МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2005

УДК 539.376

© 2005 г. К.И. РОМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В ряде работ [1–4] для решения задач устойчивости и выпучивания тонкостенных элементов конструкций в условиях ползучести применялись различные подходы. В задачах выпучивания стержней приближенные аналитические решения могут быть получены на основе замены поперечного сечения идеальным двутавром [4] или с помощью теоремы Келледайна–Друкера [5]. В [6] была введена новая аппроксимация дополнительного рассеяния стержня, позволяющая за счет параметра β, зависящего от формы поперечного сечения, получить значение критического времени существенно меньшее, чем дает решение с $\beta = 0$.

Ниже получено решение задачи выпучивания стержня с прямоугольным поперечным сечением, не связанное с применением схемы идеального двутавра или теоремы Келледайна–Друкера. В результате показано, что с этим решением лучше других согласуется критическое время, определенное на основе теоремы Келледайна–Друкера с параметром $\beta \neq 0$.

Постановка задачи сводится к определению критического времени шарнирно закрепленного, сжатого по концам стержня (фиг. 1), имеющего длину l. Сжимающая сила P является неизменной во времени. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ среднее сечение стержня имеет прогиб A_0, нарастающий в процессе выпучивания. Поперечное сечение – прямоугольник с основанием b и высотой H. Ось симметрии поперечного сечения, параллельная его высоте, лежит в плоскости изгибающего момента.

Уравнение состояния материала примем в виде

$$\zeta = k\sigma^n \tag{1}$$

где ζ – скорость деформации, σ – напряжение, k и n – постоянные материала при данной температуре.

Решение задачи может быть получено на основе гипотезы плоских сечений (фиг. 2):

$$\zeta = -\zeta_0 + \dot{\kappa}x \tag{2}$$

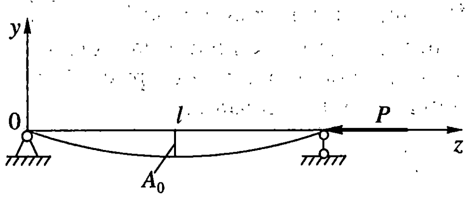
где ζ_0 и $\dot{\kappa}$ – скорость деформации и скорость изменения кривизны оси стержня, x – координата, отсчитываемая от срединной плоскости, $x' = \zeta_0/\dot{\kappa}$.

Уравнения (1) и (2) определяют напряжения (растягивающие – положительные):

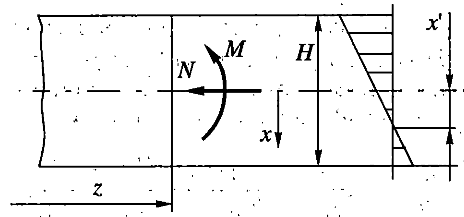
$$\sigma = -\alpha(-\zeta)^m = -\alpha(\zeta_0 - \dot{\kappa}x)^m \quad \text{при } -H/2 \le x \le x'$$

$$\sigma = \alpha\zeta^m = \alpha(-\zeta_0 + \dot{\kappa}x)^m \quad \text{при } x' < x \le H/2$$

$$\alpha = (1/k)^m, \quad m = 1/n$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Соответствующие внутренние силовые факторы имеют вид

$$N = \int_F \sigma dF = \frac{\alpha b}{m+1}\dot{\kappa}^m\left(\frac{H}{2}\right)^{m+1} f_1(q) \tag{3}$$

$$M = \int_F \sigma x dF = \alpha b \dot{\kappa}^m\left(\frac{H}{2}\right)^{m+2} f_2(q) \tag{4}$$

$$f_1(q) = (1+q)^{m+1} - (1-q)^{m+1}$$

$$f_2(q) = (1+q)^{m+2}/(m+2) + (1-q)^{m+2}/(m+2) -$$

$$-q(1+q)^{m+1}/(m+1) + q(1-q)^{m+1}/(m+1)$$

$$q = 2\zeta_0/(H\dot{\kappa}), \quad F = bH$$

где F – площадь поперечного сечения.

Особенностью задач продольного изгиба стержней в условиях ползучести является зависимость прогиба от времени и координаты z. Поэтому точное решение может быть получено только численными методами [7].

Для получения приближенного решения удовлетворим уравнения равновесия, в соответствии с методом коллокации, в одном среднем сечении (фиг. 1):

$$N = P \tag{5}$$

$$M = -PA \tag{6}$$

где A – амплитуда изогнутой оси, зависящая от времени.

Уравнения (5) и (6) справедливы при любых перемещениях. Также при произвольных перемещениях вследствие равенства $\partial y/\partial z = 0$ при $z = l/2$ в среднем сечении точно выполняется равенство $\dot{\kappa} = \partial^2\dot{y}/\partial z^2$, где y – прогиб.

Поделим уравнения (6) и (5) друг на друга. Тогда с учетом выражений (3) и (4) получим

$$H(m+1)f_2(q_*)/[2f_1(q_*)] = -A \tag{7}$$

$$q_* = 2\zeta_{0*}/(H\dot{\kappa}_*)$$

Звездочкой отмечены параметры в среднем сечении.

Уравнение (5) с учетом (3) принимает вид

$$\frac{\alpha b}{m+1}\dot{\kappa}_*^m\left(\frac{H}{2}\right)^{m+1} f_1(q_*) = P \tag{8}$$

Зададимся функцией прогибов в виде $y = -A(t)\sin(\pi z/l)$. Тогда получим $\dot{\kappa}_* = \pi^2 \dot{A}/l^2$.

Примем в дальнейшем $l = \text{const}$, что равносильно предположению о малости перемещений. В этом случае уравнение (8) может быть представлено в форме обыкновенного дифференциального уравнения для амплитуды изогнутой оси

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2^{(m+1)/m}(m+1)^{1/m} l^2 P^{1/m}}{\pi^2 H^{(m+1)/m} \alpha^{1/m} b^{1/m} [f_1(q_*)]^{1/m}}$$

Таким образом, критическое время определяется путем вычисления интеграла

$$t_* = \frac{\pi^2 H^{(m+1)/m} \alpha^{1/m} b^{1/m}}{2^{m+1}(m+1)^{1/m} l^2 P^{1/m}} \int_{A_0}^{\infty} [f_1(q_*)]^{1/m} dA$$

где в подынтегральном выражении параметр q_* связан с текущим значением амплитуды A соотношением (7).

В качестве примера были выполнены вычисления со следующими исходными данными: $n = 3$, $A_0 = 0.1$ H. В результате критическое время оказалось равным $t_* = 0.531\ b^3/H^5/(kP^3 l^2)$.

Интересно, что это значение практически совпадает с критическим временем, определенным в [6] с помощью теоремы Келледайна–Друкера с параметром β в сочетании с методом Бубнова–Галеркина–Канторовича.

Решение, основанное на замене поперечного сечения идеальным двутавром, может быть получено по методу коллокации аналогично тому, как это сделано в [8] с помощью метода Бубнова–Галеркина–Канторовича. Основное уравнение имеет вид [8]:

$$\frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial z^2} + \frac{kP^n}{2J_n^n}[(y+h)^{n-1} - |h-y|^{n-1}(h-y)] = 0$$

$$h = (J_n/F)^{n/(n+1)}$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, J_n – обобщенный момент инерции сечения.

Удовлетворив основное уравнение в среднем сечении $z = l/2$, в случае $n = 3$ будем иметь

$$t_* = \frac{\pi^2 J_{nx}^3}{6kP^3 l^2 h^2} \ln\frac{3h^2 + A_0^2}{A_0^2}$$

При $A_0 = 0.1$ H критическое время составляет $t_* = 0.356\ b^3 H^5/(kP^3 l^2)$. Это значение сравнительно мало отличается от критического времени, найденного по методу Бубнова–Галеркина–Канторовича [6].

Применение теоремы Келледайна–Друкера приводит к основному уравнению для скорости прогиба [6]:

$$\frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial z^2} = kFa\left[\left(\frac{N}{F}\right)^2 + (Ma)^2 + \beta\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{N}{F}Ma\right]^{(n-1)/2} \times$$

$$\times \left[Ma + \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{N}{F}\right], \quad a = F^{-1/(n+1)} J_n^{-n/(n+1)}$$

где β – параметр, зависящий от формы поперечного сечения; для прямоугольника $\beta = 0.625$.

Приближенное интегрирование этого уравнения, по методу коллокации в среднем сечении, дает возможность найти критическое время. В случае $n = 3$ и $\beta = 0$:

$$t_* = \frac{\pi^2 F^{3/2} J_n^{3/2}}{2kP^3 l^2} \ln \frac{J_n^{3/2} F^{-3/2} + A_0^2}{A_0^2}$$

При $A_0 = 0.1$ Н критическое время составляет $t_* = 0.717\, b^3 H^5/(kP^3 l^2)$. Это значение также не сильно отличается от критического времени, найденного по методу Бубнова–Галеркина–Канторовича [6].

Выполненные расчеты приводят к выводу о том, что схема идеального двутавра дает нижнюю границу критического времени, а теорема Келледайна–Друкера с параметром $\beta = 0$ – верхнюю. В части, касающейся теоремы Келледайна–Друкера с параметром $\beta = 0$, аналогичный вывод был сделан в [9].

Критическое время, определенное на основе аппроксимации дополнительного рассеяния стержня с параметром $\beta = 0.625$ при $n = 3$ равно

$$t_* = \frac{\pi^2 b^3 H^5}{kP^3 l^2} \int\limits_{\chi_0}^{\infty} \frac{d\chi}{204\chi^3 + 33.8\chi^2 + 15.5\chi + 0.788}$$

$$\chi = A/H \quad (\chi_0 = A_0/H)$$

При $\chi_0 = 0.1$ критическое время $t_* = 0.48\, b^3 H^5/(kP^3 l^2)$

Отличие последнего приближенного решения от решения, основанного на точных функциях внутренних силовых факторов (3) и (4), составляет 10%, что является допустимым при определении долговечности конструкций. Таким образом, на примере стержня прямоугольного поперечного сечения показано, что применение улучшенной аппроксимации дополнительного рассеяния приводит к существенному уточнению приближенного метода определения критического времени сжатых стержней.

Полученным результатам о том, что схема идеального двутавра дает меньшее значение критического времени по сравнению с решением, основанным на теореме Келледайна–Друкера, может быть дано доказательство с помощью энергетического рассмотрения.

Именно, мощность, рассеиваемая в процессе ползучести элементом стержня длиной dz, вычисляется по формуле

$$dL = (M\dot{\kappa} + N\zeta_0)dz$$

Соответствующее данной мощности дополнительное рассеяние [10] равно $d\tilde{\Lambda} = dL/(n+1)$.

Функция Ω_n, используемая в теореме Келледайна–Друкера [6], связана с $d\tilde{\Lambda}$ соотношением [11]:

$$d\tilde{\Lambda} = \frac{kFdz}{n+1}\Omega_n^{n+1}$$

Следовательно

$$\Omega_n^{n+1} = \frac{dz}{kFdz} = M\dot{\kappa} + N\zeta_0 \tag{9}$$

Применим теперь для вычисления правой части соотношения (9) формулы, характеризующие схему идеального двутавра [8]:

$$\zeta_0 = \frac{k}{2F^n h^n}[|Nh + M|^{n-1}(Nh + M) + |Nh - M|^{n-1}(Nh - M)]$$

$$\dot{\kappa} = \frac{k}{2F^n h^{n+1}}[|Nh+M|^{n-1}(Nh+M)-|Nh-M|^{n-1}(Nh-M)]$$

Тогда получим (n – нечетное):

$$\Omega_n^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{h}+\frac{M}{Fh}\right)^{n+1}+\left(\frac{N}{F}-\frac{M}{Fh}\right)^{n+1}\right]$$

Это выражение можно рассматривать как новый вариант аппроксимации дополнительного рассеяния на основе схемы идеального двутавра для любого поперечного сечения.

В системе координат N–M уравнение кривой

$$\Omega_n^2 = \sigma_*^2$$

$$\Omega_n^2 = \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{F}+\frac{M}{Fh}\right)^{n+1}+\left(\frac{N}{F}-\frac{M}{Fh}\right)^{n+1}\right]\right\}^{2/(n+1)} \tag{10}$$

где σ_* – пороговое напряжение, представляет собой серию вложенных овалов для различных значений n.

Функция (10) построена таким образом, что при $n = 1$ она приводит к точному равенству $\Omega_n = \Omega_1$, а в случае $N = 0$ эта функция совпадает с $\Omega_n = MF^{-1/(n+1)}J_n^{-n/(n+1)}$, являющейся точной Ω_n при чистом изгибе.

При $n \to \infty$ уравнение (10) дает связь между предельными нагрузками в форме

$$(N/N^0)^2 + (M/M^0)^2 = 1$$

совпадающей с соответствующей аппроксимацией в случае $\beta = 0$ по теореме Келледайна–Друкера [6].

Сопоставим теперь в системе координат N–M кривые $\Omega_n^2 = \sigma_*^2$, получаемые по различным аппроксимациям дополнительного рассеяния.

По уравнению (10) для $n = 3$:

$$\left(\frac{N}{N^0}\right)^4 + 6\left(\frac{N}{N^0}\right)^2\left(\frac{M}{1.06M^0}\right)^2 + \left(\frac{M}{1.06M^0}\right)^4 = 1$$

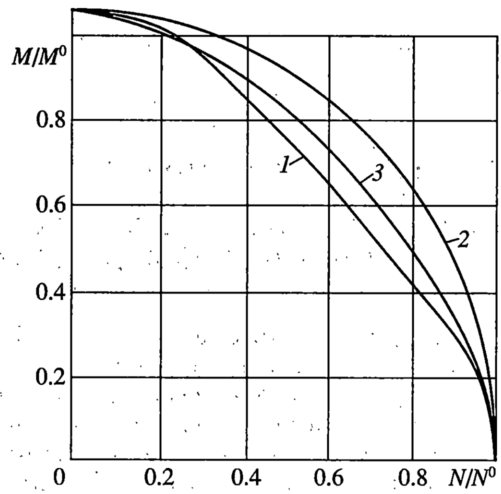
определяем кривую *1* на фиг. 3.

Аналогичные уравнения по теореме Келледайна–Друкера [6] при $\beta = 0$ (кривая *2*) и при $\beta = 0.625$ (кривая *3*) имеют вид соответственно

$$\left(\frac{N}{N^0}\right)^2 + \left(\frac{M}{1.06M^0}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{N}{N^0}\right)^2 + 0.89\left(\frac{M}{M^0}\right)^2 + 0.393\frac{N}{N^0}\frac{M}{M^0} = 1$$

Положение кривых на фиг. 3 и соответствующие им приведенные выше значения t_* свидетельствуют о том, что более выпуклые кривые в системе координат N–M порождаются такой приближенной аппроксимацией Ω_n, по которой t_* оказывается больше по сравнению с аппроксимациями Ω_n, дающими менее выпуклые, т.е. вложенные, кривые в указанной системе координат. Таким образом оказывается, что схема идеально-



Фиг. 3

го двутавра приводит к меньшему значению t_* по сравнению с теоремой Келледайна–Друкера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 406–412.
2. *Терегулов И.Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М.: Наука, 1969. 206 с.
3. *Куршин Л.М.* О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести (обзор) // Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979. С. 246–302.
4. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 155 с.
5. *Calladine C.R., Drucker D.C.* Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep // Quart. of Appl. Maths. 1962. V. 20. № 1. P. 79–84.
6. *Романов К.И.* Исследование продольного изгиба стержня в условиях ползучести на основе теоремы Келледайна–Друкера // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 157–161.
7. *Романов К.И., Чернецов А.А.* Анализ продольного изгиба стержня в условиях ползучести // Машиноведение. 1988. № 4. С. 33–35.
8. *Романов К.И.* Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1993. Вып. 33. С. 139–151.
9. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
10. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
11. *Романов К.И.* Применение теоремы Келледайна–Друкера к решению задач продольного изгиба стержней в условиях ползучести // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Алма-Ата: Гылым, 1992. Ч. 3. С. 48–57.

Москва

Поступила в редакцию
16.06.2003