МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. М.Я. БРОВМАН

О ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК В ПРОЦЕССЕ ДВИЖЕНИЯ

Методы расчета деформации изгиба балок при пластическом течении и при ползучести рассмотрены во многих работах, см. например [1, 2]. В [3] показано, что если балка совершает движение вдоль своей оси, то пластическая деформация существенно изменяется по сравнению с изгибом неподвижных балок. В данной работе рассмотрена деформация ползучести балок в процессе их движения.

Рассмотрим деформацию балки с большим количество опор пролетами l (фиг. 1). Если балка неподвижна, то при постоянной распределенной нагрузке p деформация симметрична относительно любой опоры и легко выполнить краевые условия, см. (фиг. 1, a):

$$W(x) = 0, \quad dW/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \tag{1}$$

где W – прогиб, а координату x принимаем от опоры A (фиг. 1, a).

При этом можно известными методами [2] для длинной балки получить периодическое решение с периодом, равным l и с краевыми условиями (1) на каждой опоре. Изгибающий момент в пролете AB равен

$$\begin{gathered} M(x) = -M_0 + 0.5plx - 0.5^2px^2 = 0.5pl^2(-m+u-u^2) \\ m = 2M_0/pl^2, \quad u = x/l \end{gathered} \tag{2}$$

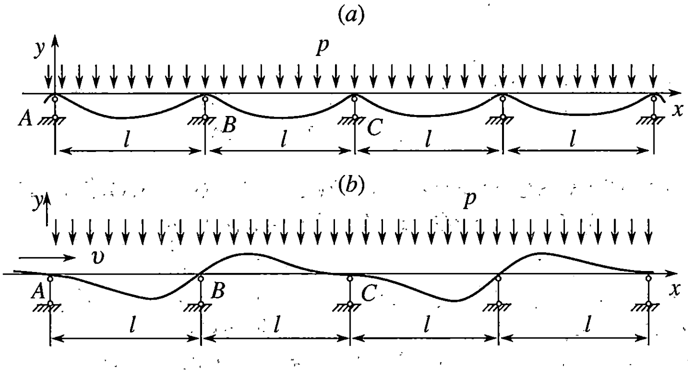
где u – безразмерная координата, M_0 – изгибающий момент в опорном сечении (при $u = 0$ и $u = 1$).

Для изгиба неподвижной балки деформации четных и нечетных пролетов балки (при p = const) совершенно одинаковы, так же как и опорные реакции, которые все равны (pl).

Если балка совершает движение вдоль оси x со скоростью v (фиг. 1), то процесс деформации изменяется очень существенно, прогиб является знакопеременным в каждой паре соседних пролетов балки. В [3] было показано, что при пластической деформации движение балки с любой, сколь угодно малой, но не равной нулю скоростью нарушает симметрию (симметрии относительно сечения u = 0.5 не будет, даже при симметричных нагрузках), а максимальный прогиб имеет место не в зоне пластической деформации, а в зоне упругой разгрузки. Для деформации ползучести влияние движения еще значительнее и прогибы в пролетах AB и BC неодинаковы, как для неподвижной балки, а существенно различны.

Данная задача имеет весьма большое значение в связи с широким применением машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ).

В кристаллизатор заливают жидкий металл и затвердевает корка слитка, которая при непрерывном движении удаляется из кристаллизатора. В системе "вторичного охлаждения" твердая корка толщиной 12–30 мм подвергается давлению жидкого металла и последовательно проходит роликовую зону, длина которой достигает 40–80 м, а число



Фиг. 1

роликовых опор 100–250 и более. Для широких слябов, для которых допустимо применять модель плоской деформации, корка слитка деформируется между роликами в процессе ее движения. Для стальных слитков температура корки равна на выходе из кристаллизатора 1200–1360°C и ее деформация от действия давления рассматривается, как деформация ползучести. Стремление максимально увеличить производительность требует увеличения скорости движения слитка, т.е. реализации литья со все более тонкой коркой.

Однако, чрезмерная ее деформация приводит к появлению трещин и авариям с вытеканием жидкого металла (иногда до нескольких тонн). Такие аварии приводят к очень длительным простоям агрегатов, поэтому проблема расчета деформации корки слитка является весьма актуальной. Обычные формулы, полученные для изгиба неподвижной балки, в данном случае неприменимы.

В расчетах величина p для нескольких соседних пролетов балки может быть принята постоянной, также как усредненные величины толщины корки и температуры, которые на длине нескольких пролетов изменяются незначительно.

Исследования различных формул, связывающих напряжение и скорость деформации, приведены в [2, 4–6].

Далее примем для расчетов один из простейших вариантов теории установившейся ползучести, без учета упрочнения

$$\sigma = C\varphi^{1/n}\exp(-n_1 t) \tag{3}$$

где σ – напряжение; φ – скорость деформации; t – температура; C, n, n_1 – величины для данного металла (сплава) постоянные.

При высоких температурах, близких к температуре затвердевания, см. [6], упрочнение можно не учитывать (учет зависимости напряжения и от степени деформации, принципиальных результатов расчета не изменяет).

При действии изгибающего момента $M(x)$ будем иметь

$$M(x) = 2\int_0^{0.5\delta} y\sigma(y)dy = 2C\int_0^{0.5\delta} y\varphi^{\frac{1}{n}}\exp(-n_1 t)dy \tag{4}$$

где y – координата по толщине корки, δ – толщина корки слитка (в данной задаче $\delta \ll l$).

Усреднив температуру и считая ее постоянной по толщине, примем степень деформации, как обычно в элементарной теории изгиба $\varepsilon = y\partial^2 W/\partial x^2$, где W – прогиб балки.

Для подвижной балки

$$\varphi = \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \upsilon\frac{\partial\xi}{\partial x} = y\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial\tau} + \upsilon\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right) \tag{5}$$

где τ – время. Следуя (3), получаем уравнение изгиба

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial\tau} + \upsilon\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{2}{\delta}\left[\frac{2M(x)(2+1/n)}{C\delta^2}\right]^n \exp(nn_1 t) \tag{6}$$

Общее решение (6) имеет вид:

$$W(x,\tau) = \psi_1(\tau) + x\psi_2(\tau) + \int dx\int\psi_3(z)dx +$$
$$+ \int dx\int dx\int\frac{2\exp(nn_1 t)}{\upsilon\delta}\left[\frac{2M(x)(2+1/n)}{C\delta^2}\right]^n dx \tag{7}$$

где $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ – дифференцируемые функции времени, а ψ_3 – функция величины $z = \int\upsilon\, d\tau - x$, причем ψ_1, ψ_2, ψ_3 определяются краевыми и начальными условиями.

Обычно, при фиксированных (неподвижных) опорах ψ_1, ψ_2 – величины постоянные. Для практических расчетов важны два предельных случая: при $\upsilon = 0$ из (6) получаем формулы для изгиба неподвижной балки; а при $\upsilon = \text{const} \neq 0$, $\partial W/\partial\tau = 0$ получаем уравнение стационарного изгиба, когда траектория движения и конфигурация изогнутой балки остаются постоянными. Именно этот случай, (реализующийся при непрерывном литье, когда процесс длится до 1.5–2 часов и форма балки не изменяется) представляет наибольший интерес. При $\partial W/\partial\tau = 0$ уравнение (6) определяет связь с изгибающим моментом третьей производной $W(x)$ по x, (а не второй, как это имеет место для неподвижной балки).

Такое повышение порядка производной по координате x создает ряд особенностей, в частности, оказывается невозможным получить периодическое решение с периодом l. Например, для неподвижной балки при $\upsilon = 0$, $p = \text{const}$ из (6) с учетом (2) следует

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\right) = F(-m+u-u^2)^n$$

где величина

$$F = \frac{2}{\delta}\exp(nn_1 t)\left[\frac{pl^2(2+1/n)}{C\delta^2}\right]^n$$

в данном случае постоянная. В простейшем случае (линейной задачи) $n = 1$ получаем $m = 1/6$, а скорость прогиба $\partial W/\partial\tau = -{}^1/_{12}Fl^3u^2(1-u)^2$ и краевые условия (1) выполнены.

При $u = 0$ и $u = 1$ равны значения функции W, $\partial W/\partial\tau$, а также ее первой и второй производных по x в сечениях A и B (фиг. 1) (т.е. при $x = u = 0$ и $x = l$, $u = 1$). Аналогично периодическое решение при $n = 3$ будет иметь место при $m = 0.151$, а при $n = 5$ – $m = 0.145$ и т.д., т.е. построение периодических решений с периодом l затруднений не вызывает. Но в другом случае при $\partial W/\partial\tau = 0$:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{F}{\upsilon}(-m+u-u^2)^n \tag{8}$$

и при $n = 1$ получаем решение, удовлетворяющее условию (1) при $u = 0$:

$$W(x) = \frac{Fl^3}{\upsilon}\left(0.5C_1u^2 - \frac{mu^3}{6} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^5}{60}\right)$$

включающее две неизвестных постоянные C_1 и m, а для построения периодического решения надо удовлетворить трем условиям: двум уравнениям (1) и условию $\partial^2 W/\partial x^2(0) = \partial^2 W/\partial x^2(1)$, что невозможно.

Если обеспечить выполнение краевых условий (1), то получим

$$C_1 = 1/60, \quad m = 1/5, \quad W(x) = \frac{Fl^3}{120\upsilon}(1 - 4u + 5u^2 - 2u^3)$$

Но вторая производная при $u = 0$ равна $\partial^2 W/\partial x^2(0) = Fl/(60\upsilon)$, а при $u = 1$ имеем $\partial^2 W/\partial x^2(1) = -Fl/(60\upsilon)$.

Можно выбрать постоянную C_1 так, чтобы обеспечить равенство вторых производных, но тогда не будет выполнено одно из условий (1). Если отказаться от периодического решения и определять последовательно прогиб от пролета к пролету из условия непрерывности функции $W(x)$ и трех ее производных, то оказывается невозможным выполнение краевых условий (1). Однако, и в этой задаче можно получить периодическое решение, но с периодом $(2l)$, в два раза большим, чем для неподвижной балки. При $p = \text{const}$ опорная реакция в опоре A равна $R_1 = k_1 pl$, а в опоре $B - R_2 = k_2 pl = 2(1 - k_1)pl$.

Тогда вместо (2) получаем следующее выражение для $M(x)$:

$$M(x) = 0.5pl^2(-m + 2k_1 u - u^2) \quad \text{при} \quad 0 \le u \le 1 \tag{9}$$

$$M(x) = 0.5pl^2[-m + 2k_1 u - u^2 + 2k_2(u - 1)] \quad \text{при} \quad 1 \le u \le 2 \tag{10}$$

Выражение (9) применимо для пролета AB, а (10) – для пролета BC (фиг. 1, *в*). В этом случае появляется дополнительная постоянная k_1, что позволяет удовлетворять всем краевым условиям.

Из уравнения (8), например, при $n = 1$ получаем: $m = 2/15$, $k_1 = 7/15$, $k_2 = 16/15$, а функция $W(x)$ будет равна

$$W(x) = -\frac{Fl^3}{180\upsilon}u^3(1 - u)(4 - 3u) \quad \text{при} \quad 0 \le u \le 1 \tag{11}$$

$$W(x) = \frac{Fl^3}{180\upsilon}(1 - u)(2 - u)^3(3u - 2) \quad \text{при} \quad 1 \le u \le 2 \tag{12}$$

При этом, как нетрудно убедиться, $W(0) = W(2) = 0$, $\partial W/\partial x(0) = \partial W/\partial x(2)$, $\partial^2 W/\partial x^2(0) = \partial^2 W/\partial x^2(2) = 0$, $\partial^3 W/\partial x^3(0) = \partial^3 W/\partial x^3(2) = -2Fl/(15\upsilon)$.

На промежуточной опоре B будем иметь $W(1) = 0$, $\partial W/\partial x(1) = Fl^3/(180\upsilon)$, $\partial^2 W/\partial x^2(1) = 0$, $\partial^3 W/\partial x^3(1) = -1/5F/\upsilon$.

Функция W является периодической с периодом $(2l)$, а характер изменения $W(u)$ иллюстрируется фиг. 2. Для всех "n" решения типа (11) и (12) антисимметричны и $W(u) = -W(2 - u)$.

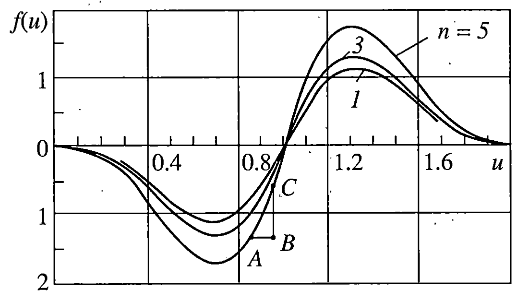
Величины функций $W(x)$ и их производных (до третьей) при $u = 0$, $u = 2$ ($u = 4$, 6 и т.д.) одинаковы. Существенно, что прогибы в пролета AB и BC (т.е. при $0 \le u \le 1$ и $1 < u \le 2$) (фиг. 2) имеют различные знаки. Аналогично были построены решения и при других величинах n, например, при $n = 3$ в диапазоне $0 \le u \le 1$:

$$W(u) = \frac{Fl^3}{\upsilon}\left[-\frac{m^3u^3}{6} + \frac{k_1 mu^4}{4} - \frac{u^5(m^2 + 4mk_1^2)}{20} + \right.$$

$$\left. + \frac{u^6}{30}(3mk_1 + 2k_1^3) - \frac{u^7}{70}(m + 4k_1^2) + \frac{k_1 u^8}{56} - \frac{u^9}{504}\right]$$

причем постоянные равны $m = 0.137$ $k_1 = 0.49$.

При нецелых величинах n необходимы численные расчеты. Для подвижной балки появляется также различие между нечетными и четными опорными реакциями. На-



Фиг. 2

пример, при $n = 1$ $k_1 = 7/15$ и с учетом соседних пролетов реакции на нечетных опорах равны $14/15pl$, а на четных $16/15pl$.

Такое различие, составляющее 13.33%, является небольшим, однако, оно характеризует принципиальные различия процессов изгиба подвижной и неподвижной балок (для неподвижной балки при $p = \text{const}$ все опорные реакции равны (pl), $k_1 = 0.5$). С увеличением n различие между опорными реакциями уменьшается, например, при $n = 3$ реакции отличаются только на 4%.

Прогиб при стационарном изгибе можно записать в виде

$$W(u) = Fl^3/(\upsilon)10^{-(n+2)}f(u) \tag{13}$$

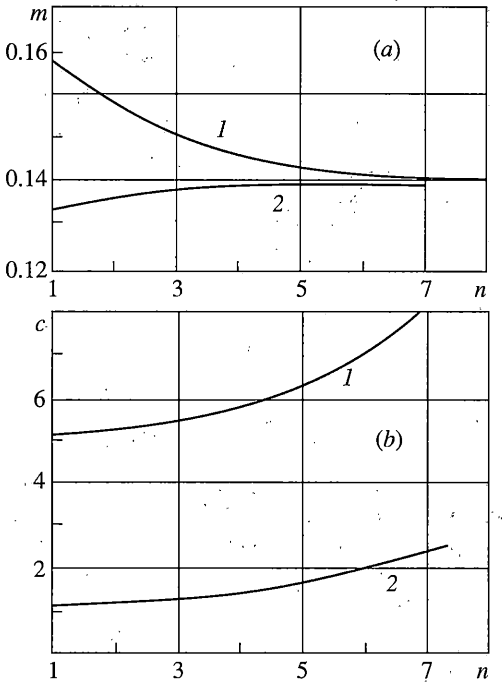
а максимальный прогиб

$$|W_m| = cFl^3/(\upsilon)10^{-(n+2)} \tag{14}$$

где функции $f(u)$ представлены на фиг. 2 для нескольких величин n. Коэффициенты c определяют максимальные величины прогибов. Они также зависят от n, например, при $n = 1$ $c = 1.1$; при $n = 3$ $c = 1.3$, а при $n = 5$ $c = 1.72$. Для неподвижных балок аналогично (14), можно записать максимальную скорость прогиба (при $\upsilon = 0$ это сечение $u = 0.5$) в виде

$$\left|\frac{\partial W}{\partial \tau}\right|_m = cFl^2 10^{-(n+2)}$$

На фиг. 3, *а*, *в* приведены результаты расчетов в виде графиков функций $m(n)$ и $c(n)$ причем в обоих случаях кривые *1* соответствуют неподвижной балке, а кривые *2* – подвижной в стационарном режиме. Различия весьма существенны, при этом величины m уменьшаются с увеличением n для неподвижной балки и увеличиваются для подвижной. Максимальный (по модулю) прогиб в первом пролете имеет место при $u = 0.67$–0.70, причем, если для неподвижной балки максимальный прогиб имеет место в середине пролета при $u = 0.5$; то для подвижной балки сечение максимального прогиба смещается от середины пролета: по направлению движения – в нечетных пролетах и в противоположном направлении – в четных пролетах. Для балок из идеально упругого материала никакого различия между четными и нечетными пролетами при симметричной внешней нагрузке не будет, подобные эффекты возникают при зависимости деформации от истории нагружения, либо когда нагрузки определяют не саму деформацию, а ее производные по времени. Но в таких случаях, как деформация корки слитка от действия давления жидкого металла, модель упругой среды неприменима, в этом случае предпочтительнее использовать схему ползучести, когда деформация



Фиг. 3

очень сильно зависит от того находится ли выбранное сечение в четном пролете или в нечетном. Определяющее влияние ползучести подтверждается и тем, что при остановке балки ее прогиб со временем увеличивается. При этом увеличение прогиба всюду происходит в направлении действия внешнего давления (но при этом различия между четными и нечетными пролетами сохраняются).

Различия между процессами изгиба неподвижной и подвижной балок столь существенны, что в четных пролетах ($1 < u \leq 2$, $3 < u \leq 4$ и т.д.) балка изгибается в направлении, противоположном направлению действия давления p.

В стационарном режиме произвольная точка A (фиг. 2) переместившись вдоль оси x на величину AB, одновременно перемещается на величину BC вдоль оси y с компонентой скорости v_y, а соотношение скоростей вдоль обоих осей $v_y/v_x = \partial W/\partial x$.

В точке $u = 1$ компонента скорости $v_y > 0$, т.е. направлена вверх, вдоль оси y и движение при $u > 1$ продолжается в этом же направлении, но при этом величина v_y за счет воздействия давления p уменьшается (до нуля при $u = 1.33$–1.40), затем изменяет знак, а в точке $u = 2$, $v_y = 0$, при $u > 2$ начинается следующий цикл знакопеременного изгиба.

На первый взгляд, деформация балки при ползучести должна приводить к увеличению прогиба в направлении внешней нагрузки, затем прогиб при движении данного элемента балки к опоре B (фиг. 1, *в*) уменьшается (до нуля на опоре B). Далее этот цикл, как предполагалось, должен повторяться в следующем пролете BC. Однако, как показывают расчеты, скорость движения вдоль оси y и после прохождения опоры B некоторое время остается положительной, поэтому в пролете BC направление изгиба противоположно направлению внешней нагрузки p.

Изгиб неподвижной балки симметричен относительно сечений $u = 1, 2, 3\ldots$ (а также $u = 0.5, 1.5, 2.5\ldots$). Движение балки нарушает эту симметрию и четко разделяет все пролеты балки на четные и нечетные. Это разделение настолько существенно, что даже направления прогибов в четных и нечетных пролетах различны.

Если в нечетных пролетах направление прогиба совпадает с направлением внешнего давления, то в четных пролетах изгиб происходит в направлении, противоположном направлению давления, что является отличием от обычного изгиба (фиг. 1, *a*).

Для реальной балки первый (нечетный) пролет расположен сразу за кристаллизатором (при краевых условиях (1)), в отличие от идеализированной модели "бесконечно длинной" балки, для которой выбор четных и нечетных пролетов является произвольным.

Величины коэффициентов c, для подвижных балок гораздо меньше, чем для неподвижных, т.е. деформация ползучести подвижных балок меньше (фиг. 3, *в*). Например, при $n = 3$ величина $c = 5.3$ для неподвижной балки с $c = 1.3$ для подвижной. Если скорость прогиба не изменяется, то за время, равное l/v (т.е. время, необходимое для перемещения балки на шаг роликов l), прогиб неподвижной балки был бы в 4.1 раз больше, чем максимальный прогиб подвижной балки в процессе ее движения со скоростью v.

Случаи, когда прогибы в четных и нечетных пролетах существенно различны, даже по знаку, в ряде случаев обнаруживались при исследованиях, но причина этого оставалась неясной (попытки объяснить этот эффект биениями роликов к успеху не привели).

Однако, следует учитывать, что само движение балки при ползучести может быть причиной нарушения симметрии и разделения элементов балки на четные и нечетные. Движение, со сколь угодно малой, но не равной нулю, скоростью существенно изменяет процесс деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Бровман М.Я.* Об упругопластическом изгибе балок в процессе движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 155–160.
4. *Шестериков С.А., Мельников Г.П., Аршакуни А.Л.* К выбору уравнений состояния при ползучести // Проблемы прочности. 1980. № 6. С. 77–81.
5. *Бровман М.Я.* Экспериментальное исследование ползучести при высоких температурах // Проблемы прочности. 1979. № 8. С. 77–79.
6. *Бровман М.Я., Царев А.В., Гензелев С.М.* Исследование деформации литой стали при высоких температурах // Изв. РАН. Металлы. № 2. 1998. С. 34–37.

Тверь

Поступила в редакцию
22.07.2002