МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2005

УДК 539.374

© 2005 г. В.Л. ДИЛЬМАН

ПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Получены условия потери несущей способности и условия локальной неустойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек из изотропного упрочняемого материала, нагруженных внутренним давлением и осевой силой, на основе теории течения, с учетом сложного нагружения, возникающего из-за меняющихся при деформировании размеров оболочки. Вычислены значения соответствующих критических деформаций в зависимости от отношения давления и осевой силы и параметров упрочнения материала оболочки. Установлены условия появления осевой или кольцевой шейки в зависимости от тех же величин.

Результаты могут быть использованы при исследовании прочностных свойств тонкостенных сосудов давления и других оболочечных конструкций, магистральных трубопроводов; при подготовке нормативных документов.

1. Введение. Как известно [1], пластическое деформирование тонкостенной цилиндрической оболочки под действием осевой нагрузки и внутреннего давления проходит следующие стадии: равномерное устойчивое деформирование (его окончание назовем общей потерей устойчивости пластического деформирования (ОПУПД)); равномерное неустойчивое деформирование, продолжающееся до начала локализации пластической деформации (ЛПД) – образования шейки; деформирование в области шейки, приводящее к разрушению – возникновению сквозного дефекта в оболочке вдоль или поперек образующей. В [1] предложен метод, основанный на критерии Свифта–Марциньяка, позволяющий находить величины интенсивности деформаций и напряжений в стенке цилиндрической тонкостенной оболочки, соответствующие ОПУПД (ε_i^* и σ_i^*) и ЛПД (ε_i^s и σ_i^s), и отмечено, что момент ОПУПД при двухосном нагружении, как правило, предшествует ЛПД, но не совпадает с ним.

Геометрические размеры цилиндрической оболочки в процессе пластического деформирования изменяются. В результате простое нагружение оболочки по условным напряжениям (внешним нагрузкам) оказывается сложным по истинным напряжениям [2, с. 222; 3, 4]. Таким образом, коэффициент двуосности нагружения стенки трубы $m = \sigma_z/\sigma_\Theta$, где σ_z и σ_Θ – соответственно осевые и кольцевые напряжения, изменяется в зависимости от достигнутой деформации. Это обстоятельство может служить объяснением известного [2, 5, 6] явления, впервые открытого Е. Дэвисом [6], когда переход направления разрушения с осевого на кольцевое происходит не при $m = 1$.

Исследование пластического состояния тонкостенных оболочек в [1] основывалось, в частности, на двух упрощающих предположениях: постоянстве m в процессе деформирования и возможности использования теории малых пластических деформаций. В [3, 4] предположение m = const снято и исследован характер изменения m в процессе деформации; в результате получены новые формулы для вычисления ε_i^*, σ_i^* и вычислена величина критического давления p^*, при котором происходит потеря несущей способности оболочечной конструкции. В [4] найдены значения ε_i^s предельных деформаций, приводящих к возникновению шейки, и найдено значение m^* в зависимости от пластических свойств металла оболочки, при котором происходит изменение ориентации разрушения. Работы [3, 4], как и [1], основывались на теории малых пластических деформаций, применение которой полностью оправдывается только в случае простых нагружений; в данном случае при постоянном отношении осевого усилия и внутреннего давления по истинным напряжениям происходит заметное (хотя и не очень значительное) отклонение от простого нагружения. Целью работы является нахождение, на основе постулатов теории течения, условий (в терминах деформаций и напряжений), при которых происходит исчерпание несущей способности тонкостенной цилиндрической оболочки и условий, когда образуется кольцевая либо осевая шейка. Заметим, что результаты, полученные по теории течения, также могут давать расхождения с экспериментом, а истинные результаты – занимать промежуточное положение между полученными по теории течения и теории малых упругопластических деформаций [7, с. 166]. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании прочностных свойств тонкостенных сосудов давления и других оболочечных конструкций, магистральных трубопроводов.

2. Основные допущения и соотношения. Предполагается, что материал оболочки однороден, изотропен и упрочняем, и в пластической зоне зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i описывается инвариантным к виду напряженного состояния соотношением

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^2) \tag{2.1}$$

где A, n, a, b – константы материала. Заметим, что результаты работы можно обобщить на случай зависимости σ_i от ε_i в пластической зоне по формуле $\sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^2)$, где B – еще одна константа материала. Параметр A в (2.1) в [8] выражен через временное сопротивление σ_b, n, a и b. Предполагается, что оболочка подвергается осевому усилию N и внутреннему давлению p и нагружение оболочки статическое, монотонное и простое по условным напряжениям, т.е. отношение осевого усилия N и давления p постоянно на протяжении всего процесса нагружения. В силу тонкостенности оболочки допускается равенство нулю радиальных напряжений σ_r. Величины главных напряжений в стенке оболочки рассчитываются по формулам [1, 2]:

$$\sigma_z = \frac{pR}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}, \quad \sigma_\Theta = \frac{pR}{t} \tag{2.2}$$

где σ_z, σ_Θ – осевые и кольцевые напряжения. Переменные радиус R и толщина t изменяются с ростом (логарифмических) деформаций

$$R = R_0 \exp\varepsilon_\Theta, \quad t = t_0 \exp\varepsilon_r \tag{2.3}$$

где R_0 и t_0 – значения в начальный момент нагружения; ε_Θ, ε_r и ε_z – логарифмические деформации в кольцевом, радиальном и осевом направлениях. Предполагается выполнение в пластической зоне условия постоянства объема, которое для логарифмических деформаций имеет вид [5]:

$$\varepsilon_\Theta + \varepsilon_r + \varepsilon_z = 0 \tag{2.4}$$

Обозначим через $m = \sigma_z/\sigma_\Theta$ коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки, m_0 – его значение в начальный момент нагружения. В силу принятой в работе теории течения [5], выполняется условие подобия девиаторов напряжений и бесконечно малых приращений деформаций, которое, с учетом допущения $\sigma_r = 0$, можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon_z}{2m-1} = \frac{d\varepsilon_\Theta}{2-m} = \frac{d\varepsilon_r}{-(m+1)} = \frac{d\varepsilon_i}{2\xi} \tag{2.5}$$
$$\xi = \sqrt{m^2-m+1}$$

Здесь $d\varepsilon_i$ – бесконечно малое приращение интенсивности деформации. Заметим, что из уравнений (2.2) при $p \neq 0$ следует $N/p = \pi R^2(2m-1)$. По предположению, рассматривается ситуация, когда в процессе нагружения N/p не изменяется. Тогда из последнего равенства и (2.3) следует

$$2m-1 = (2m_0-1)\exp(-2\varepsilon_\Theta) \tag{2.6}$$

Формула (2.6) показывает, как изменяется коэффициент m в зависимости от накопленной деформации. Очевидно, при $m_0 = 1/2$ в любой момент нагружения $m = 1/2$. Очевидно также из (2.2), что $m = 1/2$ тогда и только тогда, когда $N = 0$. Таким образом, когда осевая нагрузка отсутствует, нагружение трубы (по истинным напряжениям) простое. Если $m_0 = 2$, то m также не изменяется. Действительно, из (2.6) следует, что $(dm)/d\varepsilon_\Theta = 1 - 2m$, откуда, вместе с (2.5), получается дифференциальное уравнение, связывающее ε_z и m:

$$d\varepsilon_z = -\frac{dm}{2-m} \tag{2.7}$$

Решая его при условии, что при $\varepsilon_z = 0$ $m = m_0$, получаем

$$2-m = (2-m_0)\exp\varepsilon_z \tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что при $m_0 = 2$ параметр m остается равным двум в течение всего процесса деформации. Подставляя $m = m_0 = 2$ в (2.6), получаем, что $\varepsilon_\Theta = 0$, т.е. $m_0 = 2$ тогда и только тогда, когда растягивающая по оси трубы сила препятствует кольцевой деформации, вызванной внутренним давлением. Наконец, очевидно, что $m = m_0$ при $m_0 = \pm\infty$, т.е. при отсутствии внутреннего давления. В остальных случаях, т.е. при $m_0 \in$ $\in (-\infty, 1/2)$, $m_0 \in (1/2, 2)$ и $m_0 \in (2, +\infty)$, отношение $m = \sigma_z/\sigma_\Theta$ изменяется в процессе деформации (происходит сложное нагружение). Из формул (2.6) и (2.8) видно, как изменяется m на участках между неподвижными точками $m = m_0 = 0.5, 2, \pm\infty$. Если $m \in (0.5, 2)$, то m уменьшается в процессе нагружения, если $m \in (-\infty, 0.5)$ или $m \in (2, +\infty)$ – увеличивается, т.е. точки 0.5 и $+\infty$ являются "притягивающими", а точки $-\infty$ и 2 – "отталкивающими" неподвижными точками. Приближенная зависимость m от m_0 и от достигнутой деформации ε_i для случая $m \in [0.5, 2.5]$ приведена ниже.

Исходя из (2.7), равенства $\xi^2 = m^2 - m + 1$ и системы уравнений (2.5), нетрудно получить уравнение, продолжающее цепочку (2.5):

$$\frac{d\varepsilon_i}{2\xi} = \frac{dm}{2m^2-5m+2} \tag{2.9}$$

и уравнение

$$\frac{d\xi}{d\varepsilon_i} = \frac{(2m-1)^2(m-2)}{4\xi^2} \tag{2.10}$$

Уравнения (2.6) и (2.8) позволяют найти зависимость между ε_z и ε_Θ в любой момент деформирования

$$(2m_0-1)\exp(-2\varepsilon_\Theta)+2(2-m_0)\exp\varepsilon_z = 3 \tag{2.11}$$

Раскладывая экспоненты в степенные ряды, в первом приближении получаем из (2.11):

$$\frac{\varepsilon_z}{2m_0-1} = \frac{\varepsilon_\Theta}{2-m_0},$$

т.е. уравнение теории малых упругопластических деформаций – условие подобия девиаторов напряжений и деформаций. Во втором приближении

$$\varepsilon_\Theta = \frac{(2-m_0)(\varepsilon_z+1/2\varepsilon_z^2)}{2m_0-1-(2-m_0)\varepsilon_z},\quad \varepsilon_z = \frac{(2m_0-1)(\varepsilon_\Theta-\varepsilon_\Theta^2)}{2-m_0+((2m_0-1)\varepsilon_\Theta)/2} \tag{2.12}$$

Следовательно, для "очень малых" деформаций теория течения приводит в данном случае к одинаковым результатам с теорией малых деформаций; если же деформации таковы, что $3\varepsilon_z/2(2m_0-1)$ в сравнении с единицей составляют существенную часть (хотя бы 5–10%), то отклонение величин ε_Θ, вычисленных по этим теориям, как видно из первой формулы (2.12), становится заметным.

Формулы (2.2), (2.3) и (2.6) позволяют вычислить [3, 4] интенсивность напряжений σ_i как функцию деформаций

$$\sigma_i = \xi C\exp(\varepsilon_z+2\varepsilon_\Theta) \tag{2.13}$$

$$C = \frac{pR_0}{t_0} = \frac{N}{\pi(2m_0-1)R_0t_0},\quad \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_z-\sigma_\Theta)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+(\sigma_\Theta-\sigma_r)^2},$$

где коэффициент C пропорционален внешней нагрузке и не зависит от достигнутой деформации.

3. Вычисление критических деформаций, соответствующих потере несущей способности оболочки. Возможность устойчивого пластического деформирования материала обуславливается деформационным упрочнением, а причиной потери пластической устойчивости является недостаточно быстрый рост напряжений в диаграмме "деформация – напряжение". Рассмотрим условия, при которых оболочка прекращает устойчивое равномерное пластическое деформирование. В этот момент (ОПУПД) внешние нагрузки стабилизируются: $N = \text{const}$, $p = \text{const}$. Любое из условий

$$dN = 0,\quad dp = 0 \tag{3.1}$$

может служить критерием ОПУПД. С вычислительной точки зрения более удобным является критерий Свифта–Марциньяка [1], особенно в случаях, когда обращение зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, описывающей характер упрочнения, не имеет явного аналитического выражения, как например, зависимость (2.1) при $a \neq 0$ или $b \neq 0$. В то же время критерий (3.1) равносилен критерию Свифта–Марциньяка [1]. В случае ОПУПД критерий Свифта–Марциньяка сводится к равенству дифференциалов от σ_i, вычисленных по формулам (2.1) и (2.13), откуда получается уравнение для нахождения ε_i^* – интенсивности деформации, соответствующей моменту исчерпания устойчивости и потери несущей способности оболочки. Дифференцируя по ε_i выражения в правых частях (2.1) и (2.13), в силу сказанного получаем

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\varepsilon_i}+\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_i}+2\frac{d\varepsilon_\Theta}{d\varepsilon_i} = \frac{n}{\varepsilon_i}+a\varepsilon_i+b\varepsilon_i^2 \tag{3.2}$$

Используя формулы (2.10) и (2.5), перепишем (3.2) в виде

$$\frac{(2m-1)^2(m-2)}{4\xi^3}+\frac{3}{2\xi}=\frac{n}{\varepsilon_i}+a+2b\varepsilon_i$$

Когда упрочнение описывается законом (2.1) при $b=0$, последнее уравнение приводит к рекуррентному соотношению

$$\varepsilon_i^*=\frac{2\xi n}{(2m-1)^2(m-2)/(2\xi^2)+3-2a\xi} \tag{3.3}$$

В общем случае ($b\neq 0$) ε_i^* находится из соответствующего квадратного уравнения. Рекуррентность формулы (3.3) заключается в том, что параметры m и ξ зависят от ε_i. Первое приближение для значения ε_i^* получится, если положить в правой части (3.3) $m=m_0$.

Для вычисления второго приближения и оценки ошибки первого найдем приближенную зависимость m от ε_i. Аппроксимируем на отрезке [0.5, 2.5] функцию $\xi=$ $=\sqrt{m^2-m+1}$:

$$\xi\cong A(m+1),\quad A\in(0.5,\sqrt{3}/3) \tag{3.4}$$

При $A=\sqrt{3}/3$ получаем верхнюю, а при $A=0.5$ – нижнюю оценку. Уравнение (2.9) можно представить в виде

$$d\varepsilon_i=-2A\left(\frac{1}{2-m}+\frac{1}{2m-1}\right)dm$$

Используя начальное условие: $\varepsilon_i=0$ при $m=m_0$, после интегрирования и применения формул (2.6) и (2.8), получаем

$$\varepsilon_i\approx 2A(2\varepsilon_\Theta+\varepsilon_z),\quad 1<2A<1.155 \tag{3.5}$$

Выбор A зависит от промежутка, на котором аппроксимируется функция ξ. Из формул (2.12), (2.6), (2.8) и (3.5) находится связь коэффициента двухосности нагружения стенки трубы m и интенсивности деформации ε_i. Отбрасывая слагаемые третьей и выше степени относительно ε_i, получаем (промежуточные выкладки не приводим):

$$m\cong m_0-\frac{(2-m_0)(2m_0-1)}{3}\left(\frac{\varepsilon_i}{2A}-\nu\frac{\xi_i^2}{4A^2}\right) \tag{3.6}$$
$$\nu\approx\frac{1}{3}m_0^2-\frac{2}{3}m_0+\frac{1}{2}$$

Формула (3.6) выведена с использованием приближенного равенства (3.4), не приводящего к существенной ошибке при $m\in[0.5; 2.5]$. Положив, например, $2A=1.1$ и отбрасывая слагаемые второго порядка (ошибка $\approx$0.1%), получаем из (3.6):

$$m\approx m_0-\frac{(2-m_0)(2m_0-1)}{3.3}\varepsilon_i \tag{3.7}$$

Пусть, например, $m_0=1$ (тогда $\xi_0=1$), $a=0.25$. По формулам (3.3) и (3.7) при $m=m_0$ (первое приближение) $\varepsilon_i^*=n$, $m=1-0.3n$. Подставив в (3.3) найденное значение m, можно вычислить второе приближение: $\varepsilon_i^* = n - 0.11n^2$. Так как наиболее часто встречающиеся значения $n = 0.1 - 0.3$ для сталей, из последнего равенства следует, что уточнение значения ε_i^* при втором приближении составляет, в зависимости от показателя n, 1–3% в сторону уменьшения. Из этого примера видно, что итеративная последовательность значений ε_i^*, которую можно получить по формулам (3.3) и (3.6) или (3.7), сходится быстро, и уже второе приближение дает ответ с высокой точностью. Если считать ошибку в 1–3% несущественной, то достаточно и первого приближения. Это не означает, что изменение m в процессе нагружения мало влияет на величину ε_i^*. Если предположить, что $m = \text{const}$ при всех значениях m_0, допуская "незначительную" погрешность $\approx 0.3n$, то использование в качестве критерия общей потери устойчивости пластического деформирования первого из уравнений (3.1) приводит, на основании первой формулы (2.2), к зависимости вида $\sigma_i = C\exp\varepsilon_z$, а применение второго уравнения (3.1) – к формуле (2.13), что парадоксально, так как момент наступления пластической нестабильности при равномерном деформировании не связан с каким-либо направлением. В предположении о постоянстве m в обоих указанных случаях уравнение (3.2) выглядит иначе, так как теперь $d\xi = 0$, что приводит к существенно другим результатам: в первом случае $\varepsilon_i^* = 2\xi n(2n - 1 - 2a\xi)^{-1}$, во втором $\varepsilon_i^* = 2\xi n(3 - 2a\xi)^{-1}$.

Сравним полученную зависимость с результатами [3, 4, 8], основанными на теории малых упругопластических деформаций. При тех же допущениях, что при выводе формулы (3.3), за исключением условия (2.5), вместо которого в [3, 4, 8] использовалось условие $\varepsilon_z(2 - m) = \varepsilon_\Theta(2m - 1)$, там установлено, что

$$\varepsilon_i^* = \frac{2\xi_0 n}{(2m_0 - 1)^2(m_0 - 2)/(2\xi_0^2) + 3 - 2a\xi_0}$$

т.е. критическая деформация, вызывающая потерю устойчивости при равномерном пластическом деформировании, вычисленная в рамках теории малых деформаций, совпадает с первым приближением этой величины, полученным по теории течения (формула (3.3)).

Располагая значением критической интенсивности деформаций, можно вычислить критическое значение интенсивности напряжений по формуле (2.1), затем по формуле $\sigma_\Theta = \sigma_i/\xi$ значение кольцевых критических напряжений, и, как следствие, предельное давление в трубопроводе или тонкостенном сосуде давления по второй формуле (2.2). Если же величина давления задана, то по той же формуле можно вычислить минимальную толщину стенки оболочки. Это проделано в [3], где применялась теория малых упругопластических деформаций. С позиций данной работы результаты [3] получены в первом приближении. Хотя при наличии конкретных значений параметров соответствующие вычисления не представляют труда, в общем случае выражения для вычисления указанных величин труднообозримы и здесь не приводятся.

4. Вычисление критических деформаций, соответствующих образованию шейки. Рассмотрим теперь условия, при которых происходит ЛПД. При одновременном нагружении цилиндрической тонкостенной оболочки из материала с высокими пластическими свойствами растягивающей силой N и внутренним давлением p в некоторый момент возникает осевая либо кольцевая шейка, в зависимости от соотношения между N и p. Это случается, как правило, на стадии, когда оболочка уже находится в условиях пластической нестабильности, на некоторое время продолжает деформироваться равномерно.

Рассмотрим условия возникновения шейки [1]. Пусть напряжения σ_j ($j = 1$; 2) на сечении оболочки площади S_j, ортогональном главному j-му направлению (здесь $\sigma_1 = \sigma_z$, $G_1 = N$, $\sigma_2 = \sigma_\Theta$), определяются формулой $\sigma_j = G_j/S_j$, где G_j ($j = 1, 2$) – эффективные силы, действующие на этом сечении. Как известно, в процессе равномерной пластической деформации прирост напряжений из-за уменьшения площади какого-то "слабого" сечения оболочки компенсируется увеличением, по сравнению с неослабленным сечением, сопротивления материала пластическому деформированию вследствие упрочнения, что удерживает "слабое" сечение от ускоряющегося нарастания напряжений, возникновения шейки по этому сечению и разрушения. Однако в результате падения модуля упрочнения по мере развития пластических деформаций оболочки в целом элементарный прирост напряжения сопротивления в "слабом" сечении оказывается в какой-то момент меньше прироста напряжений вследствие изменения геометрии конструкции, т.е. оболочка теряет локальную устойчивость (критерий потери устойчивости пластического деформирования по Свифту–Марциньяку) и образуется шейка. Рассматривая два параллельных сечения, "ослабленное" и "стандартное", ортогональных одному из главных направлений, видно, что эффективные силы, действующие на эти сечения и зависящие как от внешних нагрузок, так и от изменяющихся геометрических параметров всей конструкции, одинаковы, а различие в напряжениях, действующих на этих сечениях, объясняется лишь изменением площади при переходе от одного сечения к другому. Таким образом, применяя принцип Свифта–Марциньяка к условиям образования шейки, следует считать, что сила G_j постоянна, а площадь сечения S_j находится в зависимости от достигнутой деформации. Отсюда, используя формулы (2.3) и (2.4), можно получить

$$\sigma_i = \frac{\xi}{m}\sigma_z = \frac{\xi}{m}\frac{G_1}{2\pi Rt} = \frac{\xi}{m}\frac{G_1 \exp\varepsilon_z}{2\pi R_0 t_0} \tag{4.1}$$

$$\sigma_i = \xi\sigma_\Theta = \xi\frac{G_2}{2lt} = \xi\frac{G_2\exp\varepsilon_\Theta}{2l_0 t_0} \tag{4.2}$$

Дифференцируя по ε_i правые части этих уравнений и уравнения (2.1), после приравнивания правых частей и использования равенств (2.5), получаем из (4.1) и (4.2) соответственно

$$\frac{2m-1}{2\xi} - \frac{1}{m}\frac{dm}{d\varepsilon_i} + \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\varepsilon_i} = \frac{n}{\varepsilon_i} + a + 2b\varepsilon_i \tag{4.3}$$

$$\frac{2-m}{2\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\varepsilon_i} = \frac{n}{\varepsilon_i} + a + 2b\varepsilon_i \tag{4.4}$$

Для определения интенсивности деформации ε_{iz}^s, при достижении которой возникает шейка под действием преимущественно растягивающей силы (кольцевая шейка), надо воспользоваться уравнением (4.3). Будем для простоты считать, что $b = 0$. Уравнение (4.3), используя (2.9) и (2.10), перепишем в виде

$$\frac{2m-1}{2\xi} - \frac{(2m-1)(m-2)}{2\xi m} + \frac{(2m-1)^2(m-2)}{4\xi^3} = \frac{n}{\varepsilon_i} + a$$

Откуда следует рекуррентное соотношение

$$\varepsilon_{iz}^s = \frac{2\xi n}{(2m-1)(1+(2-m)^2/(2\xi^2 m)) - 2\xi a} \tag{4.5}$$

Найдем величину интенсивности деформации $\varepsilon^s_{i\Theta}$, соответствующую возникновению продольной шейки (по образующей цилиндрической поверхности) под действием преимущественно внутреннего давления. Уравнение (4.4) переписывается в виде

$$\frac{2-m}{2\xi}+\frac{(2m-1)^2(m-2)}{4\xi^3} = \frac{n}{\varepsilon_i}+a$$

Откуда следует

$$\varepsilon^s_{i\Theta} = \frac{2\xi n}{(2-m)(1-(2m-1)^2/(2\xi^2))-2\xi a} \tag{4.6}$$

Формулы (4.5) и (4.6), так же как и (3.3), носят рекуррентный характер. В их правую часть входят величины m и ξ, зависящие от ε_i. В первом приближении ε^s_{iz} и $\varepsilon^s_{i\Theta}$ могут быть вычислены по (4.5) и (4.6), если в этих формулах положить $m = m_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$. Затем, для уточнения, зная первое приближение ε^s_i, можно по формулам (3.6) или (3.7) найти первое приближение для m (и, следовательно, для ξ), и снова применить (4.5) и (4.6) для вычисления второго приближения, и так далее. Рассмотрим пример, когда $m_0 = 1$, $\xi_0 = 1$, $a = 0.25$. Тогда по формулам (4.5) и (4.6), в которых принято $m = 1$, $\xi = 1$, получим, в первом приближении, $\varepsilon^s_{iz} = 2n$, $\varepsilon^s_{i\Theta} = \infty$, т.е. для возникновения кольцевой шейки нужна деформация порядка $2n$, а шейка по образующей при данных предположениях вообще возникнуть не может. По формуле (3.7) $m^s = 1 - 0.6n$, откуда во втором приближении $\varepsilon^s_{iz} = 2n(1 - 0.15n)$. При $n = 0.1$–0.3 уточнение во втором приближении составляет 1.5–4.5%, что свидетельствует о быстрой сходимости итеративной последовательности и возможности использовать уже первое приближение в качестве оценки интенсивности деформации, при которой появляется шейка.

Пусть $\varepsilon^s_i = \min(\varepsilon^s_{iz}, \varepsilon^s_{i\Theta})$. Ясно, что локализация пластической деформации наступит тогда, когда $\varepsilon_i = \varepsilon^s_i$. В зависимости от величины m_0 $\varepsilon^s_i = \varepsilon^s_{iz}$ (для “больших” значений m_0, $m_0 > m_0^*$), когда возникает кольцевая шейка, либо $\varepsilon^s_i = \varepsilon^s_{i\Theta}$, для значений m_0, “близких” к 1/2, $m_0 < m_0^*$, при появлении шейки по образующей. Пограничное значение m_0^* находится из уравнения $\varepsilon^s_{iz} = \varepsilon^s_{i\Theta}$, причем, если $\varepsilon^s_{iz} < \varepsilon^s_{i\Theta}$, то ожидается продольная шейка, если, наоборот, $\varepsilon^s_{iz} > \varepsilon^s_{i\Theta}$, то – поперечная (кольцевая). Уравнение $\varepsilon^s_{iz} = \varepsilon^s_{i\Theta}$ на основании формул (4.5), (4.6) решается относительно m. Получается $m^* = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$, причем, если $m < m^*$, то следует ожидать продольную шейку, а при $m > m^*$ – поперечную. Однако интерес представляет начальное значение m_0^*, от которого зависит “судьба” оболочки с точки зрения пластического (вязкого) разрушения. Для вычисления m_0^* воспользуется формулой (3.7), которую в данном случае запишем:

$$m_0^* = m^* + 0.3(2-m_0^*)(2m_0^*-1)\varepsilon_i^*$$

где $\varepsilon_i^* = 1.79n(1.10 - 1.79a)^{-1}$ – вычислено по (4.5) при $m = \sqrt{3} - 1$; подставляя в правой части вместо m_0^* значение m^*, находим m_0^* в первом приближении: $m_0^* = 0.73 + n(3.486 - 5.647a)^{-1}$. Например, при $a = 0.25$ поправка составляет $0.483n$, т.е. от 5 до 15%; при $a = 0$ она равна $0.287n$, т.е. порядка 3–9% в зависимости от величины показателя n. Вычисляя второе приближение, в случае $a = 0$ получаем $m_0^* = 0.73 + 0.287n + 0.261n^2$. Эти результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [2, с. 371], где $m_0^* = 0.82 - 0.93$. В [2] отмечено, что отличие m_0^* от единицы нельзя объяснить дефектами технологии. Более того, тонкостенные трубчатые образцы из стали Х18Н9Т обладали в опытах работы [2, с. 366–367] достаточно хорошей начальной изотропией материала. Поэтому предположение Е.А. Дэвиса [6] об анизотропии материала образцов как причине явления $m_0^* \neq 1$ не подтверждается. Е.А. Дэвис в [6] обратил внимание на непостоянство коэффициента m в процессе нагружения, но не использовал этот факт для объяснения обнаруженного явления. Полученные результаты отчасти объясняют не только эффект Е.А. Дэвиса, но и различие данных в [2] и [6]: значение m_0^* заметно зависит от деформационных свойств материала – параметров n и a.

Заметим, что пограничное значение m_0^*, вычисленное здесь на основании гипотезы (2.5), оказалось заметно ниже (до 20%) значения m_0^*, получающегося на основании теории малых упругопластических деформаций [4, 8].

5. Вычисление деформаций появления шейки для оболочек, содержащих неоднородности. Формулы (4.5) и (4.6) получены для идеальных оболочек. В действительности тонкостенные цилиндрические оболочки (сосуды давления, трубопроводы) могут содержать геометрические и механические неоднородности (например, утонения стенок на месте коррозийных пятен). Даже если эти области малы, на стадии равномерного неустойчивого пластического деформирования они могут повлиять на начало процесса локализации и разрушения.

Как отмечено в [1], условия локализации пластической деформации под действием, главным образом, растягивающей силы и под действием, в основном, внутреннего давления, существенно различаются. В первом случае значительная деформация компактного участка (в частности, утонение стенки) не разовьется в шейку, пока напряжения во всем кольцевом сечении, содержащем этот участок, не достигнут уровня, необходимого для начала процесса локализации деформации. Если оболочка нагружена в большей степени внутренним давлением, отдельные ослабленные участки могут деформироваться независимо от остальной части оболочки под действием напряжений, определяемых давлением, толщиной стенки и радиусом кривизны. Размеры ослабленной зоны в осевом направлении, при преимущественном действии внутреннего давления, меняются мало. Поэтому формула (4.2) может быть записана в измененном виде

$$\sigma_i = \frac{\xi G_2}{2lt} = \frac{\xi G_2}{2lt_0 \exp\varepsilon_r} = \frac{\xi G_2 \exp(\varepsilon_\Theta + \varepsilon_z)}{2lt_0}$$

Здесь, в отличие от (4.2), можно предположить, что длина l рассматриваемого участка в направлении оси остается постоянной при деформировании. Тогда вместо уравнения (4.4) получится

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\varepsilon_i} + \frac{1+m}{2\xi} = \frac{n}{\varepsilon_i} + a + 2b\varepsilon_i$$

или, если воспользоваться равенством (2.10):

$$\frac{1+m}{2\xi} + \frac{(2m-1)^2(m-2)}{4\xi^3} = \frac{n}{\varepsilon_i} + a$$

(для простоты считаем $b = 0$); откуда следует

$$\tilde{\varepsilon}^s_{i\Theta} = \frac{2\xi n}{(1+m)(1-(2m-1)^2(2-m)/[2(1+m)\xi^2]) - 2\xi a} \tag{5.1}$$

где $\tilde{\varepsilon}^s_{i\Theta}$ – критическая деформация в кольцевом направлении при наличии неоднородностей, заметно влияющих на процесс деформирования. Для таких оболочек пусть $\tilde{m}^*$ – пограничное значение параметра m: при $m < \tilde{m}^*$ возникает осевая шейка, при $m > \tilde{m}^*$ – кольцевая. Значение $\tilde{m}^*$ находится из уравнения $\varepsilon^s_{iz} = \tilde{\varepsilon}^s_{i\Theta}$. Используя уравнения (4.5) и (5.1), после упрощений получаем $\tilde{m}^* = 1$. Как и ранее, для вычисления начального пограничного значения $\tilde{m}_0^*$, воспользуемся формулой (3.7). Из (5.1) при $m = 1$ получаем $\tilde{\varepsilon}_i^* = n(0.75 - a)^{-1}$, откуда, по формуле (3.7), в первом приближении, $\tilde{m}_0^* = 1 + n(2.5 - 3.3a)^{-1}$. Например, при $a = 0.25$ отличие $\tilde{m}_0^*$ и $\tilde{m}^*$ составляет $0.597n$, т.е. от 6 до 18% при $n = 0.1$–0.3. Если $a = 0$, то $\tilde{m}_0^* - \tilde{m}^* = 0.4n$ – от 4 до 12%. Вычисляя второе приближение, в случае $a = 0$, получаем $\tilde{m}_0^* = 1 + 0.4n + 0.24n^2$, т.е. поправка при втором приближении – от нескольких тысячных до двух сотых. Ограничиваясь первым приближением, можем заметить, что смена направления разрушения происходит при $m_0 \approx 1.1$–1.2.

Для более пластичных материалов m_0^* еще больше. Анализ методом наименьших квадратов экспериментально полученной в [6] (см. также [5]) кривой "деформация–напряжение" показывает, что показатель упрочнения n для применявшихся в [6] для изготовления трубчатых образцов, имеет величину порядка $n = 0.40$–0.42. В этом случае (в предположении неидеальных образцов) в зависимости от величины параметра a из промежутка $a \in [0, 0.15]$ (более точно установить значение a по данным [6] не удалось). Полученный в [6] результат $\tilde{m}_0^* = 1.24$ попадает в указанный промежуток.

6. Заключение. Отметим некоторое различие в работе тонкостенных сосудов давления и магистральных трубопроводов в пластической зоне. Предположим, что в сосуде давления в результате нештатной ситуации (механические, температурные внешние воздействия, химические реакции и т.п.) интенсивность деформации стенки сосуда достигла критической величины ε_i^*. Тогда ОПУПД стенок повлечет увеличение объема сосуда, что может привести к сбросу давления (после прекращения действия причин аварийной ситуации) до наступления момента ЛПД, и оболочка не разрушится. При наличии внешних признаков ОПУПД (линии Чернова–Людерса, остаточные деформации в форме нелокальных выпучин и утонений стенки) можно оценить по формуле (3.3) величину и соотношение между имевшими место нагрузками. В трубопроводах внешние нагрузки не имеют обратной связи с изменяющейся геометрией ослабленного участка, так как внутреннее давление и осевая сила фактически зависят от условий работы глобального участка трубопровода, а не от степени деформированности ослабленного участка. Отсутствие обратного влияния деформаций на внешние воздействия и, значит, на величину действующих на ослабленном участке напряжений, при достижении момента ОПУПД приводит к быстрому и неизбежному переходу пластического деформирования трубопровода к этапу ЛПД, развитию шейки и разрушению.

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Критическая деформация ε_i^*, вызывающая потерю несущей способности оболочки, вычисленная в рамках теории малых деформаций [3, 4], совпадает с первым приближением этой величины, полученным по теории течения (формула (3.3)); второе приближение показывает, что в теории малых деформаций значение ε_i^* оказывается завышенным на 1–4%.

2. Вычислены деформации ε_{iz}^s и $\varepsilon_{i\Theta}^s$, вызывающие возникновение шейки в осевом и кольцевом направлениях соответственно; в первом приближении они совпадают с соответствующими деформациями, полученными на основе теории малых деформаций [8], а во втором приближении ниже на 1.5–6%.

3. При простом нагружении тонкостенной цилиндрической оболочки по условным напряжениям нагружение по истинным напряжениям оказывается сложным; другими словами, если N/p = const, то параметр двухосности нагружения $m = \sigma_z/\sigma_\Theta$ в общем случае изменяется. На оси m неподвижными точками являются 1/2, 2 и $\pm\infty$, причем, 1/2 и $+\infty$ – притягивающие, а 2 и $-\infty$ – отталкивающие. Количественно зависимость m от начального значения m_0 при известной величине накопленной пластической деформации может быть найдена по формулам (3.6) и (3.7).

4. Оценка пограничного значения коэффициента двухосности m_0^* в начальный момент нагружения, при котором меняется направление разрушения, полученная в данной работе в рамках теории течения, находится в соответствии с известными экспериментальными данными [2, 6]. Это значение существенно зависит от пластических свойств материала (параметров n и a) и качества изготовления образцов.

5. Результаты можно использовать для вычисления величины критического давления в магистральных трубопроводах и тонкостенных сосудах давления, приводящего к потере несущей способности конструкции, а также к вычислению по заданному давлению минимальной толщины стенки трубы большого диаметра или другой тонкостенной оболочечной конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковальчук Б.И.* К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек // Пробл. прочности. 1983. № 5. С. 11–17.
2. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 416 с.
3. *Дильман В.Л., Остсемин А.А.* О влиянии двухосности нагружения на несущую способность магистральных газонефтепроводов // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 179–185.
4. *Дильман В.Л.* О потере пластической устойчивости деформирования трубопроводов // Изв. Челябин. науч. центра. 2000. Вып. 2. С. 4–7.
5. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
6. *Дэвис Е.А.* Рост напряжений с изменением деформаций // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
7. *Новожилов В.В.* Вопросы механики сплошной среды. Л.: Судостроение, 1989. 398 с.
8. *Дильман В.Л., Остсемин А.А.* О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 5. С. 50–57.

Челябинск

Поступила в редакцию
8.07.2003