

УДК 539.375

© 2005 г. Д.А. ИНДЕЙЦЕВ, В.Н. НАУМОВ, Е.И. ПРОКУРАТОВА

**ВЛИЯНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗРУШЕНИЯ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ
В СТЕРЖНЕ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ¹**

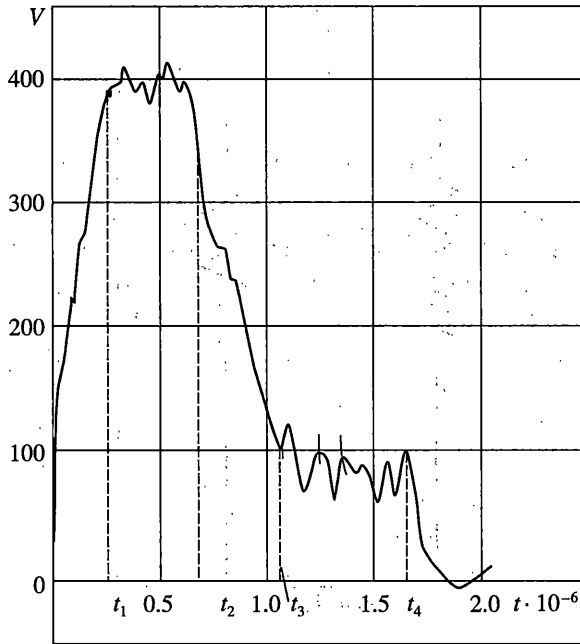
На основе двухкомпонентной модели деформируемого твердого тела изучается распространение волн в стержне сложной структуры. Предполагается, что первая материальная компонента стержня является линейно-упругой. Вторая компонента содержит реологические элементы разрушения, которые в зависимости от напряжений, либо являются недеформируемыми, либо полностью утрачивают свою несущую способность. На конце стержня $x = 0$ задается кинематическое нагружение. Волна, отраженная от свободного конца $x = L$, движется в обратном направлении по материалу, во второй компоненте которого произошли структурные изменения. Результаты численного решения использованы при анализе экспериментальных данных, полученных при импульсном нагружении металлических мишеней ударником конечных размеров. Качественное совпадение экспериментальных данных и результатов теоретических модельных расчетов указывает на возможность применения модели для анализа динамических процессов в телах со сложной структурой.

1. Введение. В настоящее время большое внимание уделяется исследованию волновых процессов в материалах с неоднородной внутренней структурой. В частности, в [1, 2] экспериментально и теоретически изучается прохождение ударной волны через металлическую мишень. Измерение скорости точек свободной поверхности мишени дает типичную зависимость, изображенную на фиг. 1.

На профиле скорости наблюдаются осцилляции примерно одного периода, максимальная амплитуда которых достигается на верхнем и нижнем плато. Микроструктурный анализ поперечных разрезов мишеней указывает на изменение внутренней структуры материала вблизи гладкой поверхности отражения. В связи с этим возникает предположение, что осцилляции профиля скорости связаны с формированием неоднородной внутренней структуры. Теоретическое моделирование подобных процессов часто связано с необходимостью описания внутренних границ и является достаточно сложным. Однако для объяснения ряда экспериментально обнаруженных эффектов можно воспользоваться упрощенными континуальными моделями материалов с внутренней структурой. Публикуемая работа является попыткой моделирования влияния изменения внутренней структуры материала на волновые процессы при ударном нагружении. В настоящее время можно выделить два направления исследования структурных превращений в рамках механики деформируемого тела. Первое направление связано с явным введением подвижных внутренних границ и изучением устойчивости и механического поведения двухкомпонентных структур при внешнем статическом или динамическом воздействии [3–6].

Ко второму направлению можно отнести работы, связанные с разработкой феноменологических моделей, основанных на введении дополнительных параметров, ха-

¹ Работа выполнена в рамках программы ОЭМПУ РАН (см. стр. 188).



Фиг. 1

рактизирующих особенности системы “в среднем” и обуславливающих возможность возникновения фазовых превращений. Данная работа относится ко второму направлению. Особенностью данного подхода является введение в феноменологическую модель реологических элементов разрушения. При этом фактически рассматривается двухкомпонентная среда, т.е. предполагается наличие в каждой точке пространства двух материальных компонент с различными механическими свойствами.

2. Простейшая одномерная реологическая модель. Рассмотрим реологическую модель, состоящую из двух параллельно соединенных ветвей, фиг. 2. Одна ветвь содержит линейный упругий элемент жесткости E_1 . Другая – последовательную цепочку линейного упругого элемента жесткости E_2 и элемента разрушения с пределом прочности σ_{2*} .

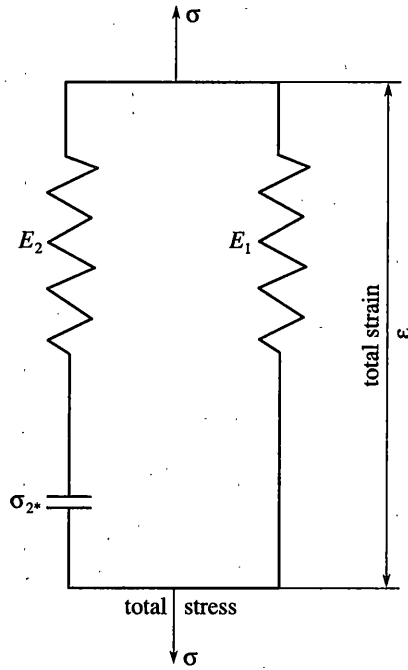
Элемент разрушения в данной модели представляет собою недеформируемую связь до тех пор, пока напряжение в нем не достигнет предельного разрушающего значения σ_{2*} . Кажется естественным воспринимать разрушение этого элемента при однонаправленном деформировании, растяжении или сжатии.

Рассмотрим квазистатическое монотонное кинематическое нагружение модели из естественного состояния. Зависимость $\sigma \sim \epsilon$ записывается следующим образом:

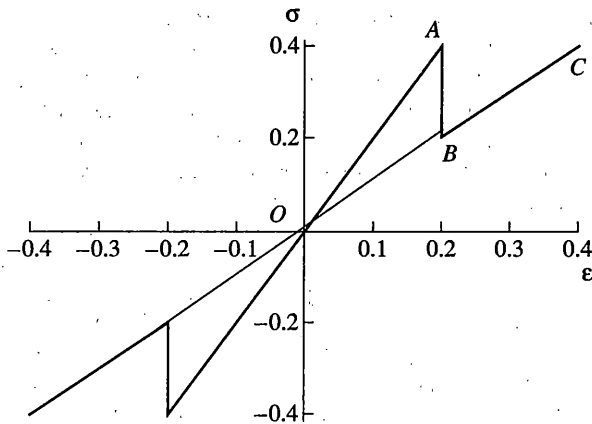
$$\sigma = \begin{cases} (E_1 + E_2)\epsilon, & |\sigma_2| \leq \sigma_{2*} \leftrightarrow |\epsilon| \leq \sigma_{2*}/E_2 = \epsilon_* \\ E_1\epsilon, & |\epsilon| > \sigma_{2*}/E_2 = \epsilon_* \end{cases} \quad (2.1)$$

Графическое изображение этой зависимости схематично представлено на фиг. 3.

Диаграмма состоит из прямолинейных участков ломаной: OA – до срабатывания элемента разрушения, BC – после срабатывания. Потенциальная энергия деформации при $\epsilon = \epsilon_* - 0$, т.е. в состоянии непосредственно до срабатывания элемента разрушения, равна $\Pi = (E_1 + E_2)\epsilon_*^2/2$. Сразу после срабатывания элемента разрушения



Фиг. 2



Фиг. 3

($\epsilon = \epsilon_* + 0$), потенциальная энергия деформации $\Pi = E_1 \epsilon_*^2 / 2$. Разность этих значений составляет $\Delta\Pi = E_2 \epsilon_*^2 / 2$. Под структурным превращением материала понимается переход его из одного устойчивого состояния в другое. Такой переход наблюдается в рассматриваемой модели при возрастании деформации от значения $\epsilon = \epsilon_* - 0$ до $\epsilon = \epsilon_* + 0$.

Изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ можно связать с затратами на структурные преобразования в деформируемом материале. Однако, реологическая модель в

том виде, как она изображена на фиг. 2, не дает представления о механизме этого преобразования. Именно эта неопределенность является препятствием для использования рассматриваемой реологической модели при описании явлений, связанных с фазовыми превращениями в материале. Этот недостаток модели отмечается и подробно анализируется в работе [7]. Автор статьи приходит к тому выводу, что без учета микроструктуры материала невозможно получить однозначное решение задачи о динамическом поведении тела, реологическая модель которого содержит элемент разрушения.

Поведение элемента при обратном деформировании, т.е. при сжатии или растяжении соответственно можно описать с помощью дополнительных предположений. Пусть состояние материала отвечает точке C на диаграмме фиг. 3.

Как будет вести себя материал при обратном деформировании? Возможны несколько вариантов дальнейшего поведения. Первый вариант соответствует зависимости, изображаемой прямой $СВО$. Это означает, что элемент разрушения, разрушившись, не “залечивается”. Таким образом, при всех дальнейших нагружениях и разгрузках материал ведет себя чисто упруго с коэффициентом жесткости E_1 . При этом энергия, затраченная на структурные преобразования, не возвращается. Обратного перехода к первоначальному состоянию материала не происходит. Основанием для данного предположения может служить тот экспериментально наблюдаемый факт, что процесс фазовых превращений в телах при механической деформации носит однонаправленный характер. Обратное же фазовое превращение осуществляется обычно при помощи изменения температурного режима, воздействия электрических полей и так далее.

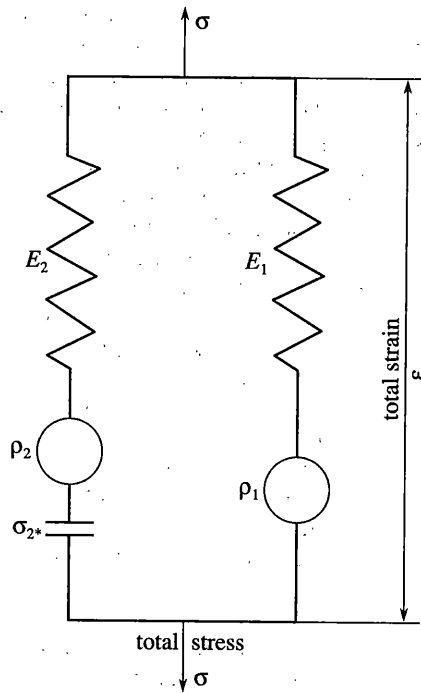
Вторым вариантом поведения материала является реализация при разгрузке зависимости в виде ломаной $СВАО$. В этом случае считается, что при обратном деформировании соответствующий реологический элемент полностью восстанавливает свою несущую способность, т.е. “залечивается”. При реализации этого предположения энергия, затраченная на структурные превращения, возвращается в виде потенциальной энергии деформации. В этом случае зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ при произвольных деформациях записывается формулой (2.1). Конечно, такое поведение материала является чистой идеализацией.

Можно, кроме того, предполагать, что “излишек” потенциальной энергии переходит в тепло. Однако остается неизвестным, каков в данном случае механизм перевода энергии в тепло. С точки зрения рациональной механики, недостатком данной модели является следующий факт: срабатывание элемента разрушения снимает напряжение с упругого элемента E_2 . Поскольку реологическим элементам данной модели не приписывается никакая масса, то упругий элемент E_2 в результате станет совершать колебания с бесконечной частотой, что лишено физического смысла.

3. Элементарная структурно-реологическая модель. Для устранения указанного недостатка введем в обе ветви модели фиг. 2 элементы массы ρ_1 и ρ_2 . Таким образом рассмотренная ранее реологическая модель преобразуется к виду, представленному на фиг. 4. Заметим, что данная модель не является реологической моделью в том смысле, что она не определяет свойства среды в каждой материальной точке при любом уровне деформации, а отражает поведение множества материальных точек, занимающих пространственную область определенного размера. Такую модель далее будем называть структурно-реологической ибо она представляет структурную ячейку одномерного тела.

В соответствии с данной феноменологической моделью в каждой элементарной ячейке деформируемого тела при срабатывании элемента разрушения происходит структурная перестройка, вызывающая как перераспределение реологических характеристик, так и перераспределение масс, движущихся различным образом.

Отметим еще одну особенность введенной структурно-реологической модели. Даже при квазистатическом деформировании при срабатывании элемента разрушения в элементарной структурной ячейке деформируемого тела возбуждаются колеба-



Фиг. 4

ния. Т.е. процесс частичного разрушения деформируемого тела носит динамический характер. Часть массы материала, являющегося “носителем” упругого свойства E_1 , вовлекается в колебания. Таким образом, при срабатывании элемента разрушения часть потенциальной энергии деформации расходуется на структурное преобразование, а другая часть на возбуждение колебаний.

4. Структурно-реологическая модель двухкомпонентного стержня. Обратимся теперь к изучению поведения одномерного стержня сложной структуры, построенного на основе структурно-реологической модели (фиг. 4).

Рассмотрим сначала одномерную дискретную цепочку, изображенную на фиг. 5.

Элементарные ячейки в данной схеме содержат дополнительные упругие и вязкие элементы, связывающие сосредоточенные массы.

Динамические уравнения, описывающие поведение такой дискретной цепочки, имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_{1k} &= -c_1(u_{1k} - u_{1k-1}) - c_1(u_{1k} - u_{1k+1}) \\ m_2 \ddot{u}_{2k} &= -c_2(u_{2k} - u_{2k-1}) - c_2(u_{2k} - u_{2k+1}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

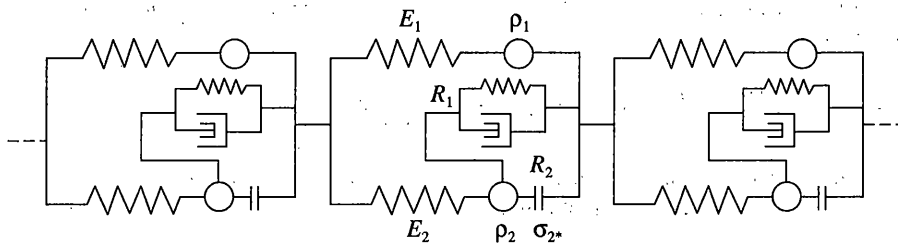
При условии $u_k = u_{1k} \equiv u_{2k}$ получаем

$$(c_1 + c_2)(u_{1k+1} - u_{1k}) + (c_1 + c_2)(u_{1k} - u_{1k-1}) - (m_1 + m_2)\ddot{u}_{1k} = 0 \quad (4.2)$$

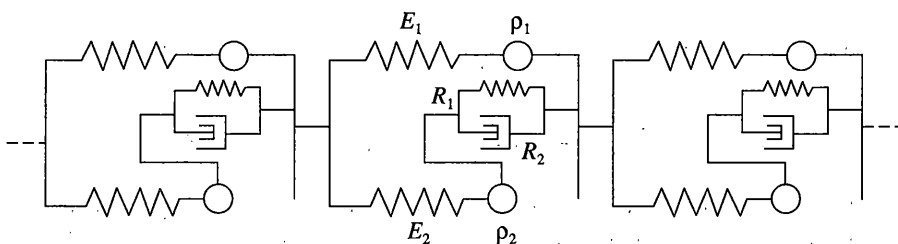
или

$$\frac{(c_1 + c_2)(u_{k+1} - u_k)/l - (u_k - u_{k-1})/l}{S} - \frac{m_1 + m_2}{lS} \ddot{u}_k = 0 \quad (4.3)$$

где l – размер элементарной ячейки.



Фиг. 5



Фиг. 6

Предполагая размер l малым, вместо уравнения (4.3) запишем приближенное континуальное уравнение динамики стержня

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \ddot{u} = 0, \quad E = \frac{(c_1 + c_2)l}{S}, \quad \rho = \frac{m_1 + m_2}{Sl} \quad (4.4)$$

Здесь $u(x, t) = u_{1k} = u_{2k}$ – перемещения в сечении стержня сложной структуры, E – продольная жесткость стержня, ρ – плотность “материала” стержня сложной структуры, S – площадь поперечного сечения стержня.

Континуальное уравнение (4.4) является приближенным, поскольку в соотношении (4.3) нет возможности совершить строгий предельный переход при $l \rightarrow 0$.

Таким образом в сечениях, в которых не сработали элементы разрушения, уравнение движения стержня совпадает с уравнением динамики обычного одномерного упругого однородного стержня.

Обратимся теперь к дискретной модели, изображенной на фиг. 6. Подобные модели рассматриваются в работах [8–10]. Уравнения движения соответствующих сосредоточенных масс имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_{1k} &= -c_1(u_{1k} - u_{1k-1}) - c_1(u_{1k} - u_{1k+1}) - c_2(u_{1k} - u_{2k+1}) - r_1(u_{1k} - u_{2k}) - r_2(\dot{u}_{1k} - \dot{u}_{2k}) \\ m_2 \ddot{u}_{2k} &= -c_2(u_{2k} - u_{1k-1}) + r_1(u_{1k} - u_{2k}) + r_2(\dot{u}_{1k} - \dot{u}_{2k}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{c_1 l (u_{1k+1} - u_{1k}) / l - (u_{1k} - u_{1k-1}) / l}{S} - \frac{m_1 \ddot{u}_{1k}}{Sl} - \frac{c_2}{Sl} (u_{1k} - u_{2k}) \\ & + \frac{c_2 u_{2k+1} - u_{2k}}{S l} - \frac{r_1}{Sl} (u_{1k} - u_{2k}) - \frac{r_2}{Sl} (\dot{u}_{1k} - \dot{u}_{2k}) = 0 \\ & - \frac{m_2 \ddot{u}_{2k}}{Sl} - \frac{c_2 u_{2k} - u_{1k-1}}{S l} + \frac{r_1}{Sl} (u_{1k} - u_{2k}) + \frac{r_2}{Sl} (\dot{u}_{1k} - \dot{u}_{2k}) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

В предположении малости размера l , второе слагаемое 2-го уравнения (4.6) можно представить в виде

$$\frac{c_2}{S} \left(\frac{u_{2k} - u_{1k}}{l} + \frac{u_{1k} - u_{1k-1}}{l} \right) \approx -\frac{c_2}{Sl} (u_{2k} - u_{1k}) + \frac{c_2}{S} \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (4.7)$$

Учитывая соотношение (4.7), дискретные уравнения (4.6) можно заменить приближенными континуальными уравнениями

$$E_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \rho_1 \ddot{u}_1 - R_1 (u_1 - u_2) - R_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \frac{E_2}{l} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$-\rho_2 \ddot{u}_2 + R_1 (u_1 - u_2) + R_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \frac{E_2}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

$$E_1 = \frac{c_1 l}{S}, \quad E_2 = \frac{c_2 l}{S}, \quad \rho_1 = \frac{m_1}{Sl}, \quad \rho_2 = \frac{m_2}{Sl}, \quad R_1 = \frac{r_1}{Sl} + \frac{c_2}{Sl}, \quad R_2 = \frac{r_2}{Sl}$$

Здесь E_1, E_2 – продольные жесткости материальных компонент стержня, ρ_1, ρ_2 – плотности компонент стержня, R_1, R_2 – коэффициенты упруговязкой связи между компонентами стержня сложной структуры.

В силу невозможности совершить предельный переход при $l \rightarrow 0$ континуальные уравнения (4.8) следует считать приближенными.

Таким образом динамика стержня сложной структуры до момента срабатывания элементов разрушения описывается уравнением (4.4). После срабатывания элементов разрушения динамическое поведение стержня описывается уравнениями (4.8). Причем, в этом случае материал ведет себя как двухкомпонентная среда.

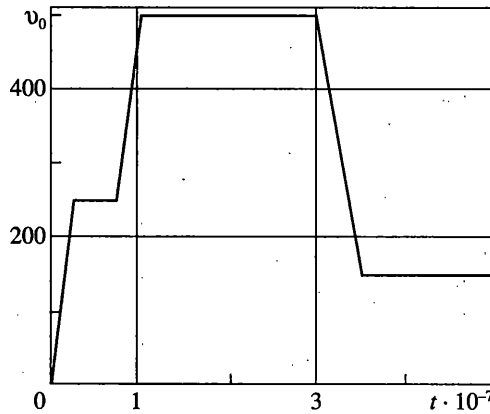
5. Распространение волнового импульса в стержне с изменяющейся внутренней структурой. На основе полученных континуальных уравнений была решена задача о распространении ударного волнового импульса в стержне конечной длины L со сложной внутренней структурой. При этом предполагалось, что на конце $x = 0$ стержень нагружается кинематическим импульсом

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = v_0(t) \quad (5.1)$$

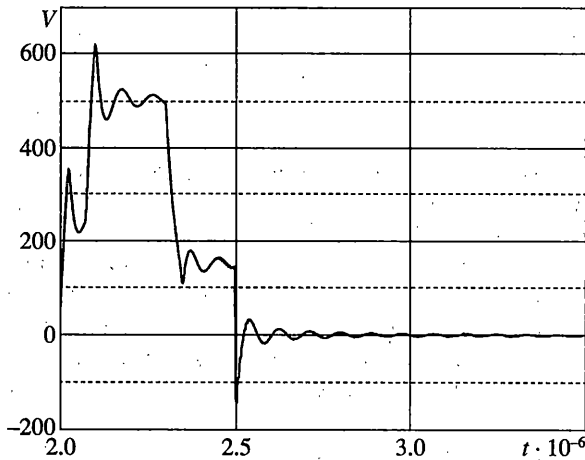
Рассматриваемая модельная задача не может полностью отражать условия нагружения и свойства конкретного экспериментального материала, поэтому форма волнового импульса, отражающегося от свободного конца стержня $x = L$ выбирается подобной форме импульса, наблюдаемого в эксперименте.

Распространение падающего волнового импульса от сечения $x = 0$ к концу стержня $x = L$ описывается уравнением (4.4). Предполагается, что прямой волновой импульс является импульсом сжатия. Поэтому при его прохождении структурной перестройки “материала” стержня не происходит. Конец стержня $x = L$ считается свободным. Отраженный волновой импульс становится импульсом растяжения. Предполагается также, что при интенсивном растяжении происходит структурная перестройка “материала” стержня, т.е. происходит срабатывание реологических элементов разрушения 2-й материальной компоненты.

Отметим, что срабатывание элементов разрушения происходит при прохождении импульса растяжения. Однако в данной работе для упрощения считается, что падающая волна сжатия движется по стержню без структурных преобразований (фиг. 5), а отраженный импульс растяжения распространяется по стержню, во второй компоненте которого все реологические элементы сработали (фиг. 6). Естественно, такое пред-



Фиг. 7



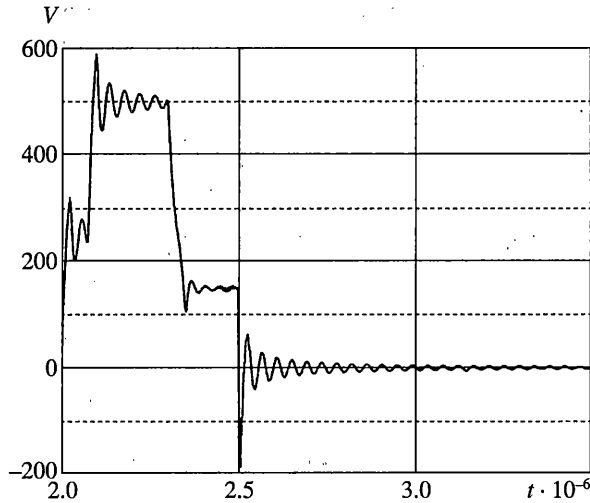
Фиг. 8

положение вносит определенную погрешность в решение задачи о динамическом поведении стержня, в котором возможны структурные преобразования. Эта погрешность связана с тем, что в окрестности свободного конца стержня происходит взаимодействие падающей и отраженной волн. При этом падающая волна распространяется в исходном, не преобразованном материале, а отраженная – в материале, подвергшемся структурному преобразованию. В действительности же падающая волна, подходящая к свободному концу стержня, переходит из области исходного материала в область материала преобразованного.

Итак, в соответствии с принятыми предположениями, распространение прямого волнового импульса $u_d(x, t) = u(x, t)$ описывается уравнением (4.4) с граничным условием (5.1). Обратный волновой импульс $u_{r1}(x, t)$, $u_{r2}(x, t)$ описывается уравнениями (4.8) и удовлетворяет граничному условию

$$E_1 \frac{\partial u_{r1}(L, t)}{\partial x} = -E \frac{\partial u_d(L, t)}{\partial x} \quad (5.2)$$

где $u_d(x, t)$ – перемещение в падающей волне. Отметим, что перемещение $u_{r2}(x, t)$ отсутствует в формулировке последнего граничного условия, поскольку при срабаты-



Фиг. 9

вании элементов разрушения вторая материальная компонента теряет свою несущую способность (фиг. 6) и представляет собой непрерывное множество точек, не взаимодействующих друг с другом.

В качестве удобного аппарата вычислений принято преобразование Лапласа. При получении численных результатов были использованы следующие физические характеристики: $E \approx 1 \cdot 10^{11}$ Н/м² – модуль Юнга, $\rho \approx 4 \cdot 10^3$ кг/м³ – плотность, $L \approx 10 \cdot 10^{-3}$ м – длина стержня, $R_1 \approx 5 \cdot 10^{18}$ Н/м⁴, $R_2 \approx 1 \cdot 10^7$ Нс/м⁴ – коэффициенты упруговязкой связи между материальными компонентами модельного стержня, $l \approx 100 \cdot 10^{-6}$ м – размер структурной ячейки.

В качестве нагружающего импульса на конце стержня $x = 0$ был выбран полигональный импульс (фиг. 7) со скоростью $v_0 \approx 500$ м/с. Длительность импульса нагружения оценивается как $\Delta t \approx 0.5 \cdot 10^{-6}$ с. Зависимость массовой скорости частиц стержня от времени при $E_1 = 0.5 \cdot 10^{11}$, $E_2 = 0.5 \cdot 10^{11}$, $\rho_1 = 2 \cdot 10^3$, $\rho_2 = 2 \cdot 10^3$ и $E_1 = 0.5 \cdot 10^{11}$, $E_2 = 0.5 \cdot 10^{11}$, $\rho_1 = 3.75 \cdot 10^3$, $\rho_2 = 0.25 \cdot 10^3$ приведены на фиг. 8, 9 соответственно. Сравнивая результаты моделирования с данными экспериментов по ударному нагружению мишеней выполненных из материалов с аналогичными физическими характеристиками, можно сделать следующие выводы:

даже при данном упрощенном модельном подходе на свободном конце стержня наблюдаются осцилляции на профиле массовой скорости частиц стержня $v_m = (v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$; с уменьшением плотности второй материальной компоненты частота осцилляций возрастает;

изменение параметров межкомпонентной жесткости не влияет на характерные осцилляции профиля скорости;

качественное совпадение результатов модельного расчета с экспериментальными данными указывает на возможность использования данной модели для описания динамических процессов в материалах сложной структуры.

Авторы выражают благодарность РАН Морозову Н.Ф. за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mescheryakov Yu.I., Divakov A.K., Zhigacheva N.I.* Shock-induced phase transform and vortex instabilities in shock loaded titanium alloys // *Shock Waves*. 2000. № 10. P. 43–56.
2. *Mescheryakov Yu.I., Divakov A.K., Zhigacheva N.I.* Role of Mesostructure effects in Dynamic plasticity and strenght of Ductile Steels // *Mater. Phys. Mech.* 2001. № 3. P. 63–100.
3. *Морозов Н.Ф., Фрейдлин А.Б.* Равновесие двухфазного поля деформаций в упругих тела // Тр. 27. Шк. анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем. С-Пб, 2000. С. 497–516.
4. *Zhong.* Dynamic behavior of Interface Between Two Solid Phases in Elastic Bar // *J. Elastic.* 1995. V. 41. P. 39–72.
5. *Gurtin M.E., Paolo-Guidugli P.* On configuration Internal forces at a Phase Inter-face // *J. Elastic.* 1996. V. 44. P. 225–269.
6. *Abeyratne D.R., Knowles J.K.* Dynamics of Propagating Phase Boundaries // *Arch. Rational. Mech. Anal.* 1994. V. 126. P. 203–230.
7. *Slepyan L.I.* Feeding and dissipative waves in fracture and phase transition II, Phase-transition waves // *J. Mechan. and Phys. Solids*. 2001. V. 49. P. 513–550.
8. *Пальмов В.А.* Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 348 с.
9. *Palmov V.* Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Berlin: Springer, 1998.
10. *Balky A.M., Cherkaev A.V., Slepyan L.I.* Dynamics of chains with nonmonotone stress-strain relations. 1. Model and Numerical Experiments // *J. Phys. Mech. Solids*. 2001. V. 49. P. 131–148.
11. *Balky A.M., Cherkaev A.V., Slepyan L.I.* Dynamics of solids with nonmonotone stress-strain relations. 2. Nonlinear Waves and Waves of Phase Transition // *J. Phys. Mech. Solids*. 2001. V. 49. P. 149–171.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
10.02.2005