МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 517.947.44

© 2005 г. А.В. КОРОСТЕЛЕВ, О.Н. ТУШЕВ

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одной из основных целей теории чувствительности динамических систем является определение функций чувствительности фазовых координат. Известным приемом, широко описанным в литературе, является дифференцирование системы уравнений движения по параметрам, чувствительность по которым анализируется. В результате образуются цепочно-связанные системы дифференциальных уравнений относительно функций чувствительности различного порядка. При большом их количестве задача становится слишком громоздкой и резко возрастает объем вычислений, в особенности, для функций чувствительности второго порядка. С другой стороны для инженерных приложений этот аппарат оказывается излишне информативным, поскольку в большинстве практических задач требуется определение чувствительности только некоторых фазовых координат и не по всем параметрам.

В настоящей статье предлагается подход, лишенный этого недостатка, т.к. не требует интегрирования цепочных систем дифференциальных уравнений. При этом в процессе вывода не делается никаких упрощающих допущений. В рассмотрение вводится вектор инвариантов – новых переменных, которые не зависят от функций чувствительности. При этом любая из них (первого или второго порядка) независимо друг от друга выражается в интегральной форме через указанные переменные. Для определения последних получена система линейных дифференциальных уравнений такой же размерности, что и вектор фазовых координат.

В настоящее время методы определения параметрической чувствительности динамических систем для различных классов задач в основном хорошо разработаны и широко освещены в литературе. Отметим только, например, работу [1], где подробно изложены методы нахождения функций чувствительности систем, описываемы обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Здесь развиваются результаты, представленные в [2] и полученные применительно к задачам идентификации. Использование подобного подхода в рассматриваемом классе задач представляет определенный теоретический интерес и позволяет существенно рационализировать процесс вычислений функций чувствительных фазовых координат.

Рассмотрим систему, движение которой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t), \quad \mathbf{X}(t_0, \mathbf{A}) = \mathbf{X}_0(\mathbf{A}) \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор фазовых координат системы, $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t) = (f_1(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t), f_2(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t), \ldots, f_n(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t))^T$ – вектор нелинейных функций, $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T$ – вектор параметров.

Предполагается, что $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{A}, t)$ и $\mathbf{X}_0(\mathbf{A})$ являются однозначными функциями своих аргументов, а для системы (1) выполняются условия существования и единственности решения при допустимых значениях вектора $\mathbf{A}$.

Для дальнейших рассуждений необходимо, чтобы вектор фазовых координат в начальный момент времени t_0 не зависел от вектора параметров $\mathbf{A}$. Для этого введем в рассмотрение новую переменную

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y} + \mathbf{X}_0, \mathbf{A}, t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = 0 \tag{3}$$

или в скалярной интегральной форме

$$y_k = \int_{t_0}^{t_f} f_k(\mathbf{Y} + \mathbf{X}_0, \mathbf{A}, \tau)d\tau, \quad y_k(t_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

где y_k – элементы вектора $\mathbf{Y}$.

Таким образом, необходимо определить

$$\frac{dy_k}{da_j}, \frac{d^2y_k}{da_ida_j} \; (k = 1, 2, \ldots, n; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

через которые на основании (2) выражаются функции чувствительности фазовых координат x_k:

$$dx_k/da_j = dy_k/da_j + dx_{0k}/da_j$$

$$\frac{d^2x_k}{da_ida_j} = \frac{d^2y_k}{da_ida_j} + \frac{d^2x_{0k}}{da_ida_j}$$

где x_{0k} – элементы вектора $\mathbf{X}_0$.

Введем в рассмотрение некоторую b, под которой будем понимать любую фазовую координату (4)

$$b = \int_{t_0}^{t_f} h(\mathbf{Y} + \mathbf{X}_0, \mathbf{A}, \tau)d\tau \tag{5}$$

где $h(\ldots)$ – явная функция своих аргументов.

В дальнейшем используем обозначения Эйнштейна для сумм. Если буквенный индекс появляется дважды в одном и том же произведении, автоматически следует понимать, что осуществляется суммирование по этому индексу, например, $c_{ij}d_i$ означает $\sum_i c_{ij}d_i$.

Продифференцировав (5) по α_j, получим

$$\frac{db}{da_j} = J_1 + \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial h}{\partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_j} + \frac{\partial h}{\partial a_j}\right)d\tau \tag{6}$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial h}{\partial y_s}\frac{dy_s}{da_j}d\tau \tag{7}$$

Все производные в (6) и (7) могут быть найдены аналитически, за исключением dy_s/da_j в (7), прямое определение которых и связано с указанными выше трудностями.

Введем в рассмотрение новые переменные λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и запишем (7) в следующем виде:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_{0s}} \frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial f_k}{\partial a_i} \right) d\tau \tag{8}$$

где все производные выражаются аналитически.

Продифференцировав (3) по a_j и перегруппировав члены левой и правой частей, получим

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_{0s}} \frac{dx_{0s}}{da_j} + \frac{\partial f_k}{\partial a_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_k}{da_j}\right) - \frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{dy_s}{da_j} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

Подставим (9) в (8), тогда

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_k \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy_k}{da_j}\right) d\tau - \int_{t_0}^{t_f} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_s} \frac{dy_k}{da_j} d\tau \tag{10}$$

Проигнорировав первый член в (10) по частям и изменив немые индексы во втором, получим

$$J_1 = \left[\lambda_k \frac{dy_k}{da_j}\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d\lambda_k}{d\tau} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} \right) \frac{dy_k}{da_j} d\tau \tag{11}$$

Для того чтобы соотношения (7) и (11) были идентичны, необходимо выполнение условий

$$\left[\lambda_k \frac{dy_k}{da_j}\right]_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d\lambda_k}{dt} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

Выполнение условия

$$\frac{dy_k}{da_j}(t_0) = 0$$

обеспечивает преобразование (2). Для удовлетворения равенства (11) необходимо, чтобы

$$\lambda_k(t_f) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

Выражение (14) следует рассматривать как начальное условие для интегрирования системы дифференцированных уравнений (13) относительно инвариантов λ_k в обратном времени от t_f до t_0. После их вычисления не представляет сложности, используя (8) и (6), определить любую функцию чувствительности db/da_j независимо от других. В результате $n \times m$ уравнений чувствительности первого порядка можно заменить n сопряженными уравнениями (13).

Далее определим функции чувствительности второго порядка. Для этого продифференцируем соотношение (6) по параметру α_i:

$$\frac{d^2b}{da_ida_j} = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_c \partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_c \partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_c \partial a_i}\right)\frac{dy_c}{da_j}d\tau + J_2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_{0c}\partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_{0c}\partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_{0c}\partial a_i}\right)\frac{dx_{0c}}{da_j}d\tau + \tag{15}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial h}{\partial x_{0c}}\frac{d^2x_{0c}}{da_ida_j}d\tau + \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial a_j \partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial a_j\partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial a_i \partial a_j}\right)d\tau$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial h}{\partial y_s}\frac{d^2y_s}{da_ida_j}d\tau \tag{16}$$

Трудности определения функций чувствительности второго порядка заключаются в присутствии в подынтегральном выражении (16) производных d^2y_s/da_ida_j. Все остальные элементы соотношений (15) и (16) либо находятся аналитически, либо являются функциями чувствительности первого порядка.

После дифференцирования (9) и a_i и перестановки слагаемых, получим

$$z_k(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y_k}{da_ida_j}\right) - \frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{d^2y_s}{da_ida_j} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

$$z_k(t) = \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_c\partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_c \partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_c\partial a_i}\right)\frac{dy_c}{da_j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{0c}\partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{0c}\partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{0c}\partial a_i}\right)\frac{dx_{0c}}{da_j} +$$

$$+\frac{\partial f_k}{\partial x_{0c}}\frac{d^2x_{0c}}{da_ida_j} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j\partial y_s}\frac{dy_s}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j\partial x_{0s}}\frac{dx_{0s}}{da_i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j \partial a_i}$$

Рассуждая аналогично, как и при вычислении коэффициентов чувствительности первого порядка, для J_2 запишем следующее соотношение:

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f}\lambda_k z_k(\tau)d\tau \tag{18}$$

где λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – новые переменные, введение которых имеет тот же смысл, что и при нахождении функций чувствительности первого порядка.

Подстановка (17) в (18) дает

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f}\lambda_k\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d^2y_k}{da_ida_j}\right)d\tau - \int_{t_0}^{t_f}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{d^2y_k}{da_ida_j}d\tau \tag{19}$$

Интегрируя первое слагаемое в (19) по частям и изменяя во втором немые индексы, получим

$$J_2 = \left[\lambda_k \frac{d^2 y_k}{da_i da_j}\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d\lambda_k}{d\tau} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k}\right) \frac{d^2 y_k}{da_i da_j} d\tau \tag{20}$$

Из требования идентичности правых частей выражений (18) и (20) имеем

$$\left[\lambda_k \frac{d^2 y_k}{da_i da_j}\right]_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d\lambda_k}{d\tau} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

По той же самой причине, что и для условия (12) из соотношения (21) получается единственное начальное условие

$$\lambda_k(t_f) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

для интегрирования системы (22) в обратном времени. В результате $n \times 1/2m(m + 1)$ уравнений чувствительности второго порядка заменяются на n сопряженных уравнений (22).

Сравнивая уравнения (13) и (22), видим, что они полностью идентичны, как и их начальные условия (14) и (23). Следовательно, для функций чувствительности различного порядка существует система инвариантов.

В реальных задачах чаще всего требуется вычисление функций чувствительности по времени, начиная с точки t_0. Вместе с тем при численной реализации прямое определение функций чувствительности, согласно полученным результатам, требует многократного вычисления $\lambda_k(t)\forall k$ путем интегрирования системы уравнений (22) в обратном времени с текущими начальными условиями $\lambda_k(t_f) = 0$, где $t_f = t_{u+1}$, $t_{u+1} = t_u + \Delta t$ $(u = 0, 1, \ldots)$; Δt – шаг по времени.

Такой способ крайне неудобен, громоздок и по сути дела в вычислительном отношении сводит на нет преимущества, связанные с введением новых переменных. Линейность системы уравнений (22) позволяет избежать этого недостатка.

Согласно (8) и (18), требуется вычислить интегралы типа

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} q_i(\tau)\lambda_i(\tau) d\tau \tag{24}$$

где под J понимаются интегралы J_1 и J_2, а под $q_i(\tau)$ – сомножители $\lambda_i(\tau)$ в выражении (8) или (18).

Запишем систему неоднородных уравнений (22) в векторной форме и произведем ее преобразование к однородному виду путем расширения фазового пространства на единицу, дополнив (22) тривиальным скалярным уравнением

$$\dot{\lambda}_{n+1}(\tau) = 0, \quad \lambda_{n+1}(t) = 1 \tag{25}$$

Тогда, рассматривая (22) и (25) совместно, можно записать

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{\Lambda}(t) = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tag{26}$$

где $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})^T$ – вектор столбец, $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T$ – вектор начальных условий, заданных в точке t. Матрица $\mathbf{R}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = -\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Запишем (24) в следующем виде:

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{\Lambda}(\tau)d\tau \tag{27}$$

где $\mathbf{Q}(\tau) = (q_1(\tau), q_2(\tau), \ldots, q_n(\tau), 0)$ – вектор-строка.

Решение уравнения (26) запишем так

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})\mathbf{\Lambda}(\tau)$$

где $\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})$ – фундаментальная матрица, вычисленная на интервале $[\tau, t]$.

Таким образом $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})\mathbf{\Lambda}(\tau)$. Тогда

$$\mathbf{\Lambda}(\tau) = [\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})]^{-1}\tilde{\mathbf{\Lambda}} \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), получим

$$J(t) = \mathbf{N}(t)\tilde{\mathbf{\Lambda}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(\tau)[\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})]^{-1}d\tau \tag{29}$$

Для получения текущих значений J по времени от точки t_0, построим рекуррентную формулу связи $J(t + \Delta t)$ и $J(t)$:

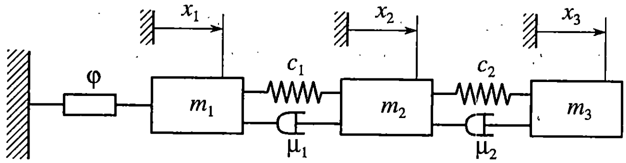
$$J(t+\Delta t) = \mathbf{N}(t+\Delta t)\tilde{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{\Lambda}(t+\Delta t) = \mathbf{\Lambda}(t) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}$$

С использованием свойства обратной фундаментальной матрицы

$$[\mathbf{\Omega}_\tau^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1} = [\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})]^{-1}[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1} \tag{30}$$

можно записать

$$\mathbf{N}(t+\Delta t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(\tau)[\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})]^{-1}d\tau[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1} + \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}(\tau)[\mathbf{\Omega}_\tau^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1}d\tau$$



Фиг. 1

или, с учетом малости интеграла $[t, t+\Delta t]$:

$$\mathbf{N}(t+\Delta t) = (\mathbf{N}(t) + \mathbf{Q}(t)\Delta t)[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1}$$

Обратная фундаментальная матрица может быть представлена в виде интегростепенного ряда, который абсолютно и равномерно сходится в любой замкнутой части интервала $[t_1, t_2]$ изменения аргумента t, если элементы матрицы R ограничены и имеют счетное множество разрывов [3]

$$[\mathbf{\Omega}_{t_1}^{t_2}(\mathbf{R})]^{-1} = \mathbf{E} - \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{R}(\tau_1)d\tau_1 - \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{R}(\tau_2)\int_{t_1}^{\tau_2}\mathbf{R}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 - \ldots \quad (31)$$

Рассматривая разложение (31) на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ и ограничившись линейным приближением, получим следующее выражение

$$[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{R}(t)\Delta t \quad (32)$$

которое удобно использовать при численной реализации. Результат можно уточнить, если учесть в (32) члены более высокого порядка, например, квадратичный $\mathbf{R}^2(t)\Delta t^2/2$.

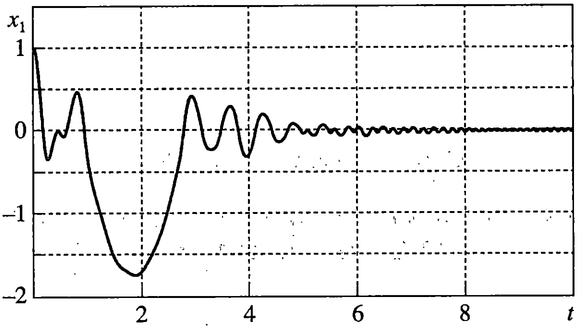
Заметим, что соотношение (30) с учетом (32) представляет собой рекуррентную формулу вычисления обратной фундаментальной матрицы путем перемножения обратных фундаментальных матриц подинтервалов, т.е. $[\mathbf{\Omega}_\tau^t(\mathbf{R})]^{-1}$ трактуется как мультипликативный интеграл [3].

В качестве примера рассмотрена задача определения функций чувствительности фазовых координат механической системы, изображенной на фиг. 1, где m_1, m_2, m_3 – массы тел; c_1, c_2 – коэффициенты упругости; μ_1, μ_2 – коэффициенты вязкости демпфирующих элементов; φ – нелинейный элемент, упругая и демпфирующая характеристики которого описываются соотношениями (33) и (34) соответственно

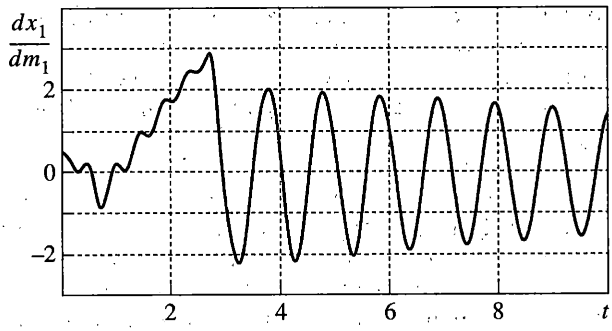
$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x)(kx^{(0)} + a) & \text{при} \quad x < -x^0, \quad x > x^0 \\ kx + \operatorname{sign}(x)a & \text{при} \quad -x^0 \le x \le x^0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\varphi(\dot{x}) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\dot{x})b(\dot{x}^0)^2 & \text{при} \quad \dot{x} < -\dot{x}^0, \quad \dot{x} > \dot{x}^0 \\ \operatorname{sign}(\dot{x})b(\dot{x})^2 & \text{при} \quad -\dot{x}^0 \le \dot{x} \le \dot{x}^0 \end{cases} \quad (34)$$

В расчетах были приняты следующие значения параметров системы: $m_1 = 10$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$, $c_1 = 1000$, $c_2 = 1500$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 3.5$, параметров нелинейного элемента: $k = 1000$,



Фиг. 2



Фиг. 3

$a = 500$, $b = 1.5$, $x^0 = 0.4$, $\dot{x}^0 = 3$ и начальные значения фазовых координат: $x_1(t_0) = 0.5$, $x_2(t_0) = 0$, $x_3(t_0) = 0$.

Функции чувствительности вычислять по известной методике и предлагаемым способом. Результаты практически совпали.

На фиг. 2, 3 представлены результаты расчетов в виде временных диаграмм t[c] изменения фазовой координаты x_1 и коэффициента чувствительности координаты x_1 по параметру m_1 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем автоматического управления. Л.: Энергия, 1969. 208 с.
2. *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления. М.: Мир, 1973. 248 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.07.2003