МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 624.07:534.1

© 2004 г. В. Г. ЮСИФОВ

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВОЛН СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Рассматривается задача распространения волны сильного разрыва в нелинейно-упругих стержнях. Полученное еще Риманом решение задачи о распространении волны сильного разрыва в газах привело к нарушению закона сохранения механической энергии. Впоследствии Гюгонио устранил этот недостаток, привлекая термодинамические соображения.

В общей постановке решение этой задачи для нелинейно-упругого стержня рассматривал Х.А. Рахматулин и показал, что закон сохранения механической энергии при переходе через поверхность сильного разрыва невыполним.

В настоящей работе показано, что одного представления о волне сильного разрыва как о геометрическом месте точек пересечений характеристик положительного наклона недостаточно, так как оно не приводит к решению задачи и потому нуждается, как и в случае газовой динамики, дополнительных соображениях.

Рассматривается полубесконечный нелинейно-упругий стержень с известной зависимостью "напряжение–деформация" $\sigma = \sigma(e)$. Распространение волн в стержне описывается уравнением [1]:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \sigma'(e)/\rho \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями:

$$u_x = (x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

и граничным условием:

$$u_x(0, t) = \varepsilon(t), \quad \varepsilon'(t) > 0, \quad 0 \le t < +\infty \tag{3}$$

Здесь $u(x, t)$ – смещение сечения x в момент времени t, ρ – плотность материала стержня.

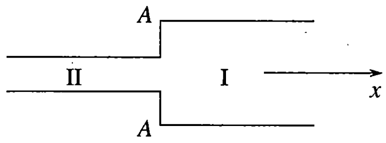
Решением уравнения (1) при условиях (2)–(3), как известно, является:

$$u_x = \varepsilon(t - x/a), \quad u_t = -\int_0^{u_x} a de = -\psi(u_x) \tag{4}$$

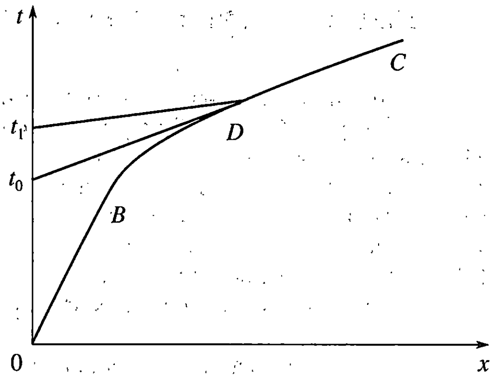
причем характеристики $dx = adt$ уравнения (1) являются прямолинейными.

В случае линейно-упругих деформаций $a^2 = a_0^2 = E/\rho$ и разрыв в граничном условии $\varepsilon(t)$ при $t = t_0$ распространяется вдоль характеристики $x = a_0(t - t_0)$ как поверхность сильного разрыва AA (фиг. 1).

В случае нелинейно-упругих деформаций предположение о волне сильного разрыва как о поверхности AA (фиг. 1) приводит к нарушению закона сохранения механиче-



Фиг. 1



Фиг. 2

ской энергии [1]. Покажем, что это предположение не может привести и к решению задачи о волне сильного разрыва.

Если $\sigma''(e) \geq 0$, то при условии (3) скорость каждой последующей волны превышает скорость предыдущей. Учитывая это, волна сильного разрыва BC (фиг. 2) есть геометрическое место точек пересечений каждых двух последовательных характеристик $x = a(t_0)(t - t_0)$ и $x = a_1(t - t_1)$, где $a(t_i) = a(\varepsilon(t_i))$ $(i = 0, 1)$. Отсюда, при $t_1 \to t_0$ в [1] получено уравнение волны сильного разрыва BC в параметрическом виде

$$t = t_0 + a(t_0)/a'(t_0), \quad x = a^2(t_0)/a'(t_0) \tag{5}$$

откуда следует

$$dx/dt = a(t_0) \tag{6}$$

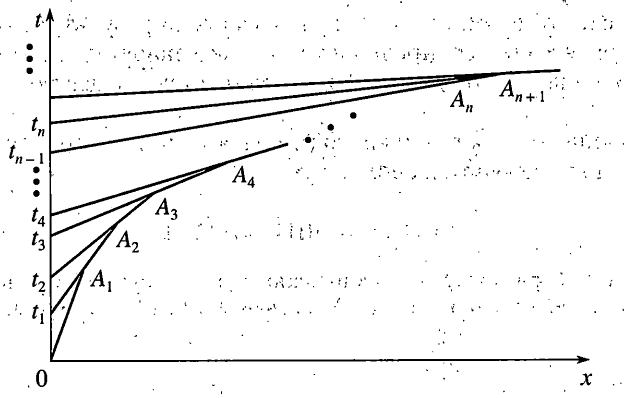
т.е. BC есть огибающая однопараметрического семейства прямолинейных характеристик $dx = a(\varepsilon(t_0))dt$.

Покажем, что в случае непрерывной функции $\varepsilon(t)$ кривая BC вовсе не является волной сильного разрыва. Обозначим $\varepsilon_n = \varepsilon(t_n)$, $a_n = a(\varepsilon_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть A_n (фиг. 3) есть точка пересечений характеристик $x = a_n(t - t_n)$ и $x = a_{n+1}(t - t_{n+1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда кривая BC есть предельное положение ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} \ldots$ при $\max\Delta t_n \to 0$, где $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

Вдоль характеристики $x = a_n(t - t_n)$ т.е. вдоль отрезка t_nA_{n+1} имеем:

$$u_x = \varepsilon_n, \quad u_t = -\psi(\varepsilon_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

Очевидно, и на части A_nA_{n+1} этого отрезка решением является (7). А это значит, что в случае непрерывной зависимости $\varepsilon(t)$ на ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} \ldots$ решение (7) будет непрерывным. Тогда и во всей замкнутой области $t0A_1A_2 \ldots A_n \ldots A_{n+1} \ldots$ имеем непре-



Фиг. 3

рывное решение (7). В пределе при $\max\Delta t_n \to 0$, ломаная $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}\ldots$ перейдет в кривую BC (фиг. 2). Следовательно, в замкнутой области $tOBC$ имеем непрерывное решение (4), т.е. BC не является волной сильного разрыва.

Этот результат легко поддается физическому объяснению. Пусть справа от поверхности AA состояние I определяется значениями $u_x = \varepsilon_{n-1}$, $u_t = -\psi(\varepsilon_{n-1})$, а слева состояние II значениями $u_x = \varepsilon_n$, $u_t = -\psi(\varepsilon_n)$ ($n = 2, 3, \ldots$). При взаимодействии этих состояний, т.е. при перемещении поверхности AA состояние II без изменения своих параметров просто поглощает состояние I. Налицо нарушение закона сохранения энергии в точке A_n. Аналитически это выражается в том, что из точки A_n (фиг. 3) далее распространяется только волна $x = a_n(t - t_n)$ до ее поглощения в точке A_{n+1} следующей волной и т.д. А это и приводит к тому, что BC не является волной сильного разрыва.

То, что BC не является волной сильного разрыва, следует также и из следующих соображений. Из (6) вытекает, что BC есть огибающая семейства характеристик $dx = a(\varepsilon(t_0))dt$. Но точки огибающей принадлежат семейству характеристик. Следовательно, если на характеристиках $dx = a(\varepsilon(t_0))dt$ имеем (4), то и на огибающей будет (4). При этом, если наклон $a(\varepsilon(t_0))$ характеристик изменяется непрерывно, то и на BC будет непрерывное решение (4). А это значит, что BC не является волной сильного разрыва.

Рассмотрим пример. Пусть $\sigma = \frac{1}{3}\rho k^2 e^3$ (ρ, k – const) и $\varepsilon(t) = pt$ (p = const). Тогда $a(e) = ke$, $a(\varepsilon(t_0)) = kpt_0$ и $a'(\varepsilon(t_0)) = kp$. Подставляя эти значения в (5), получим уравнение кривой BC:

$$t = 2t_0, \quad x = kpt_0^2 \tag{8}$$

Область $tOBC$ без кривой BC (фиг. 3) покрыта характеристиками $dx/dt = a(\varepsilon(t_0)) = kpt_0$. Из параметрического вида (8) найдем:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_D = kpt_0 = a(\varepsilon(t_0)) \tag{9}$$

т.е. точка D (фиг. 3) кривой BC также лежит на характеристике $dx/dt = a(\varepsilon(t_0))$, вдоль которой имеем (4). Следовательно, если $\varepsilon(t)$ непрерывная функция, то решение (4) непрерывно уже всюду в замкнутой области $tOBC$, а это значит, что BC не является волной сильного разрыва.

Заметим также, что из (9) следует парадоксальный результат, что скорость волны сильного разрыва в точке D определяется только значением $\varepsilon(t)$ при $t = t_0$, т.е. скоростью $a(\varepsilon(t_0))$ волны $x = a(\varepsilon(t_0))(t - t_0)$ и абсолютно не зависит от скорости предыдущей волны.

Представление поверхности сильного разрыва в виде поверхности AA справедливо только в случае линейно-упругих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рахматулин Х.А.* О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации // Учен. зап. МГУ. 1951. Т. 3. Вып. 152. С. 47–55.

Баку

Поступила в редакцию
22.07.2002