

УДК 539.374; 538.951

© 2005 г. В.М. ГРЕШНОВ

МОДЕЛЬ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ

Предложена физико-феноменологическая модель вязкопластического тела, учитывающая влияние на напряжение течения истории нагружения, обусловленной зависимостями скорости деформации и температуры от времени.

Модель предназначена для постановки и решения краевых задач технологической вязкопластичности, с целью математического моделирования и оптимизации технологических параметров процессов обработки металлов давлением при повышенных (теплая и горячая деформации) температурах.

В механике пластической деформации (теории пластичности) разработаны модели вязкопластических тел, учитывающие влияние на напряжение течения скорости и температуры деформации [1, 2]. Промышленные технологические процессы обработки металлов давлением в условиях теплой и горячей деформации, когда металлы обладают ярко выраженными вязкопластическими свойствами, характеризуются наличием в объеме обрабатываемой заготовки неоднородных и нестационарных тензорного поля скоростей пластических деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}(x, y, z, t)$ и поля температур $T(x, y, z, t)$. Пластическая деформация является неравновесным процессом и сопротивление деформации σ_{ij} каждого элементарного объема заготовки определяется в рассматриваемый момент времени t не только текущими значениями $\dot{\epsilon}_{ij}$ и T , но и зависимостями $\dot{\epsilon}_{ij}(t)$, $T(t)$ в предыдущие моменты времени, т.е. σ_{ij} зависит и от истории нагружения.

Повышение точности и возможностей расчетных методов в обработке металлов давлением связано с дальнейшим развитием теории вязкопластичности. Некоторые подходы к построению модели вязкопластического тела, учитывающей историю нагружения, и возникающие при этом трудности изложены в [3]. Несмотря на относительную давность этой работы, существенных достижений в решении задачи к настоящему времени нет.

В статье излагается модель вязкопластичности¹, которая является обобщением на объемное напряженно-деформированное состояние физико-феноменологической модели пластической деформации при линейном напряженном состоянии [4, 5]. Обобщение проведено в рамках традиционной в теории пластичности идеологии [1].

Модель пластической деформации, учитывающая при линейном напряженном состоянии влияние температуры, скорости деформации и их зависимостей от времени, без учета упругих деформаций представлена в форме оператора, который при по-

¹ Под вязкопластическим телом в данной работе подразумевается вязкоупруго-вязкопластическое тело [3].

этапном расчете пластического течения на каждом шаге нагружения ставит в соответствие функциям $\dot{\epsilon}_i(\epsilon_i)$, $T(\epsilon_i)$, $\rho_s(\epsilon_i)$ и $\epsilon_i(t)$ значение σ_i [4, 5]:

$$d\bar{\epsilon}_{i(g)} = (2/3 d\epsilon_{ij(g)} d\epsilon_{ij(g)})^{1/2} \quad (g = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\epsilon_{i(g)} = \epsilon_{i(g-1)} + d\bar{\epsilon}_{i(g)} \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{i(g)} = d\bar{\epsilon}_{i(g)} / dt_{(g)} \quad (3)$$

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp\left(-\frac{G(T)b^3 - 1.443\sigma_{i(g-1)}b^2/\sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{2.5kT}\right) \right] d\bar{\epsilon}_{i(g)} \quad (4)$$

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)} \quad (5)$$

$$\sigma_{i(g)} = \alpha(T)\bar{m}G(T)b \left[1 - \frac{2.5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \right] \sqrt{\rho_{s(g)}} \quad (6)$$

где $d\bar{\epsilon}_i$ – интенсивность приращения пластической деформации; $d\epsilon_{ij}$ – приращения компонентов тензора пластических деформаций; g – номер шага нагружения при поэтапном расчете пластического течения; ϵ_i – накопленная за g шагов интенсивность пластической деформации; $\dot{\epsilon}_{i(g)}$ – интенсивность скорости деформации; $dt_{(g)}$ – приращение времени деформации на шаге нагружения, определяемое через известную на шаге скорость перемещения рабочего органа деформирующей машины и задаваемое приращение его перемещения; $d\rho_s$ – приращение плотности неподвижных дислокаций в материале; b – усредненный по системам скольжения модуль вектора Бюргера дислокаций (в оценках для металлов $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см); λ – средняя длина свободного пробега дислокаций; $\nu_D = 10^{12}$ с⁻¹ – частота тепловых колебаний ионов в кристаллической решетке (частота Дебая); k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; σ_i – интенсивность напряжений; α – параметр междислокационного взаимодействия; $\bar{m} = 3.1$ – фактор Тейлора для поликристаллов с хаотической разориентировкой зерен; G – модуль сдвига; $\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}_* b \sqrt{\rho_s}$ – скорость деформации в идеальном случае отсутствия барьеров для дислокаций; $\dot{\epsilon}_*$ – константа (для металлов равная $9 \cdot 10^6$ с⁻¹).

Начальный предел текучести жестко-вязкопластического тела

$$\sigma_T = \alpha(T)\bar{m}G(T)b \left[1 - \frac{2.5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}_i} \right] \sqrt{\rho_{s0}} \quad (7)$$

где ρ_{s0} – начальная (до нагрева и деформации) плотность неподвижных дислокаций в материале.

Оператор (1)–(6) обеспечивает последовательный учет истории нагружения, так как $d\rho_{s(g)}$ рассчитывается по (4) при действительных на шаге $\dot{\epsilon}_{i(g)}$ и $T_{(g)}$ и складывается (5) для определения $\sigma_{i(g)}$ по (6) с накопленной на всех предыдущих шагах при различных $\dot{\epsilon}_i$ и T плотностью дислокаций ρ_s .

Два параметра модели ρ_{s0} и λ определяются с применением экспериментально полученной при стандартных испытаниях образцов растяжением или сжатием в условиях холодной деформации истинной диаграммы деформирования $\sigma_i(\epsilon_i)$ по формулам [4, 5]:

$$\rho_{s0} = (\sigma_T^{\text{exp}})^2 / (\alpha \bar{m} G b)^2, \quad \lambda = b(\alpha \bar{m} G)^2 [\exp(\epsilon_i) - 1] / b[\sigma_i^2 \exp(\epsilon_i) - (\alpha \bar{m} G b)^2 \rho_{s0}]$$

где σ_T^{exp} – экспериментальный предел текучести материала при холодной деформации; ϵ_i и σ_i – любое из интервала [0.4–0.6] значение интенсивности деформации и соответствующее ей на экспериментальной диаграмме значение интенсивности напряжений.

Температурные зависимости модуля сдвига и параметра междислокационного взаимодействия α носят идентичный характер и с достаточной для инженерных расчетов точностью аппроксимируются уравнениями

$$G(T) = (-65.94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41.08 T + 77.82 \cdot 10^3) G_{\text{Me}}^{293^\circ\text{K}} / 84000 \text{ [МПа]} \quad (8)$$

$$\alpha(T) = -1.625 \cdot 10^{-7} T^2 + 10.123 \cdot 10^{-5} T + 0.194$$

где $G_{\text{Me}}^{293^\circ\text{K}}$ – модуль сдвига материала при 293°K (20°С) в МПа.

Уравнение (8) получено обработкой большого количества экспериментальных значений G для разных сплавов, имеющих в справочной литературе, и обеспечивает определение G в пределах взятой выборки сплавов с погрешностью не более 11%.

В сталях при температуре полиморфного превращения $\text{Fe}_\alpha \rightarrow \text{Fe}_\gamma$ (1000°K) зависимости $\alpha(T)$ и $G(T)$ претерпевают скачки, т.е. при $T \geq 1000^\circ\text{K}$

$$\alpha(T) = -1.625 \cdot 10^{-7} T^2 + 10.123 \cdot 10^{-5} T + 0.121$$

$$G(T) = (-65.94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41.08 T + 89.38 \cdot 10^3) G_{\text{Me}}^{293^\circ\text{K}} / 84000 \text{ [МПа]}$$

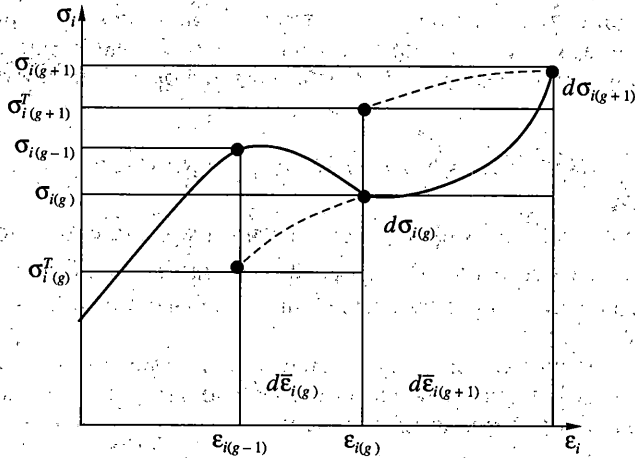
Установлено, что теплая деформация протекает в условиях переменного (уменьшающегося с ростом деформации и ρ_s) активационного объема $V = b^2 \sqrt{\rho_s}$. Горячая деформация осуществляется в условиях постоянства активационного объема $V = b^2 / \sqrt{\rho_{s0}} = \text{const}$ и уравнение (4), в этом случае, имеет вид

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp\left(-\frac{G(T)b^3 - 1.443\sigma_{i(g-1)}b^2/\sqrt{\rho_{s0}}}{2.5kT}\right) \right] d\bar{\epsilon}_{i(g)}$$

При расчете пластического течения по (1)–(6) необходимо задавать на каждом шаге нагружение $d\bar{\epsilon}_i \gg 10^{-5}$, например, $d\bar{\epsilon}_i = (0.05-0.2)$.

Анализ модели (1)–(7) приводит к двум результатам. Из уравнений (6) и (7) следует, что у вязкопластического тела как начальный, так и мгновенный пределы текучести при различных плотностях неподвижных дислокаций ρ_s определяются скоростью деформации и температурой, т.е. тело не имеет фиксированного (критического) предела текучести. Следовательно для него понятие разгрузка, которое характеризует переход тела из пластического состояния в упругое [1], не имеет физического содержания и места.

В физике прочности и пластичности уменьшение напряжения течения при повышении температуры или уменьшении скорости деформации называется динамическим



Фиг. 1

ким возвратом [6]. Увеличение напряжения с повышением скорости деформации или понижением температуры – динамическим упрочнением.

На основании уравнений (5), (6) и (7) напряжение течения на каждом шаге нагружения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{i(g)}^2 &= [\sigma_{i(g)}^T]^2 + [d\sigma_{i(g)}]^2 = \\ &= \left\{ \alpha(T) \bar{m} G(T) b \left[1 - \frac{2.5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \right] \right\}^2 [\rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)}] \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma_{i(g)}^T$ – начальный на шаге g предел текучести при действительных на шаге значениях $\dot{\epsilon}_{i(g)}$ и $T_{(g)}$, $d\sigma_{i(g)}$ – приращение напряжения на шаге нагружения, обусловленное приращением $d\bar{\epsilon}_{i(g)}$, приводящим к приращению $d\rho_{s(g)}$.

Из уравнения (4) следует, что всегда $d\sigma_{i(g)} \geq 0$, так как первое слагаемое $(b\lambda)^{-1} d\bar{\epsilon}_{i(g)}$ есть общая плотность дислокаций, ставших на шаге g неподвижными, а второе – плотность неподвижных дислокаций, которые на шаге g термофлуктуационным способом преодолели барьеры и снова стали подвижными.

Изложенные два следствия из модели (1)–(7) являются ключевыми для её обобщения на объемное напряженно-деформированное состояние, так как определяют ход дальнейших рассуждений.

Полезно предварительно рассмотреть деформацию вязко-пластического тела при линейном напряженном состоянии в условиях изменяющихся во времени скорости деформации и температуры.

Допустим, на шагах нагружения до $(g-1)$ образец деформировали растяжением в условиях однородной деформации при постоянных $\dot{\epsilon}_{i(g-1)}$, T до $\epsilon_{i(g-1)}$ и соответствующего $\sigma_{i(g-1)}$ (фиг. 1). На шаге деформирования g скорость деформации уменьшилась или температура увеличилась, т.е. $\dot{\epsilon}_{i(g)} < \dot{\epsilon}_{i(g-1)}$ при $T = \text{const}$ или $T_{(g)} > T_{(g-1)}$ при $\dot{\epsilon}_i = \text{const}$ и образец при новых термо-скоростных условиях, при которых проте-

кает динамический возврат, получает приращение деформации $d\bar{\epsilon}_{i(g)}$. С учетом, что интенсивность напряжений σ_i есть модуль, в общем случае, шестимерного вектора напряжений и $d\sigma$, по отношению к σ_i , величина малая, напряжение на шаге g формально, в соответствие с (9), можно представить как сумму начального на шаге предела текучести, который, по сравнению с напряжением на предыдущем шаге, скачком уменьшился из-за скачкообразного уменьшения $\dot{\epsilon}_i$ или повышения T (см. (7)), и приращения напряжения, обусловленного приращением $d\bar{\epsilon}_{i(g)}$ и $d\rho_{s(g)}$ (см. (4), т.е. $\sigma_{i(g)}^2 = [\sigma_{i(g)}^T]^2 + [d\sigma_{i(g)}]^2$ (фиг. 1).

Пусть в следующий момент времени (на шаге нагружения $(g + 1)$) скорость деформации увеличилась или уменьшилась температура и образец получил приращение деформации $d\bar{\epsilon}_{i(g+1)}$ в новых термо-скоростных условиях, соответствующих динамическому упрочнению. И в этом случае, как следует из (9), текущее на шаге $(g + 1)$ напряжение течения можно представить в виде суммы $\sigma_{i(g+1)}^2 = [\sigma_{i(g+1)}^T]^2 + [d\sigma_{i(g+1)}]^2$ (фиг.1).

Переходя к описанию деформации вязкопластического тела при объемном напряженно-деформированном состоянии, будем считать, что тело изотропно и остается таковым во время всего процесса деформирования. Введем в пространстве напряжений понятие мгновенной на шаге нагружения g функции нагружения

$$f_{(g)} \left[\sigma_{ij(g)}^T, d\sigma_{ij(g)}, \Phi_1 \left(\sum_1^{g-1} d\bar{\epsilon}_i \right), \Phi_2(d\bar{\epsilon}_{i(g)}) \right] = 0 \quad (10)$$

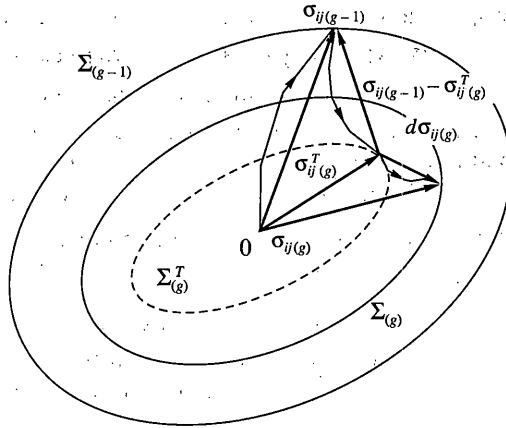
Отметим, что (10) отличается от аналогичного понятия в [3].

Величины $\dot{\epsilon}_{i(g)}$ и $T_{(g)}$ не вошли в число определяющих параметров функции $f_{(g)}$, так как в соответствие с (1)–(7) $\sigma_{i(g)}^T(\dot{\epsilon}_{i(g)}, T_{(g)})$ и $d\sigma_{i(g)}(\dot{\epsilon}_{i(g)}, T_{(g)})$. На основании вышеизложенных представлений запишем (10) в виде суммы

$$f_{(g)} = f_{(g)}^T \left[\sigma_{ij(g)}^T, \Phi_1 \left(\sum_1^{g-1} d\bar{\epsilon}_i \right) \right] + df_{(g)} [d\sigma_{ij(g)}, \Phi_2(d\bar{\epsilon}_{i(g)})] = 0 \quad (11)$$

Определим для вязкопластического тела в терминах механики понятия: динамического упрочнения (вектор догружения $d\sigma_{ij}$ направлен наружу по отношению к начальному на шаге деформирования положению мгновенной поверхности нагружения, описываемому первым слагаемым в (11); напряжения при этом увеличиваются); динамического возврата (вектор догружения $d\sigma_{ij}$ также направлен наружу по отношению к начальному на шаге положению мгновенной поверхности нагружения, но напряжения, по сравнению с предыдущим шагом деформирования, уменьшаются); нейтрального нагружения (вектор $d\sigma_{ij}$ направлен по касательной к поверхности нагружения) в смысле деформирования при постоянных σ_i , $\dot{\epsilon}_i$ и T (идеальное вязкопластическое тело). При всех трех процессах развиваются пластические деформации.

Рассмотрим в пространстве напряжений геометрическую интерпретацию введенных новых понятий. Допустим на шаге нагружения $(g - 1)$ вязкопластическое тело или элемент тела деформировались со скоростью деформации $\dot{\epsilon}_{i(g-1)}$ при температуре $T_{(g-1)}$. К концу шага нагружения напряженное состояние описывается векто-



Фиг. 2

ром $\sigma_{ij(g-1)}$ и положение мгновенной на шаге поверхности нагружения соответствует $\Sigma_{(g-1)}$ (фиг. 2). На следующем шаге g нагружение осуществляется при $\dot{\epsilon}_{i(g)} < \dot{\epsilon}_{i(g-1)}$ или при $T_{(g)} > T_{(g-1)}$, т.е. в условиях динамического возврата. При этом изменение поверхности нагружения формально можно представить как суперпозицию мгновенного её сжатия до положения $\Sigma_{(g)}^T$ (напряженное состояние уменьшается с $\sigma_{ij(g-1)}$ до $\sigma_{ij(g)}^T$) и последующего расширения до положения $\Sigma_{(g)}$. Конечное напряженное состояние на шаге g будет $\sigma_{ij(g)} = \sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)}$. Положение поверхности нагружения $\Sigma_{(g)}$ и описывается мгновенной функцией нагружения (11).

Сформулируем основные промежуточные результаты.

Динамический возврат формально можно рассматривать как суперпозицию псевдоразгрузки² до нового значения предела текучести, определяемого новыми термомеханическими условиями деформации, при этом напряжения и деформации связаны законом Гука, и нагружения, приводящими в совокупности к приращению пластической деформации. Соответственно, динамическое упрочнение – как суперпозицию упругого догружения до нового значения предела текучести и нагружения, в совокупности также приводящими к приращению пластической деформации. При нейтральном нагружении положение поверхности не меняется.

Вся история нагружения накапливается и описывается значениями $\sigma_{ij(g)}^T$, к которым на каждом шаге нагружения прибавляются приращения напряжений, т.е. история нагружения описывается первым слагаемым мгновенной функции нагружения (11).

При деформации вязкопластического тела в условиях изменяющихся во времени скорости деформации и температуры, поверхность нагружения непрерывно пульсирует, разделяя область нагружения с высокими скоростями и низкими температурами от области нагружения с более низкими скоростями и более высокими температурами. Мгновенная функция нагружения (11) не может иметь отрицательных значений.

² Псевдоразгрузка похожа на разгрузку, однако таковой не является, т.к. вектор напряжения остается на поверхности нагружения.

На основании (11) и (9) мгновенное на шаге нагружения условие текучести вязкопластического тела будет выглядеть следующим образом:

$$f_{(g)} = f_{(g)}^T + df_{(g)} = 3/2 S_{ij(g)}^T S_{ij(g)}^T + 3/2 dS_{ij(g)} dS_{ij(g)} - \left[\Phi_1 \left(\sum_1^{g-1} d\bar{\epsilon}_i \right) \right]^2 - [\Phi_2(d\bar{\epsilon}_{i(g)})]^2 = 0 \quad (12)$$

где $S_{ij(g)}^T$ и $dS_{ij(g)}$ – девиаторы тензоров $\sigma_{ij(g)}^T$ и $d\sigma_{ij(g)}$.

Следуя традиционному в теории пластичности методу [1], сформулируем в пространстве напряжений соответствующий принцип максимума.

При любом заданном значении компонентов приращения пластической деформации на шаге нагружения g вязкопластического тела приращение работы пластической деформации $(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)} d\epsilon_{ij(g)}$ имеет максимальное значение для действительно напряженного состояния, определяемого историей нагружения и действительными на шаге значениями $\dot{\epsilon}_{i(g)}$ и $T_{(g)}$ по сравнению со всеми возможными напряженными состояниями с той же историей нагружения, удовлетворяющими условию $f_{(g)}^{(0)}(\dot{\epsilon}_{i(g)}^0, T_{(g)}^0) < f_{(g)}(\dot{\epsilon}_{i(g)}, T_{(g)})$, когда $\dot{\epsilon}_{i(g)}^0 < \dot{\epsilon}_{i(g)}$ и $T_{(g)}^0 > T_{(g)}$.

Математическая формулировка принципа максимума будет

$$(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)} d\epsilon_{ij(g)} > (\sigma_{ij}^{T0} + d\sigma_{ij}^{0})_{(g)} d\epsilon_{ij(g)}$$

Ассоциированный закон течения вязкопластического тела имеет вид³

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})} [(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)} d\epsilon_{ij} - d\lambda f] = 0$$

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})} \quad (13)$$

где $d\lambda$ – множитель Лагранжа.

Далее, можно показать, что из (13) и (12) следует

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f^T}{\partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})} + d\lambda \frac{\partial(df)}{\partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})} = 3d\lambda(S_{ij}^T + dS_{ij}), \quad d\epsilon_{ii} = 3d\epsilon_0 = 0$$

т.е. для вязкопластического тела выполняется условие несжимаемости

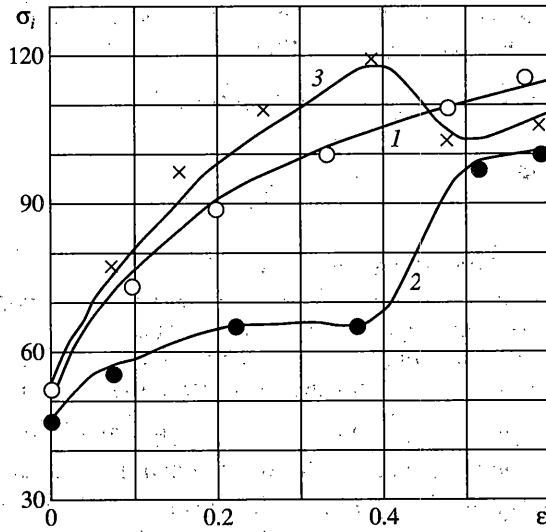
$$d\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{[\partial f / \partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij}) \partial f / \partial(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})]^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{\sigma_i^T + d\sigma_i}$$

$$d\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{\sigma_i^T + d\sigma_i} (S_{ij}^T + dS_{ij}) \quad (14)$$

где σ_i^T и $d\sigma_i$ на каждом шаге нагружения определяются из (9) как

$$\sigma_{i(g)}^T = \alpha(T) \bar{m} G(T) b \left[1 - \frac{2.5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_{0(g)}}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \right] \sqrt{\rho_{s(g)} - 1}$$

³ Индекс g здесь и далее опущен.



Фиг. 3

$$d\sigma_{i(g)} = \alpha(T)\bar{m}G(T)b \left[1 - \frac{2.5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_{0(g)}}{\dot{\epsilon}_{i(g)}} \right] \sqrt{d\rho_{s(g)}}$$

Определяющие соотношения вязкопластического тела (14) включают в себя, как частные случаи, модели упрочняющегося пластического тела и нелинейно-вязкого тела. Действительно, положив сначала независимость $(\sigma_i^T + d\sigma_i)$ от скорости деформации, а затем и от функций $\dot{\epsilon}_i(t), T(t)$ из (14) получаем известные уравнения выше-названных тел

$$d\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{\sigma_i(\epsilon_p, T)} S_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\sigma_i(\dot{\epsilon}_p, T)} S_{ij}$$

Запишем (14) в виде

$$S_{ij}^T + dS_{ij} = \frac{2\sigma_i^T + d\sigma_i}{3} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{d\bar{\epsilon}_i} d\epsilon_{ij}$$

Видно, что оно распадается на два уравнения

$$d\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{d\sigma_i} dS_{ij} \tag{15}$$

$$d\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i}{\sigma_i^T} S_{ij}^T \tag{16}$$

Краевые задачи технологической вязкопластичности с использованием (15) и (16) целесообразно решать численным методом конечных элементов, который реализует необходимый пошаговый алгоритм расчета. При этом, как следует из (15), на каждом шаге нагружения решается упругая задача с мгновенным касательным мо-

дулем $E' = d\sigma/d\bar{\epsilon}_i$. После определения $d\epsilon_{ij}$ и подстановки их значений в (16), находится S_{ij}^T . Итоговый девиатор напряжений на шаге нагружения $S_{ij} = S_{ij}^T + dS_{ij}$.

Экспериментальную проверку разработанной модели вязко-пластического тела осуществляли для случая линейного напряженного состояния. Из условия текучести (12) для линейного напряженного состояния следует (9) и, соответственно, (6). Проводили эксперимент и математически моделировали одноосную осадку цилиндрических образцов диаметром 7 и высотой 8 мм из стали 10кп при $T = 1023^\circ\text{K}$ (750°C) со ступенчатым изменением $\dot{\epsilon}_i$ по следующим режимам: $\dot{\epsilon}_i = \text{const} = 10^{-2} \text{c}^{-1}$ (кривая 1 на фиг. 3); до $\epsilon_i = 0.4 \text{ с } \dot{\epsilon}_i = 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, далее с $\dot{\epsilon}_i = 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ (кривая 2); до $\epsilon_i = 0.4 \text{ с } \dot{\epsilon}_i = 1.3 \cdot 10^{-1} \text{ c}^{-1}$, далее с $\dot{\epsilon}_i = 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ (кривая 3). При моделировании на каждом шаге нагружения задавали $d\epsilon_i = 0.1$.

Характеристики стали 10кп при $T = 293^\circ\text{K}$ (20°C): $G = 78000 \text{ МПа}$; $\lambda = 0.767 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, $\rho_{30} = 2.9 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$.

Из фиг. 3, где точки – экспериментальные значения, а сплошные кривые – теоретические, следует, что разработанная модель описывает пластическое поведение вязкопластического тела адекватно экспериментальным данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
2. *Смирнов О.М.* Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности / Пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Грешнов В.М., Сафин Ф.Ф., Грешнов М.В.* Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Сообщ. 1. Постановка задачи и вывод общего уравнения // Пробл. прочности. 2002. № 6. С. 107–115.
5. *Грешнов В.М., Сафин Ф.Ф., Грешнов М.В.* Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Сообщ. 2. Частные случаи модели и её экспериментальная проверка // Пробл. прочности. 2003. № 1. С. 87–97.
6. *Штремель М.А.* Прочность сплавов. Ч. 2. Деформация. М.: МИСИС, 1997. 527 с.

Уфа

Поступила в редакцию
14.04.2003