}$  ( $h = 1, \dots, N_0$ ). Будем считать, что начальные условия для системы СПМ  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$  нулевые, а параметры, определяющие положение  $\{e_h^o\}$  в системе  $O_*X_*Y_*Z_*$ , движущейся с постоянной скоростью  $V$ , отсчитываются от их значений в статическом равновесии. Обозначим через  $\{\tilde{e}_h^o\}$  элементы  $\{e_h^o\}$ , вовлеченные к моменту времени  $t$  в совместные колебания с  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h\}$ . Тогда для  $\{\tilde{e}_h^o\}$ :

$$M_* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_c + C_* \dot{\bar{\mathbf{q}}}_c + K_* \bar{\mathbf{q}}_c = \bar{\mathbf{R}}_*, \quad \bar{\mathbf{R}}_* = \Pi_* R_* \quad (5.1)$$

где  $\bar{\mathbf{q}}_c$  – вектор обобщенных координат, определяющих  $\{\tilde{e}_h^o\}$  в системе  $O_*X_*Y_*Z_*$ ;  $M_* = [M_*^r]$ ,  $C_* = [C_*^r]$ ,  $K_* = [K_*^r]$  – блочно-диагональные матрицы масс, демпфирования и жесткости для  $\{\tilde{e}_h^o\}$ ;  $M_*^r, C_*^r, K_*^r$  – блоки матриц  $M_*, C_*, K_*$ , соответствующие экипажу с номером  $r$  [7];  $\Pi_*$  – матрица соединения векторов  $\bar{\mathbf{R}}_*$  и  $R_*$ ;  $R_*$  – вектор динамических добавок к статическим реакциям в точках контакта  $\{\tilde{e}_h^o\}$  с проезжей частью (системой  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h\}$  и жестким участком насыпи, перед въездом состава на рассматриваемый участок пути).

Вагоны состава моделируются системой жестких тел, соединенных между собой упруго вязкими связями. Для формирования (5.1) используется метод кинестатики [7, 20]. Вводятся упруговязкие связи, учитывающие упругость колеса при взаимодействии с рельсом

$$\mathbf{R}_* = c_1(q_{k0} - q_{ck}) + \gamma_1(\dot{q}_{k0} - \dot{q}_{ck}) \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{q}_{k0}$  – вектор смещений в точках контакта упруговязких элементов с проезжей частью;  $\mathbf{q}_{ck}$  – вектор смещений колес экипажей (подвектор вектора  $\bar{\mathbf{q}}_c$ );  $c_1, \gamma_1$  – векторы вертикальных жесткостей (вязкостей) связей, моделирующих контакт колеса с рельсом.

Выделим из  $R_*, q_{k0}, q_{ck}$  подвекторы, соответственно  $R_*^o, q_{k0}^o, q_{ck}^o$  отвечающие только взаимодействию  $\{\tilde{e}_h^o\}$  с  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h\}$ , обозначив через  $R_*^o$  – динамические добавки к статическим реакциям колес, находящимся на  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h\}$ , через  $q_{ck}^o, q_{k0}^o$  – смещения колес, находящихся на  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h\}$  и точек контакта упруговязких элементов между этими колесами и рельсом. Очевидно, что в любой момент времени элементы  $q_{k0}$ , относящиеся к проезжей части вне  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h\}$ , остаются нулевыми. Заметим, что в каждый момент времени, в соответствии с (4.8), выполняется соотношение

$$q_{k0}^o = \bar{q}^o = [q^{oh}] \quad (h = 1, \dots, \tilde{m}^* + \tilde{m}) \quad (5.3)$$

Проведем дискретизацию (5.1) по времени ( $j = 0, 1, \dots$ ), как и в [8]. В итоге имеем на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , аналогично с (4.7)–(4.9), для подвижного состава

$$R_{*j+1/2} = W\ddot{q}_{k0j+1/2} + L \quad (5.4)$$

$$R_{*j+1/2}^o = W^o\ddot{q}_{k0j+1/2}^o + L^o \quad (5.5)$$

где, при сохранении обозначений, структуры матриц  $W, L$  и их подматрицы  $W^o, L^o$  приведены в [8].

6. Объединим в единую систему путь вне моста и на мосту, мост и подвижную нагрузку. При формировании системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h\}$  нумерацию узлов удобно провести так, чтобы вектор  $q$  имел структуру  $q = [q_1, q_2]'$ , где  $q_1$  – вектор узловых линейных и угловых смещений, соответствующих только  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*\}$  (при  $X = 1$ ), т.е. элементов, связанных с рельсовым путем. Объединяя выражения (4.7), (4.8) и (4.9) для системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$ , получим

$$\bar{f}_{j+1/2}^* = -\bar{K}^*\ddot{\bar{q}}_{j+1/2}^* + \bar{K}^* \quad (6.1)$$

где  $\bar{f}^* = [\bar{f}, \bar{R}]'$  – вектор узловых силовых факторов и динамических добавок к статическим давлениям колес на  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*\}$  в местных системах координат;  $\bar{q}^* = [\bar{q}, \bar{q}^o]'$  – вектор узловых ускорений и ускорений в движущихся узлах системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*\}$  в местных системах координат;  $\bar{K}^*, \bar{K}^*$  – блочная, квадратная матрица и, соответственно, вектор.

Воспользуемся условиями равновесия в узлах системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$ . Для узлов стержневой системы на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  имеем [15, 16]:

$$E_1(\Gamma)'f_{j+1/2} = 0 \quad (6.2)$$

где  $\Gamma$  – матрица соединения векторов  $\bar{q}$  и  $q$ :

$$\bar{q} = \Gamma q \quad (6.3)$$

а  $E_1$  – диагональная, вспомогательная матрица [16].

Для подвижных узлов системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$  имеем на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ :

$$\bar{R}_{j+1/2} = R_{*j+1/2}^o = 0 \quad (6.4)$$

Учтем граничные условия для стержневой системы на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  в форме [15, 16]:

$$E_2\ddot{q}_{j+1/2} = (q_{Sj+1} - q_{Sj} - \dot{q}_{Sj}\Delta t_j)\delta_j \quad (6.5)$$

где  $E_2 = E - E_1$  – диагональная, вспомогательная матрица [16].

Представим, с учетом (5.3), матричное уравнение (6.1) в виде

$$\bar{f}_{j+1/2} = -k_{11}^*\ddot{\bar{q}}_{j+1/2} - k_{12}^*\ddot{q}_{k0j+1/2}^o + \bar{k}_1^* \quad (6.6)$$

$$\bar{R}_{j+1/2} = -k_{21}^*\ddot{\bar{q}}_{j+1/2} - k_{22}^*\ddot{q}_{k0j+1/2}^o + \bar{k}_2^* \quad (6.7)$$

где  $k_{ik}^*, \bar{k}_i^*$  ( $i, k = 1, 2$ ) – блоки матриц  $\bar{K}^*$  и  $\bar{K}^*$ . Заметим, что в (6.6)  $k_{11}^*$  – ленточная подматрица, связанная с несущей конструкцией.



Подставим (6.6), с учетом (6.3) и (6.5), в (6.2), а (6.7) и (5.5) в (6.4). В итоге на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  получим систему разрешающих уравнений:

$$M^* \ddot{q}_{j+1/2} = \tilde{M}^* \tilde{q} = [\tilde{q}^h] = [q, \bar{q}^o]' = [q_1, q_2, q_{k0}]' \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.8)$$

где  $M^*$  – блочная, квадратная матрица, учитывающая жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$  на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $\tilde{M}^*$  – вектор, отражающий влияние на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  начальных условий задачи в момент  $t_j$  и внешних воздействий. Структура матрицы  $M^*$  и вектора  $\tilde{M}^*$  приведены в [8].

Для сокращения порядка разрешающей на каждом шаге системы уравнений выделим из (6.8) подсистему

$$m^* \ddot{q}_{F, j+1/2} = \tilde{m}^* \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.9)$$

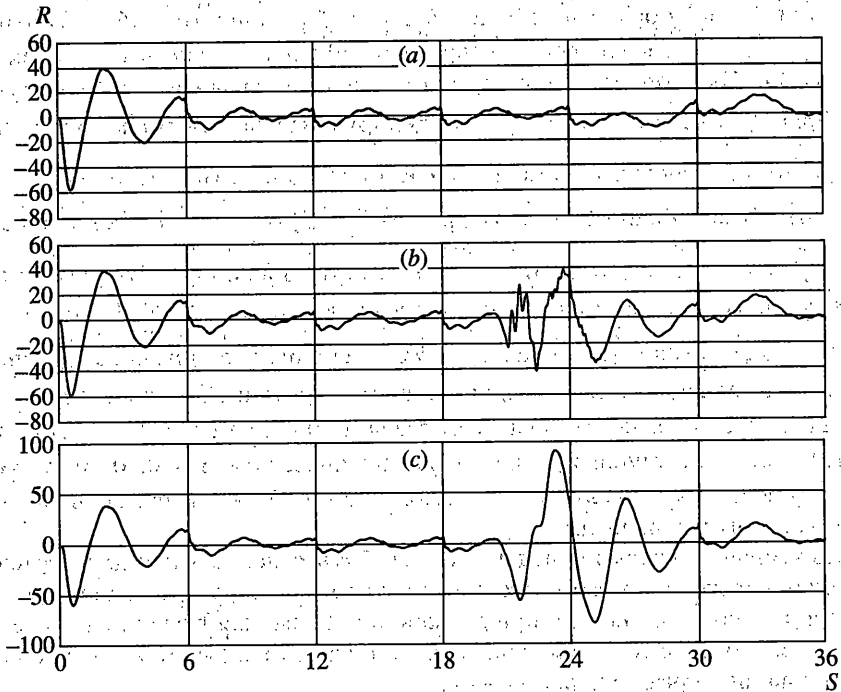
$$\tilde{m}^* = m_{11} - m_{12} m_{22}^{-1} m_{21}, \quad \tilde{m} = \tilde{m}_1 - m_{12} m_{22}^{-1} \tilde{m}_2$$

где  $\tilde{q}_F = [q_1, q_{k0}]'$  – вектор только узловых ускорений у рельса, несущих балок  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h^X\}$  ( $X = 1, 3$ ) и у подвижных узлов на рельсе (точек контакта колес и рельса  $\{\tilde{e}_h^*, \tilde{e}_h^X\}$  ( $X = 1$ ));  $m_{22}$  – матрица, которая не меняет своей структуры на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , при этом матрицы, формирующие  $m^*$  и  $\tilde{m}^*$ , есть в соответствии с (6.8) подматрицы матриц  $M^* = [m_{ik}]$  и  $\tilde{M}^* = [\tilde{m}_i]$  ( $i, k = 1, 2$ ). Решение системы (6.9) на каждом шаге дополняется определением вектора

$$\ddot{q}_{2j+1/2} = m_{22}^{-1} (\tilde{m}_2 - m_{21} \ddot{q}_{Fj+1/2}) \quad (6.10)$$

Проследим ход решения всей задачи при  $j = 0, 1, 2, \dots$ . На шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , при начальных условиях в момент  $t_j$  определяется из (6.9) вектор  $\ddot{q}_{Fj+1/2}$ , далее, как и в [8], используя (6.6), (6.7), (6.1), (5.4), (5.5) и уравнения (2.7)–(2.11), вычисляются поля узловых усилий, смещений, скоростей для системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h, e_h^o\}$  в момент  $t_{j+1}$ . Далее процесс повторяется.

7. Рассмотрим числовой эксперимент. В качестве элементов системы СПМ выберем состав с параметрами из [21], путь с параметрами из [10] и путепровод с характеристиками из [22]. Шаговая процедура (6.9) реализовывалась для исследования динамики высокоскоростного состава “Сокол” с характеристиками из [21], при его движении по участку пути (фиг. 1), включающему трехпролетный, рамный железобетонный путепровод (длина каждого пролета  $L_p$  [м]). Длина вагона – 26 м; расстояние между центрами тележек – 18,8 м; база тележки – 2,8 м. Были выбраны, следуя [10], для расчета системы  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*\}$ , моделирующей рельсовый путь вне моста и на мосту, следующие параметры для пути:  $m_r = 2 \times 60.3$  кг/м – погонная масса рельса – УИС 60 (для изучения динамики системы “состав – путь – мост” в плоскости);  $E_r J_r = 2 \times 6.41 \times 10^6$  Нм<sup>2</sup> – жесткость на изгиб балки – рельса;  $m_s = 290$  кг – масса шпалы;  $l_s = 0.6$  м – расстояние



Фиг. 5

между шпалами;  $c_L = 2 \times 80 \times 10^6$  Н/м ( $\gamma_L = 2 \times 20 \times 10^3$  Нс/м) жесткость (вязкость) прокладок между рельсом и шпалами;  $\tilde{c}_2 = 2 \times 25 \times 10^6$  Н/м ( $\tilde{\gamma}_2 = 2 \times 25 \times 10^3$  Нс/м) жесткость (вязкость) упруговязких связей, моделирующих балласт;  $c_1' = 2 \times 4.2 \times 10^8$  Н/м вертикальная жесткость упруговязкой связи, моделирующей жесткость диска [23] (фиг. 2);  $E_p J_p = 33 \times 10^8$  Нм<sup>2</sup>,  $E_c J_c = 13.8 \times 10^8$  Нм<sup>2</sup> – жесткости на изгиб ригелей и, соответственно, опорных стоек путепровода [22];  $m_p = 8.4$  т/м ( $m_p = 3.2$  т/м) погонные массы ригелей и опорных стоек;  $\mu = 0.0049$  с – коэффициент, учитывающий вязкость.

Следует отметить, что выбор моделей, учитывающих работу пути на мостах, развивался путем привлечения информации от многочисленных экспериментов [3, 23] и сводился, на первом этапе, к использованию упруговязкого элемента между колесом и пролетным строением [3, 8, 23]. Предлагаемая модель (фиг. 2) служит развитием для предшествующих, она тестировалась путем сравнения результатов, например по динамическим коэффициентам, с предшествующей [8] моделью полотна на мосту под колесом (в виде упруговязкого элемента). Близкие результаты подтверждают взаимозаменяемость моделей в ряде задач и правомочность развития дискретной модели железнодорожного пути на мостах. Используя дискретную модель пути, были получены следующие результаты.

На фиг. 5 (a, b, c) представлены итоги числового эксперимента по определению динамических реакций колес состава. Исследовалось влияние просадок балласта  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2$ ) под шпалами перед мостом (элемент 4–5 фиг. 1, расположение просадок по длине у этого элемента совпадает с их позицией у элемента E2 на фиг. 1, 2) на вели-

чину динамической добавки  $\tilde{R}$  (кН) к статической реакции ( $P = 165$  кН) первой колесной пары, первого вагон состава (при  $V = 360$  км/ч) в зависимости от величины отрезка  $S = Vt$  [ $S$  [м]], определяющего положение состава на рассматриваемом участке пути (фиг. 1). Система  $\{\tilde{e}_h, \tilde{e}_h^*, e_h\}$ ; моделирующая “путь – мост” при количестве узлов в системе, равном  $n = 26$  (фиг. 1), состоит из элементов пути вне моста  $\{\tilde{e}_h^*\}$  ( $h = 1, \dots, 4$ ), элементов пути на мосту (фиг. 1–2)  $\{\tilde{e}_h\}$  ( $h = 1, \dots, 6$ ) и стержневых элементов  $\{e_h\}$  ( $h = 1, \dots, 8$ ) или Е3 (фиг. 1), моделирующих опоры. При вычислении  $\tilde{R}$  шаг интегрирования системы (6.9) выбирался равным  $\Delta t_j = 0.0000375$  с при количестве шагов по времени ( $t$  [сек]) равном 10800. На фиг. 5, *a* кривая изменения  $\tilde{R} = R$  соответствует случаю, когда просадки перед мостом (фиг. 1) отсутствуют, т.е.  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . На фиг. 5, *b* кривая изменения  $R$  отвечает просадкам  $\Delta_1 = 0.001$  м,  $\Delta_2 = 0.002$  м, а на фиг. 5, *c* соответствующая кривая отвечает просадкам  $\Delta_1 = 0.004$  м,  $\Delta_2 = 0.008$  м. Отметим существенное увеличение динамической добавки  $R$  при появлении просядок в предмостовой зоне пути.

Предложенная шаговая процедура может быть использована: для исследования напряженно-деформируемого состояния мостовой конструкции и рельсового пути на мосту и в предмостовой зоне при движении состава; для изучения поведения системы “состав – путь – мост” при движениях состава по рельсовому пути с неровностями или при наличии различных просядок.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР МПС РФ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Inglis C.E. Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
2. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 109–115.
3. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Тарасенко В.П. и др. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
5. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев: Наук. думка, 1967. 132 с.
6. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
7. Иванченко И.И. О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 180–185.
8. Иванченко И.И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 151–165.
9. Крысов С.В., Холуев В.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих // Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1985. С. 142–149.
10. Knothe K. Benchmark test for models of railway track and of vehicle / track interaction in the low frequency range // Vehicle System Dynamics, Suppl. 1995. 24. P. 363–379.
11. Dahlberg T. Dynamic interaction between train and non-linear railway track model // Structural Dynamics – EUROODYN 2002. The Netherlands: Balkema, 2002. V. 2. P. 1155–1160.
12. Grassie S.L., Gregory R.W., Harrison D., Johnson K.L. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation // J. Mech. Engng. Sci. 1982. V. 24. № 2. P. 77–90.
13. Yang Y.B., Wu Y.S. Behavior of moving trains over bridges shaken by earthquakes // Structural Dynamics EUROODYN 2002, The Netherlands: Balkema, 2002. V. 1. P. 509–514.

14. *Ivanchenko I.I.* The development of analytical models for railway track dynamics // Dynamics and Long-Term Behaviour Railway Vehicles, Track and Sybgrade, EUROMECH Colloq. 409. – Abstracts. Hannover, 2000. P. 37.
15. *Иванченко И.И.* Расчеты на подвижные и импульсивные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 9. С. 109–118.
16. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
17. *Ivanchenko I.I.* Dynamic interaction of high speed railway train and bridges // Structural Dynamics – EURO-DYN 2002. The Netherlands: Balkema, 2002. V. 2. P. 1173–1178.
18. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.
19. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 595 с.
20. *Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д.* Динамика вагона. М.: Транспорт, 1991. 360 с.
21. *Бурчак Г.П.* Совершенствование методики исследования свободных боковых колебаний экипажей // Тр. МИИТ. 1997. Вып. 912. С. 3–12.
22. *Осипов В.О., Храпов В.Г., Русаков И.М. и др.* Мосты и тоннели на железных дорогах. М.: Транспорт, 1988. 367 с.
23. *Кудрявцев Н.Н.* Исследование динамики необрессоренных масс вагонов // Тр. ВНИИЖТ. 1965. Вып. 287. 168 с.

Иванченко.

Поступила в редакцию  
19.06.2003