МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2005

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. С. Н. КУКУДЖАНОВ

ВЛИЯНИЕ МЕРИДИОНАЛЬНЫХ УСИЛИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКОЙ ПО ФОРМЕ К ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ

Исследуется влияние меридиональных усилий (как сжимающих, так и растягивающих), приложенных к краям оболочки вращения, близкой к цилиндрической, на форму волнообразования, величину наинизших собственных частот и динамическую устойчивость. Рассматриваются оболочки средней длины, у которых форма образующей срединной поверхности описывается параболической функцией. На основании теории пологих оболочек получено разрешающее уравнение колебаний соответствующей предварительно напряженной оболочки. Приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие учтенные члены. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Предполагалось, что края оболочки свободно оперты. Приведены в безразмерной форме формулы и универсальные кривые зависимости наименьшей частоты, формы волнообразования и границ областей динамической неустойчивости от предварительного напряжения и амплитуды отклонения оболочки от цилиндра. Показано, что при наличии предварительных напряжений, отклонение оболочки от цилиндрической формы (порядка толщины) могут существенно изменить низшие частоты, форму волнообразования и границы областей динамической неустойчивости.

1. Рассматривается оболочка, у которой срединная поверхность образована вращением квадратной параболы вокруг оси z, прямоугольной системы координат x, y, z с началом в середине отрезка оси вращения (фиг. 1). Предполагается, что радиус R поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = \tau + \delta_0[1 - \xi^2(\tau/l)^2]$$

где τ – радиус торцевого сечения; δ_0 – максимальное отклонение (при $\delta_0 > 0$ оболочка выпуклая, при $\delta_0 < 0$ – вогнутая); $L = 2l$ – длина оболочки; $\xi = z/\tau$. Рассматриваются оболочки средней длины [2] и считается, что

$$(\delta_0/\tau)^2, \quad (\delta_0/l)^2 \ll 1 \tag{1.1}$$

За основные уравнения колебаний принимались уравнения теории пологих оболочек [3]. Для рассматриваемых оболочек средней длины формы колебаний, соответствующие низшим частотам, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \ll \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \; (f = w, \psi) \tag{1.2}$$

где w, ψ – соответственно функции радиального перемещения и напряжения. В результате система уравнений для рассматриваемых оболочек приводится к следующему уравнению

$$\varepsilon\frac{\partial^8 w}{\partial\varphi^8}+\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+4\delta\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}+4\delta^2\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-t_1^0\frac{\partial^6 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^4}-t_2^0\frac{\partial^6 w}{\partial\varphi^6}+\frac{\rho\tau^2}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right)=0$$
$$\varepsilon=\frac{h^2}{12\tau^2(1-\nu^2)},\quad \delta=\delta_0\tau/l^2,\quad t_i^0=T_i^0/Eh\quad (i=1,2) \tag{1.3}$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, φ – угловая координата, T_1^0, T_2^0 – меридиальное и окружное усилия исходного состояния, t – время, ρ – плотность. Дополнительным членом в этом уравнении, в сравнении с уравнением приведенном в [1] является четвертый член, который в силу неравенств (1.2) будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Рассматривается свободно опертая оболочка, к краям которой приложены равномерно распределенные меридиональные усилия P_1. Исходное состояние предполагается безмоментным. На основании соответствующего решения и неравенств (1.1), (1.2) получаем следующие приближенные выражения

$$T_1^0=P_1\left[1+\frac{\delta_0}{\tau}(\xi^2(\tau/l)^2-1)\right],\quad T_2^0=-2P_1\delta_0\tau/l^2 \tag{1.4}$$

Учитывая, что

$$|\xi^2(\tau/l)^2-1|\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\ll 2\left(\frac{\tau}{l}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} \tag{1.5}$$

получаем, что уравнение (1.3) принимает вид

$$\varepsilon\frac{\partial^8 w}{\partial\varphi^8}+\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+4\delta\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}+4\delta^2\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+p\frac{\partial^6 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^4}-2p\delta\frac{\partial^6 w}{\partial\varphi^6}+\frac{\rho\tau^2}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right)=0$$
$$p=-P_1/(Eh) \tag{1.6}$$

Первоначально рассмотрим случай $P_1=\text{const}$. Принятым граничным условиям удовлетворяет выражение

$$w=A\cos\lambda_m\xi\sin n\varphi\sin\omega t,\quad \lambda_m=m\pi\tau/L\quad (m=2i+1,\ i=0,1,2,\ldots) \tag{1.7}$$

Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.6), получаем следующее равенство для определения собственных частот

$$\omega^2=\frac{E}{\rho\tau^2}[\varepsilon n^4+\lambda_m^4 n^{-4}+4\delta\lambda_m^2 n^{-2}+4\delta^2-p(\lambda_m^2-2\delta n^2)] \tag{1.8}$$

Видно, что при $p=0$ и $\delta>0$ наименьшей частоте соответствует значение $m=1$. Можно также показать, что это условие имеет место и при $\delta<0$, учитывая неравенство (1.1), а также что $\omega^2>0$. Поэтому первоначально будем рассматривать формы колебаний, при которых по длине оболочки располагается одна полуволна ($m=1$), а в окружном направлении n волн. При сжатии $p>0$, а при растяжении $p<0$.

Представим выражение (1.8) (при $m = 1$) в безразмерном виде, для этого введем безразмерные величины N, P и некоторые обозначения

$$N = n^2/n_0^2, \quad P = p/p_{0*}, \quad \delta_* = \delta\varepsilon_*^{-1/2}, \quad \varepsilon_* = (1-\nu^2)^{-1/2}\frac{h}{\tau}\left(\frac{\tau}{L}\right)^2$$
$$n_0^2 = \lambda_1\varepsilon^{-1/4}, \quad \lambda_1 = \pi\tau/l, \quad p_{0*} = \frac{(1-\nu^2)^{-1/2}}{\sqrt{3}}\frac{h}{\tau}, \quad \omega_*^2 = 2\lambda_1^2\varepsilon^{1/2}\frac{E}{\rho\tau^2} \tag{1.9}$$

где ω_*, P_{0*} – соответственно наименьшая частота и критическая нагрузка цилиндрической оболочки средней длины [2], [5]. В результате равенство (1.8) можно записать в следующей безразмерной форме:

$$\omega^2(N)/\omega_*^2 = 0.5[N^2 + N^{-2} + 2.37\delta_* N^{-1} + 1.404\delta_0^2 - 2P(1 - 1.185\delta_* N)] \tag{1.10}$$

Наименьшая частота (при $\omega^2(N) > 0$) определяется из условия $\omega^2(N)^1 = 0$. В результате получаем

$$-1.185\delta_* P = N - 1.185\delta_* N^{-2} - N^{-3} \tag{1.11}$$

или

$$N^4 + 1.185\delta_* PN^3 - 1.185\delta_* N - 1 = 0 \tag{1.12}$$

Отсюда при $P = 0$ получаем известное уравнение

$$N^4 - 1.185\delta_* N - 1 = 0 \tag{1.13}$$

корни, которого в явном виде получены в [6]. Кроме того из (1.12) при $\delta_* = 0$ получаем уравнение $N^4 - 1 = 0$ положительный корень которого $N = 1$. Следовательно, для цилиндрической оболочки средней длины наименьшая частота реализуется при $N = 1$ независимо от P, что полностью согласуется с [7]. При $\omega = 0$ из равенства (1.10) получаем

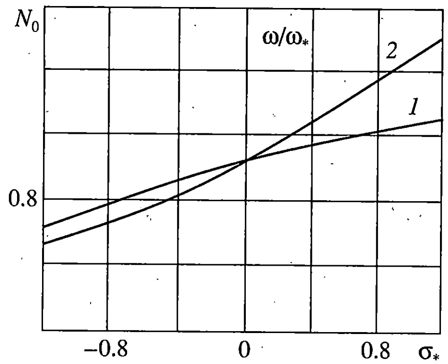
$$P = \frac{N^2 + N^{-2} + 2.37\delta_* N^{-1} + 1.404\delta_*^2}{2(1 - 1.185\delta_* N)} \tag{1.14}$$

Наименьшее значение P, как известно, называют критической нагрузкой. В частности, при $\delta_* = 0$, $N = 1$ из (1.14) получаем известную формулу критического сжимающего усилия для цилиндрической оболочки $P = 1$ [2] Наименьшее значение P в зависимости от N реализуется при $P_N^1 = 0$. Отсюда получаем

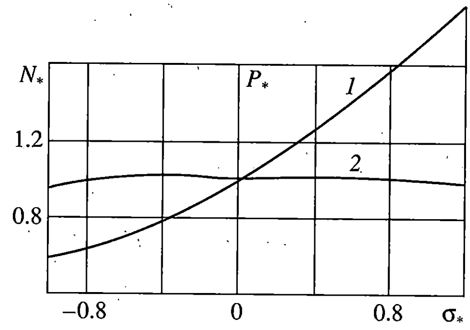
$$2(N - N^{-3} - 1.185\delta_* N^{-2})(1 - 1.185\delta_* N) =$$
$$= -1.185\delta_*(N^2 + N^{-2} + 2.37\delta_* N^{-1} + 1.404\delta_*^2) \tag{1.15}$$

Упрощенное уравнение (1.15) является уравнением пятой степени, корни которого в явном виде не представляется возможным получить. Поэтому предложен иной путь определения положительного корня этого уравнения. Обозначим положительный корень уравнения (1.15) N_*. Это значение $N = N_*$, соответствует числу волн в поперечном направлении, при котором реализуется критическая нагрузка потери устойчивости P_*. Подставляя равенство (1.15) в (1.14) получаем

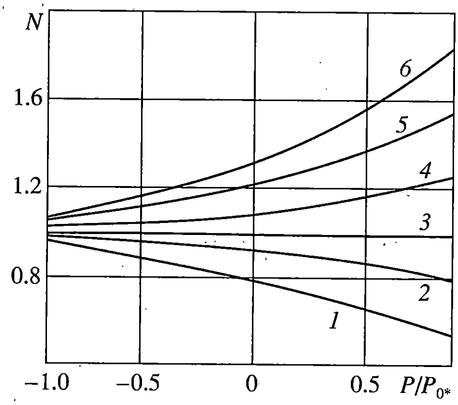
$$-1.185\delta_* P_* = N_* - 1.185\delta_* N_*^{-2} - N_*^{-3} \tag{1.16}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Нетрудно заметить, что из равенства (1.11) также следует равенство (1.16), когда $\omega = 0$. Следовательно, значения P, N удовлетворяющие равенству (1.11), при которых выражение (1.10) обращается в ноль являются критическими значениями P_*, N_*.

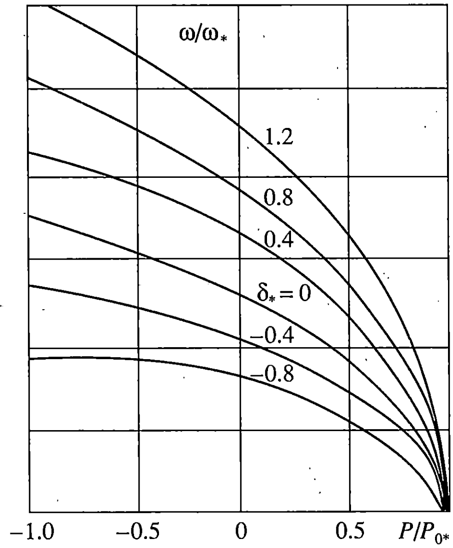
На основании равенства (1.12) при $P = 0$, получаем уравнение (1.13), положительный корень которого $N = N_0$, соответствует наименьшей частоте незагруженной оболочки [6], а при $P = P_*$ уравнение (1.16), корень которого $N = N_*$, соответствует $\omega = 0$. Таким образом при изменении P в интервале

$$0 \le P \le P_* \tag{1.17}$$

Наименьшая частота изменяется в интервале $\omega(N_0, P = 0) \ge \omega(N, P) \ge 0$. На основании рассуждений аналогичных [5], можно показать, что при изменении P в интервале (1.17) для $\delta_* \le 0$, значение N, реализующее наименьшую частоту $\omega(N, P)$ находится в интервале

$$N_0 \le N \le N_* \tag{1.18}$$

Значение N_0 и N_*, в зависимости от δ_* представлены соответственно на фиг. 1, 2 (кривыми *1*). В частности, при $\delta_* = 0$ неравенства (1.17), (1.18) принимают вид, $0 \le P \le 1$, $N_0 = N_* = 1$. На фиг. 1 приведен также график зависимости безразмерной частоты $\omega(N_0)/\omega_*$ (кривая *2*) от δ_* см. [*b*]. Значения критической нагрузки P_* от $\delta_* \le 0$ приведе-



Фиг. 4

ны на фиг. 2 (кривая *2*). Легко заметить, что для рассматриваемого интервала изменения δ_* величина критической нагрузки существенно изменяется.

На основании равенства (1.11) нетрудно построить кривые $N(P)$, реализующие минимальную частоту, для различных значений δ_*. Для этого фиксируем δ_* и задаваясь значением N из интервала (1.18), определяем соответствующее значение P по формуле (1.16).

На фиг. 3 приведены кривые $N(P)$ для $\delta_* = -0.8; -0.4; 0; 0.4; 0.8; 1.2$. Приведенные кривые являются универсальными кривыми, справедливыми для любой оболочки средней длины, так как геометрические и физические параметры не фигурируют в соотношении (1.10). Согласно графиков, приведенных на фиг. 3 нетрудно заметить, что число окружных волн, при которых реализуется наименьшая частота предварительно сжатой оболочки, зависит как от безразмерной амплитуды δ_*, так и от величины безразмерного напряжения P. На основании этих кривых и выражения (1.10) легко определить N и соответствующую минимальную частоту при заданных δ_* и P.

На фиг. 4 приведены графики изменения безразмерной наименьшей (при $m = 1$) частоты в зависимости от безразмерного предварительного напряжения P для различных δ_*, при этом по оси ординат отложено отношение ω/ω_* (ω_* – наименьшая частота незагруженной цилиндрической оболочки, определяемая последним равенством (1.9)), а по оси абсцисс p/p_{0*} (p_{0*} – характеризует критическое сжимающее напряжение для цилиндрической оболочки средней длины и определяется предпоследним равенством (1.9)).

В случае растяжения $P < 0$. При этом равенства (1.10), (1.16) принимают вид

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5[N^2 + N^{-2} + 2.37/\delta_* N^{-1} + 1.404\delta_*^2 + 2|P|(1 + 1.185\delta_* N) \tag{1.19}$$

$$1.185\delta_*|P| = N - N^{-3} - 1.185\delta_* N^{-2} \tag{1.20}$$

Аналогично выше сказанному, на основании формул (1.19), (1.20) нетрудно построить соответствующие зависимости. На фиг. 3, 4 слева от оси ординат приведены зависимости ω/ω_* и N от растягивающего усилия при различных δ_*.

Выясним при каких условиях справедливо неравенство $n^2 \gg \lambda_1^2$, используемое для выше изложенной теории. На фиг. 3 видно, что в наихудшем случае для $\delta_* = -0.8$ при изменении сжимающей нагрузки P в интервале $0 \le P \le P_*$ значение N находится в интервале $0.735 \le N \le 0.774$, тогда как для больших значений δ_* границы интервала повышаются. Отсюда следует, что во всяком случае, при действии нагрузки, не превышающей величину сжимающей критической нагрузки для цилиндрической оболочки, справедливо условие $n^2 \gg \lambda_1^2$ и следовательно, справедливы формулы (1.10), (1.11). Кроме того, нетрудно заметить, что для $\delta_* = -0.8$ и растягивающей нагрузки P изменяющейся в интервале $0 \le P \le 1.4$ значение N убывает по мере увеличения $|P|$ и находится в интервале $0.735 \ge N \ge 0.61$. Следовательно, для растягивающей нагрузки в рассматриваемых интервалах, это неравенство так же справедливо. Выполнение этих условий, а также условия $(\delta_0/\tau)^2 \ll 1$ гарантирует справедливость использования теории пологих оболочек и данного исследования.

Далее рассмотрим значения $m > 1$. Используя обозначения (1.9), формулу (1.8) можно представить в виде

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5[N^2 + m^4 N^{-2} + 2.37\delta_* m^2 N^{-1} + 1.404\delta_*^2 - 2P(m^2 - 1.185\delta_* N)$$
$$m = 2i + 1 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.21}$$

Введем величину

$$\theta = N/m \tag{1.22}$$

Тогда выражение (1.21) примет вид

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5m^2[\theta^2 + \theta^{-2} + 2.37\delta_*^2\theta^{-1}m^{-1} + 1.404\delta_*^2 m^{-2} - 2P(1 - 1.185\delta_*\theta m^{-1})] \tag{1.23}$$

При $\delta_* = 0$ формула (1.23) принимает вид

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5m^2(\theta^2 + \theta^{-2} - 2P) \tag{1.24}$$

При $\delta_* = 0$ получаем

$$P = 0.5(\theta^2 + \theta^{-2}) \tag{1.25}$$

Нетрудно видеть, что для любого m наименьшее значение выражения (1.25) реализуется при $\theta = 1$ и критическое усилие сжатия $P = 1$.

Наименьшее значение выражения (1.24) в зависимости от θ (при $P < 1$) так же реализуется при $\theta = 1$, при этом выражение (1.24) принимает вид

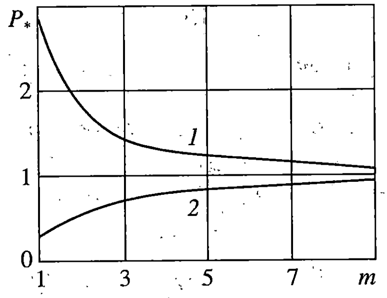
$$\omega^2/\omega_*^2 = m^2(1 - P)$$

Следовательно, наименьшее значение частоты (при $P < 1$) реализуется при $m = 1$.

Рассмотрим теперь выражение для определения критической нагрузки при $\delta_* \ne 0$. В дальнейшем учитывая неравенства (1.1) ограничимся рассмотрением $|\delta_*| \le 1$.

Соотношение (1.23) обращается в нуль, если

$$P = \frac{\theta^2 + \theta^{-2} + 2.37\delta_*\theta^{-1}m^{-1} + 1.404\delta_*^2 m^{-2}}{2(1 - 1.185\delta_*\theta m^{-1})} \tag{1.26}$$



Фиг. 5

Первоначально рассмотрим случай $\delta_* < 0$. Выражение (1.26) при $\delta_* = -|\delta_*|$ принимает вид

$$P = \frac{\theta^2 + \theta^{-2} - |\delta_*|m^{-1}(2.37\theta^{-1} - 1.404|\delta_*|m^{-1})}{2(1 + 1.185|\delta_*|\theta m^{-1})} \tag{1.27}$$

Определим как изменяется P при изменении m. При увеличении m знаменатель выражения (1.27) уменьшается, что касается числителя, то (при $\theta \le 1$, $|\delta_*| \le 1$) третий член $|\delta_*|m^{-1}(2.37\theta^{-1} - 1.404|\delta_*|m^{-1})$ при увеличении m уменьшается, следовательно, числитель увеличивается. Отсюда следует, что выражение (1.27) в зависимости от m будет при $m = 1$. С другой стороны элементарный численный расчет так же показывает, что наименьшее значение P (при $|\delta_*| \le 1$) реализуется при $m = 1$ и $\theta \le 1$. В частности, значения θ_{cr} в зависимости от δ_* (при $m = 1$) представлены на фиг. 2 кривой *1*. На фиг. 5 приведены наименьшие значения P (в зависимости от θ) при фиксированных m (для $\delta_* = -0.4$), кривая *2*.

Рассмотрим теперь случай $\delta_* > 0$. При этом формула для определения критического усилия имеет вид (1.26). Нетрудно видеть, что при увеличении m числитель выражения (1.26) уменьшается, а знаменатель увеличивается. Следовательно, значение P уменьшается. Поэтому наименьшая критическая нагрузка, определяемая на основании выражения (1.26), будет достигаться при достаточно больших m, при этом членами отвечающими отклонению оболочки от цилиндрической формы можно пренебречь и соответствующая критическая нагрузка P_{cr} будет практически равна критической нагрузке сжатия для цилиндрической оболочки $P_* \approx 1$ ($\theta = 1$). Этот результат подтверждается в работе [8]. На фиг. 5 приведены наименьшие значения P (в зависимости от θ) при фиксированных m (для $\delta_* = 0.4$), кривая *1*. При $\delta_* \to 0$, обе кривые *1* и *2* сливаются с прямой $P_* = 1$.

Рассмотрим теперь выражение (1.22) и определим как оно зависит от m. Обозначим $m = x^2$. Запишем выражение производной ω^2 по x.

$$(\omega^2)'_x = 2\{x[0.5(\theta^2 + \theta^{-2}) - P] + 0.5925\delta_*(\theta^{-1} + P\theta)\} \tag{1.28}$$

Функция $0.5(\theta^2 + \theta^{-2})$ имеет наименьшее значение при $\theta = 1$ и равна единице, при этом второе слагаемое (при $\delta_* > 0$) величина положительная. Следовательно при $P \le 1$ величина производной больше нуля, а это значит, что функция ω^2 монотонно возростающая и имеет минимум при $m = 1$.

Наименьшее значение ω^2 по θ (при фиксированном m) определяется из условия

$$(\omega^2)'_\theta = m^2(\theta + \theta^{-3} - 1.185\delta_*\theta^{-2}m^{-1} + 1.185\delta_*Pm^{-1}) = 0 \tag{1.29}$$

Отсюда получаем

$$\theta^4 + b\theta^3 + d\theta + e = 0, \quad b = 1.185\overline{\delta_*}P, \quad d = -1.185\overline{\delta_*}, \quad e = -1, \quad \overline{\delta_*} = \delta_* m^{-1} \tag{1.30}$$

Корни уравнения (1.30) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$\theta^2 + (b + B_{1,2})\theta + \left(y_1 + \frac{by_1 - d}{B_{1,2}}\right) = 0, \quad B_{1,2} = \pm\sqrt{8y_1 - b^2} \tag{1.31}$$

Корни уравнений (1.31) имеют вид

$$\theta_{1,2} = \frac{\sqrt{8\gamma_1} + b}{4} \pm \sqrt{-\frac{by_1 - d}{\sqrt{8\gamma_1}} + \frac{b\sqrt{8\gamma_1} - 4\gamma_2}{8}}, \quad \gamma_1 = y_1 + \frac{b^2}{8} \tag{1.32}$$

$$\theta_{3,4} = \frac{\sqrt{8\gamma_1} - b}{4} \pm \sqrt{-\frac{by_1 - d}{\sqrt{8\gamma_1}} + \frac{b\sqrt{8\gamma_1} + 4\gamma_2}{8}}, \quad \gamma_2 = y_1 - \frac{b^2}{4} \tag{1.33}$$

где y_1 – какой-либо корень кубического уравнения

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad 3p = \frac{bd - 4e}{4}, \quad 2q = -\frac{b^2 e + d}{8} \tag{1.34}$$

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1.185^2\overline{\delta_*^2}P}{4}\right), \quad q = -\frac{1.185^2\overline{\delta_*^2}(1 - P^2)}{16} \tag{1.35}$$

В дальнейшем упростим выражение (1.35) для P предполагая, что

$$(1.185^2\overline{\delta_*^2}P)/4 \ll 1 \quad (\left|\overline{\delta_*^2}\right| \le 0.5,\ P \le 0.5) \tag{1.36}$$

Тогда $P = 1/3$; при этом

$$D = p^3 + q^2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1.185^4\overline{\delta_*^4}(1 - P^2)^2}{16^2} > 0 \tag{1.37}$$

Так как дискриминант этого уравнения $D > 0$, то уравнение имеет один действительный корень $y_1 = (-q + \sqrt{D})^{1/3} + (-q - \sqrt{D})^{1/3}$. Подставляя сюда значения q, D получаем

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Bigg[\left(0.456\overline{\delta_*^2}(1 - P^2) + \sqrt{1 + 0.208\overline{\delta_*^4}(1 - P^2)^2}\right)^{1/3} + \\ + \left(0.456\overline{\delta_*^2}(1 - P^2) - \sqrt{1 + 0.208\overline{\delta_*^4}(1 - P^2)^2}\right)^{1/3}\Bigg] \tag{1.38}$$

Если принять, что

$$0.208\overline{\delta_*^4}(1 - P^2)^2 \ll 1 \tag{1.39}$$

И разложить в ряды выражения входящие в (1.38) отбрасывая при этом величины второго порядка малости, то получим

$$y_1 \approx 0.1755\overline{\delta_*^2}(1 - P^2) \tag{1.40}$$

Отметим, что при выполнении условия (1.36), условие (1.39) также выполняется. Подставляя значения y_1, b и d в (1.32), (1.33) и учитывая, что представляют интерес только положительные значения θ (так как $n^2 > 0$), при $\overline{\delta_*} < 0$ ($d > 0$) получаем, что положительным корнем является только корень θ_1 тогда как при $\overline{\delta_*} > 0$ ($d < 0$) – корень θ_3. В результате получаем

$$\theta_1 = \sqrt{1 + 0.1755\overline{\delta_*^2}P(1-P^2) - 0.0877\overline{\delta_*^2}(1+2P-3P^2) - 0.2962|\overline{\delta_*}|(1-P)} \tag{1.41}$$

$(\overline{\delta_*} < 0)$

$$\theta_3 = \sqrt{1 + 0.1755\overline{\delta_*}P(1-P^2) - 0.0877\overline{\delta_*^2}(1+2P-3P^2) + 0.2962\overline{\delta_*}(1-P)} \tag{1.42}$$

$(\overline{\delta_*} > 0)$

При $P = 0$ из этих неравенств получаем

$$\theta = \sqrt{1 - 0.0877\delta_*^2/m^2} - 0.2962|\delta_*|/m \quad (\delta_* < 0) \tag{1.43}$$

$$\theta = \sqrt{1 - 0.0877\delta_*^2/m^2} + 0.2962\delta_*/m \quad (\delta_* > 0) \tag{1.44}$$

При $m = 1$ отсюда получаем известную формулу (см. [6]). При $P = 1$ уравнение (1.30) принимает вид

$$\theta^4 + 1.185\frac{\delta_*}{m}\theta^3 - 1.185\frac{\delta_*}{m}\theta - 1 = 0$$

Отсюда имеем

$$(\theta^2 - 1)(\theta^2 + 1 - 1.185\delta_*/m) = 0$$

Нетрудно видеть, что положительный корень этого уравнения $\theta = 1$. При $P = 1$ из (1.41), (1.42) также получаем $\theta = 1$.

Сравним, в частности, для $\delta_* = 0.4$ наименьшее значение частоты при $m = 1$, когда $P = 0$ и $P = 1$:

$$\omega(\delta_* = 0.4,\ P = 0,\ m = 1,\ \theta = 1.148)/\omega_* = 1.2495$$

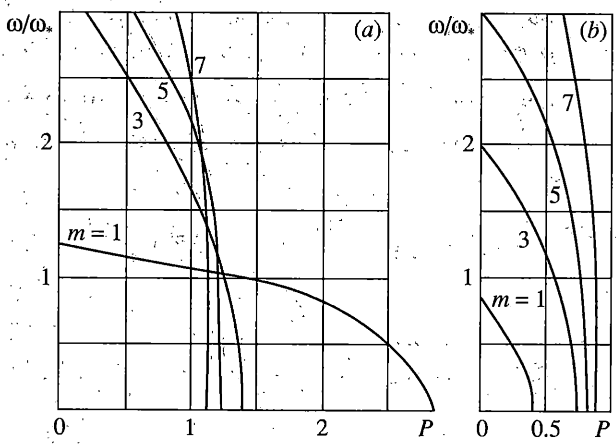
$$\omega(\delta_* = 0.4,\ P = 1,\ m = 1,\ \theta = 1)/\omega_* = 1.0297$$

При достаточно больших m на основании формул (1.41), (1.42) получаем, что $\theta \approx 1$, а на основании формулы (1.23) $\omega^2/\omega_*^2 \approx 0.5m^2(\theta^2 + \theta^{-2} - 2P)$, т.е. формулу практически совпадающую с формулой (1.24) для цилиндрической оболочки.

Для выше рассмотренного случая $\delta_* = 0.4$ на фиг. 6, *а* приведены графики изменения наинизших частот в зависимости от P для различных m ($m = 1, 3, 5, 7$). Нетрудно заметить, что наименьшая частота при $P \le 1$ реализуется при $m = 1$, тогда как при стремлении P к единице сверху, наименьшая частота реализуется по форме с достаточно большим m, соответствующей форме потери устойчивости.

Для $\delta_* < 0$, выражение (1.23) принимает вид

$$\omega^2/\omega_*^2 = 0.5m^2[\theta^2 + \theta^{-2} - |\delta_*|m^{-1}(2.37\theta^{-1} - 1.404|\delta_*|m^{-1}) - 2P(1 + 1.185|\delta_*|m^{-1})]$$



Фиг. 6

Учитывая, что с увеличением m последний и третий член этого выражения (при $\theta \leq 1$, $|\delta_*| \leq 1$) уменьшаются следует, что выражение в квадратных скобках увеличивается, кроме того увеличивается и множитель m^2. Следовательно, наименьшая частота при $\delta_* < 0$ реализуется при $m = 1$. Это так же демонстрируется ниже приведенными расчетами.

На фиг. 6, b приведены графики изменения низших частот в зависимости от P для различных m при $\delta_* = -0.4$. Нетрудно видеть, что наименьшая частота реализуется при $m = 1$. Кроме того из приведенных на фиг. 6 a, b графиков легко заметить, что для $\delta_* < 0$ по мере увеличения m основания кривых стремятся снизу к $P = 1$, тогда как для $\delta_* > 0$ наоборот – сверху.

Отметим, что выше полученные результаты при $m > 1$ имеют место при значениях θ близких к единице ($\theta \approx 1$), т.е. когда $n^2 \approx \varepsilon^{-1/4}\lambda_m$. Поэтому данные результаты справедливы только для достаточно тонких оболочек, когда $\varepsilon^{-1/4} \gg \lambda_m$, тогда имеет место соотношение $n^2 \gg \lambda_m^2$ и данная теория справедлива. Из выше полученных качественных результатов (для $\delta_* > 0$) следует, что формы колебаний с $m > 1$ совпадающие с соответствующей формой потери устойчивости возникают при $P > 1$, причем чем больше m, тем соответствующая критическая нагрузка P_{cr} ближе к единице. При изменении P в интервале $0 \leq P \leq 1$ наименьшей является частота с формой колебания, когда $m = 1$.

При $\delta_* < 0$ формы колебаний с $m > 1$ совпадающие с соответствующей формой потери устойчивости возникают при P больших P_{cr} ($m = 1$). Форма колебаний, соответствующая наименьшей частоте, и форма потери устойчивости, соответствующая наименьшей критической нагрузке реализуется при $m = 1$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда

$$P_1 = P_0 + P_t \cos \Omega t \tag{2.1}$$

Будем искать решение уравнения (1.6) в форме

$$w = f_{mn}(t) \cos \lambda_m \xi \sin n\varphi \tag{2.2}$$

Подставляя приведенное решение в (1.6) и требуя, чтобы последнее удовлетворилось при любых ξ и φ, получаем

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2}+\frac{E}{\rho\tau^2}[\varepsilon n^4+\lambda_m^4 n^{-4}+4\delta\lambda_m^2 n^2+4\delta^2-p_1(t)(\lambda_m^2-2\delta n^2)]f_{mn} = 0 \tag{2.3}$$

Частоты собственных колебаний оболочки (при $P_1 = P_0$) определяются из уравнения (2.3), если положить $f(t) = C\sin\omega t$ и выражаются формулой (1.8). Так как уравнение (2.3) идентично для всех форм колебаний, то индексы m, n можно опустить.

Введем аналогично выше сказанному, безразмерные величины (1.9), (1.22) и запишем уравнение (2.3) в виде

$$\begin{gathered}d^2f/dt^2+0.5\omega_*^2m^2[\theta^2+\theta^{-2}+2.37\delta_*\theta^{-1}m^{-1}+1.404\delta_*^2m^{-2}-\\ -2(P_0+P_t\cos\Omega t)(1-1.185\delta_*\theta m^{-1})]f = 0\\ P_0 = p_0/p_{0*},\quad P_t = p_t/p_{0*}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Критическое значение усилия P в статическом случае ($P_t = 0, f = \text{const}$) определяется из уравнения (2.4) и выражается формулой (1.26). Приведем уравнение (2.4) к стандартному виду уравнения Матье

$$d^2f/dt^2+\omega^2(\theta)[1-2\mu(\theta)\cos\Omega t]f = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\omega^2(\theta) = \omega_0^2(\theta)(1-P_0/P(\theta)),\\ \omega_0^2(\theta) = 0.5\omega_*^2m^2(\theta^2+\theta^{-2}2.37\delta_*\theta^{-1}m^{-1}+1.404\delta_*^2m^{-2})\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\mu(\theta) = \frac{P_t}{2[P(\theta)-P_0]},\quad \omega_*^2 = 2\lambda_1^2\varepsilon^{1/2}E/\rho\tau^2 \tag{2.7}$$

$$P(\theta) = \frac{\theta^2+\theta^{-2}2.37\delta_*\theta^{-1}m^{-1}+1.404\delta_*^2m^{-2}}{2(1-1.185\delta_*\theta m^{-1})} \tag{2.8}$$

величина μ – коэффициент возбуждения. Решение уравнения (2.5) исследовались в целом ряде работ, где отмечено, что при определенных соотношениях между μ, Ω, ω и $t\to\infty$ решение уравнения (2.6) будет неограниченно возрастать в областях неустойчивости. Обобщая результаты [10], на рассматриваемую оболочку, приведем ниже следующие формулы. Для выяснения расположения областей динамической неустойчивости, первоначально рассмотрим случай, когда $P_t\to 0$ ($\mu\to 0$).

При этом получаем, что эти области неустойчивости располагаются вблизи частот

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)/k \tag{2.9}$$

В зависимости от числа k различают первую, вторую, третью и т.д. области динамической неустойчивости. Область неустойчивости ($k = 1$), лежащая вблизи $\Omega_* = 2\omega(\theta)$ когда $\omega(\theta)$ принимает наименьшее значение, является наиболее опасной и имеет поэтому наибольшее практическое значение. Эту область, называют главной областью динамической неустойчивости.

При P_t отличном от нуля, получаем следующую формулу для границ главной области неустойчивости

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)\sqrt{1\pm\mu(\theta)} \tag{2.10}$$

Если учитывать силы сопротивления пропорциональные первой производной от перемещения по времени (с коэффициентом затухания ε), то формула для определения границ главной области неустойчивости принимает вид

$$\Omega_* = 2\omega(\theta)\sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2(\theta) - (\Delta/\pi)^2}}, \quad \Delta = 2\pi\varepsilon/\omega(\theta) \qquad (2.11)$$

где отброшены члены, содержащие высшие степени Δ/π, учитывая, что декремент затухания Δ обычно весьма мал в сравнении с единицей. Значение выражений $\omega(\theta)$, $P(\theta)$, $\mu(\theta)$ – определяются на основании формул (2.6), (2.7), (2.8), где m и θ соответствуют наименьшему значению $\omega(\theta)$. При $m = 1$ на основании формулы (1.22) $\theta = N$, соответствующие значения N и $\omega(N)$ в зависимости от P_0 и δ_* представлены на фиг. 3, 4. Из (2.11) следует, что минимальное значение коэффициента возбуждения (критическое), при котором еще возможны незатухающие колебания, определяется равенством

$$\mu_{*1} = \Delta/\pi \qquad (2.12)$$

Для границ второй области неустойчивости ($k = 2$) имеет место формула

$$\Omega_* = \omega(\theta)\sqrt{1 + \mu^2(\theta) \pm \sqrt{\mu^4(\theta) - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2[1 - \mu^2(\theta)]}} \qquad (2.13)$$

В данном случае, критическое значение коэффициента возбуждения приближенно определяется равенством $\mu_{*2}(\theta) = (\Delta/\pi)^{1/2}$. Аналогичным образом обобщая результаты [10], можно привести формулы и для границ третьей области неустойчивости, которая практически редко реализуется.

На основании приведенных формул и графиков нетрудно определить интервалы изменения возбуждающих частот (в зависимости от δ_*, P_0, P_t) попадающих в области динамической неустойчивости. Так например, для $\delta_* = 0.4$, $P_0 = 0.3$, $P_t = 0.05$, $\Delta = 0.01$ получаем, что наименьшая частота реализуется при $m = 1$, $N = 1.08$; $\omega(N) = 1.19$, $P(N) = 3.202$, $\mu(N) = 0.00863$, $\mu_{*1} = 0.00318$, $\mu_{*2} = 0.0564$. Тогда на основании формулы (2.11) получаем, что значения Ω, заключенные в интервале $2.371\omega_* < \Omega < 2.390\omega_*$ находятся в главной области динамической неустойчивости. Так как $\mu(N) < \mu_{*2}$ то вторая область неустойчивости не достижима.

В случае $\delta = -0.4$ и тех же значениях внешней нагрузки наименьшая частота реализуется при $m = 1$, $N = 0.84$; $\omega(N) = 0.28$, $P(N) = 0.436$, $\mu(N) = 0.1838$. При этом на основании формулы (2.11) получаем, что в главную область неустойчивости попадают значения Ω заключенные в интервале $0.506\omega_* < \theta < 0.609\omega_*$. В данном случае вторая область неустойчивости также достижима, так как $\mu(N) > \mu_{*2}$. При этом на основании формулы (2.13) получаем, что во вторую область неустойчивости попадают значения Ω, находящиеся в интервале $0.280\omega_* < \Omega < 0.292\omega_*$.

Приведенные формулы и графики позволяют достаточно просто определить области неустойчивости рассмотренных оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даревский В.М.* Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35–45.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике М; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. 319 с.

5. *Кукуджанов С.Н.* О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек // Инж.ж. МТТ. 1968. № 3. С. 140–144.
6. *Кукуджанов С.Н.* О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 121–126.
7. *Никулин М.В.* Влияние осевых усилий на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки // Прочность цилиндрических оболочек. М: Оборонгиз, 1959. С. 131–145.
8. *Канн С.С.* Устойчивость оболочек вращения с криволинейными образующими при осевом сжатии // Прикл. механика. 1966. Т. 2. № 1. С. 59–68.
9. *Стретт М.Д.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: ДНТВУ, 1935. 237 с.
10. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М: Гостехиздат, 1956. 600 с.

Тбилиси

Поступила в редакцию
13.03.2003