

© 2004 г. А.Д. АВДЕЕВА, Е.И. СВЕШНИКОВА

КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С УСЛОЖНЕННЫМ УПРУГИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматриваются ударные волны слабой интенсивности в упругой среде с малой анизотропией. В предыдущих работах в таком исследовании использовалось представление упругого потенциала (внутренней энергии) среды разложением в ряд по малым деформациям и малым изменениям энтропии. Разложение велось до первых, главных членов, обнаруживающих нелинейность и анизотропию. В данной работе учтены следующие члены в разложении, что расширяет область применимости результатов на большие амплитуды скачка и позволяет оценить точность принятого ранее приближения. Исследование ведется методом линеаризации усложненной постановки около прежнего решения, принятого за нулевое приближение. Найдена измененная форма ударной адиабаты для квазипоперечных ударных волн и их скорости. Указаны состояния за скачком, удовлетворяющие требованию необувания энтропии и условиям эволюционности.

1. Постановка задачи и вид упругого потенциала. Рассматриваются одномерные движения с плоскими ударными волнами в упругой среде, заданной своей внутренней энергией единицы объема U . Рассмотрение ведется в лагранжевой декартовой системе координат начального состояния x_i , где ось $x = x_3$ направлена по нормали к плоскости фронта, а оси x_1, x_2 лежат в плоскости, параллельной фронту. Деформация характеризуется компонентами градиента вектора перемещения w , из которых в плоских волнах изменяются только $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$). Оси x_1, x_2 выбраны главными осями тензора деформаций, так что $\varepsilon_{12} = 0$, а $\varepsilon_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x_\alpha = \text{const}$ ($\alpha = 1, 2$) определяют предварительную деформацию сжатия-растяжения по осям x_1 и x_2 , которая не меняется при одномерных движениях. Когда $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \neq 0$, предварительная деформация вызывает анизотропию начального состояния среды в плоскости фронта (волновая анизотропия). Именно такая среда, исходно изотропная с волновой анизотропией, вызванной предварительной деформацией $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \neq 0$, и будет далее рассматриваться.

Таким образом, упругий потенциал среды задается функцией $\rho_0 U = \Phi(u_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, S)$, где S – энтропия единицы массы, $\rho_0 = \text{const}$ – плотность однородной среды в начальном состоянии.

Непрерывные одномерные движения в упругой среде описываются системой гиперболических уравнений [1, 2]:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где v – скорость среды. Соответствующие условия на разрыве представлены законами сохранения импульса и энергии

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right] = \rho_0 W^2 [u_i], \quad [v_i] + W [u_i] = 0 \quad (1.2)$$

$$[\Phi] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right] [u_i] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right)^+ [u_i] \quad (i = 1, 2, 3)$$

где W – лагранжева скорость распространения волны $W = dx/dt$. Квадратные скобки обозначают скачок заключенной в них величины $[A] = A^+ - A^-$, A^+ – значение перед разрывом, а A^- – значение за разрывом. По повторяющимся индексам здесь и далее предполагается суммирование. Для замыкания этих систем уравнений надо задать еще конкретный вид функции Φ .

Упругий потенциал Φ изотропной среды при малых деформациях ε_{ij} можно представить разложением по степеням ε_{ij} с использованием инвариантов тензора деформаций. Такое разложение для слабонелинейных сред приведено в [1, 2] до четвертых степеней по ε , $\varepsilon = \max \varepsilon_{ij}$. Теперь продолжим его вплоть до шестых степеней по ε . Так как изменение энтропии $S - S_0$ на ударной волне, согласно прежним вычислениям [1, 2], оказалось четвертого порядка по u_i , то разложение Φ следует дополнить перекрестными членами, содержащими произведение деформаций на изменение энтропии. Эффект от добавления таких (термодинамических) слагаемых оказался шестого порядка по ε и был исследован в [3]. Ниже производится учет влияния прочих членов шестой степени в разложении Φ на свойства ударных волн.

Упругий потенциал изотропной среды примем в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \delta I_1^3 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \zeta I_1^2 I_2 + \eta I_1 I_3 + \xi I_2^2 + \sigma I_1 I_2^2 + \\ & + \tau I_2 I_3 + \chi I_2^3 + \rho_0 T_0 (S - S_0) + (\psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 I_1^2)(S - S_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$$

Члены с множителями σ , τ , χ не учитывались ранее в [2, 3]. Чтобы представить функцию Φ как функцию аргументов u_i , воспользуемся формулами пересчета ε_{ij} через u_i для одномерных движений [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \\ \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}u_1(1 + \varepsilon_1), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}u_2(1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Полученная форма записи функции $\Phi(u_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, S)$ будет содержать часть, обладающую волновой изотропией, зависящую от аргументов вида $u_1^2 + u_2^2$, u_3 , и анизотропные члены, у которых коэффициенты выражаются через $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Это громоздкое выражение в общем виде здесь приводиться не будет.

Известно, что в линейной изотропной среде в каждую из сторон оси x могут распространяться три волны малых возмущений [5] – одна продольная со скоростью $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ и две поперечные с совпадающими скоростями $\sqrt{\mu/\rho_0}$. При появлении малой нелинейности или малой анизотропии (или того и другого сразу) волны становятся квазипродольными и квазипоперечными, приобретая малое изменение “чужой” компоненты (поперечной в продольной волне и продольной в поперечных) и малое различие в скоростях у квазипоперечных волн. Если считать, что в основной компоненте $u_i \sim \varepsilon$, то изменение “чужой” компоненты оказывается $\sim \varepsilon^2$.

Наиболее интересным, нестандартным оказалось поведение квазипоперечных волн, только они и будут далее рассматриваться. В таких волнах $u_\alpha \sim \varepsilon$, $\alpha = 1, 2$, $u_3 \sim \varepsilon^2$. В приближении, учитывающем только самые главные, первые, содержащие нелинейность и анизотропию, члены, функция $\Phi(u_i, S)$ записывается в виде [2]:

$$\Phi^0 = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1}{2}du_3^2 + b(u_1^2 + u_2^2)u_3 + \frac{1}{4}h(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0 (S - S_0)$$

$$f = \mu + \left(\beta + \frac{3}{4}\gamma + \lambda + \mu \right) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad g = \left(\frac{3}{4}\gamma + \mu \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (1.5)$$

$$d = \lambda + 2\mu, \quad h = \beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\lambda + \mu + \xi, \quad b = \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{2}\lambda + \mu$$

Все коэффициенты в этой формуле, кроме g , являются комбинациями упругих констант среды, а потому считаются величинами конечными (порядка 1). Чтобы проявление анизотропии, представленной слагаемым с коэффициентом g , и нелинейности, выраженной слагаемыми $\sim \varepsilon^4$, было одинаковым, следует считать, что $g \sim \varepsilon^2$. Это значит, что $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sim \varepsilon^2$. Для простоты будем далее всюду считать $\varepsilon_\alpha \sim \varepsilon^2$.

Выражение Φ^0 (1.5) принято ниже за нулевое приближение. Для уточненной модели при подстановке (1.4) в функцию Φ (1.3) учитываем следующие степени вплоть до ε^6 . При этом для квазипоперечных волн по-прежнему считаем $u_\alpha \sim \varepsilon$, $u_3 \sim \varepsilon^2$, $\varepsilon_\alpha \sim \varepsilon^2$. Получим

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi^1 = \Phi^0 + \Phi_u^1 + \Phi_s^1 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_u^1 = & \frac{1}{2}f_1 r^2 + \frac{1}{2}g_1 \bar{r}^2 + \frac{1}{4}h_1 r^4 + \frac{1}{4}k_1 r^2 \bar{r}^2 + \frac{1}{4}l_1 r^6 + \\ & + b_1 r^2 u_3 + \frac{1}{2}n_1 r^2 u_3^2 + \frac{1}{2}r_1 r^4 u_3 + \frac{1}{2}p_1 \bar{r}^2 u_3 + \frac{1}{2}d_1 u_3^2 + a_1 u_3^3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Phi_s^1 = \rho_0 T_0 \Psi r^2 (S - S_0)$$

$$r^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad \bar{r}^2 = u_1^2 - u_2^2$$

$$\begin{aligned} f_1 = & \left(\frac{7}{4}\beta + \frac{15}{16}\gamma + 3\delta + \zeta + \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\mu + \xi \right) + \\ & + \left(\frac{3}{4}\beta + \frac{15}{16}\gamma + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\mu + \xi \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \quad (\sim \varepsilon^4) \end{aligned}$$

$$g_1 = \left(\beta + \frac{15}{8}\gamma + \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{2}\mu \right) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (\sim \varepsilon^4)$$

$$h_1 = \left(\sigma + \frac{3}{4}\tau + 2\beta + \frac{3}{2}\gamma + 3\delta + 2\zeta + \frac{9}{4}\eta + 2\xi \right) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (\sim \varepsilon^2)$$

$$k_1 = \left(\frac{3}{4}\tau + \beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{4}\eta + 2\xi \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (\sim \varepsilon^2)$$

$$l_1 = \left(\frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\zeta + \frac{3}{4}\eta + \xi \right) \quad (\sim 1) \quad (1.8)$$

$$n_1 = \left(\frac{7}{2}\beta + \frac{15}{4}\gamma + 3\delta + \zeta + \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\lambda + \mu + \xi \right) \quad (\sim 1)$$

$$r_1 = \left(\frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{4}\tau + \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2}\delta + \zeta + \frac{3}{2}\eta + 2\xi \right) \quad (\sim 1)$$

$$p_1 = \left(\beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{4}\eta \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (\sim 1)$$

$$d_1 = (2\beta + 6\delta + \lambda)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (\sim 1)$$

$$a_1 = \left(\beta + \gamma + \delta + \frac{1}{2}\lambda + \mu \right) \quad (\sim 1)$$

Очевидно слагаемые в (1.7) с коэффициентами g_1 , k_1 и p_1 несут в себе анизотропию, остальные – более высокую степень нелинейности.

2. Уточненный вид ударной адиабаты. Используя в уравнениях (1.1) и (1.2) в качестве упругого потенциала функцию $\Phi = \Phi^0$, получим постановку задачи, решение которой принимаем за нулевое приближение дальнейшего исследования. В частности в этом приближении для квазипоперечных ударных волн имеет место равенство [2]:

$$[u_3] = -\frac{b}{d-f}[u_1^2 + u_2^2] \quad (2.1)$$

Оно позволяет исключить u_3 из первых двух соотношений (1.2) и рассматривать Φ^0 как функцию u_1 и u_2 . При этом система уравнений (1.2) для новой функции $\Phi^0(u_1, u_2, S)$ остается прежней, только $i = 1, 2$.

В том же приближении из последнего уравнения системы (1.2) получено выражение для изменения энтропии в квазипоперечных ударных волнах при начальном состоянии $u_i^- = U_i$:

$$[S]^0 = -\frac{\kappa}{4\rho_0 T_0} ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2)(r^2 - R^2) \quad (2.2)$$

$$\kappa = 2b^2/(d-f) - h, \quad R^2 = U_1^2 + U_2^2$$

Для уточненного упругого потенциала $\Phi = \Phi^0 + \Phi^1$, где $\Phi^1 \ll \Phi^0$, условия на разрыве (1.2) можно представить в виде

$$\left[\frac{\partial \Phi^0}{\partial u_i} \right] - \rho_0 W^2 [u_i] = - \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_i} \right] \quad (2.3)$$

Из последнего уравнения, используя конкретный вид функции Φ^0 и соотношение (2.1), получим возможность, аналогично (2.1), выразить $[u_3]$ через u_1 и u_2 :

$$[u_3] + \frac{b}{d-f}[u_1^2 + u_2^2] = -\frac{b}{(d-f)^2}(\rho_0 W_0^2 - f)[u_1^2 + u_2^2] - \frac{1}{d-f} \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_3} \right] \equiv q_3 \quad (2.4)$$

Это позволит исключить u_3 из остальных соотношений на разрыве (2.3):

$$(f + h(U_1^2 + U_2^2) + 2bU_3)[u_1] + g[u_1] - \kappa[u_1^2 + u_2^2]u_1 - \rho_0 W^2 [u_1] = -2bu_1 q_3 - \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_1} \right] \equiv q_1 \quad (2.5)$$

$$(f + h(U_1^2 + U_2^2) + 2bU_3)[u_2] - g[u_2] - \kappa[u_1^2 + u_2^2]u_2 - \rho_0 W^2 [u_2] = -2bu_2 q_3 - \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_2} \right] \equiv q_2$$

Левые части равенств соответствуют нулевому приближению. Правые части малы и вместо $[u_3]$ и $[S]$ в них должны быть подставлены выражения (2.1) и (2.2) из нулевого

приближения. При этом q_1 и q_2 становятся функциями только сдвиговых компонент деформаций u_1, u_2 и начального состояния U_1, U_2, U_3, S_0 .

Таким образом, в уточненном подходе, так же как было в нулевом приближении соотношения на разрыве (1.2) содержат функции только двух компонент деформаций u_1 и u_2 .

Исключение W из первой группы соотношений на разрыве (1.2) определяет для каждого состояния перед скачком $u_i^- = U_i$ множество $F(u_i, S) = 0$ возможных состояний $u_i^+ = u_i$ за разрывом с выполнением законов сохранения. Такое множество называют ударной адиабатой. Исключение W из уравнений (2.5) дает проекцию ударной адиабаты на плоскость деформаций сдвига (u_1, u_2) , а третья координата u_3 ударной адиабаты находится соответственно из формулы (2.1) для нулевого и формул (2.4) для следующего приближения. На фиг. 1 ударная адиабата нулевого приближения изображена сплошной тонкой линией, а уточненная ударная адиабата сплошной жирной линией.

Ударная адиабата на плоскости (u_1, u_2) для нулевого приближения получена и исследована в [2, 4]. Ее уравнение

$$F_0(u_1, u_2) \equiv 2g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) + \kappa(r^2 - R^2)(u_1 U_2 - u_2 U_1) = 0 \quad (2.6)$$

Исключение W из уточненных соотношений на разрыве (2.5) дает для проекции ударной адиабаты на плоскость (u_1, u_2) уравнение

$$F_0(u_1, u_2) \equiv 2bq_3(u_1 U_2 - u_2 U_1) - [u_2] \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_1} \right] + [u_1] \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_2} \right] \equiv P(u_1, u_2) \quad (2.7)$$

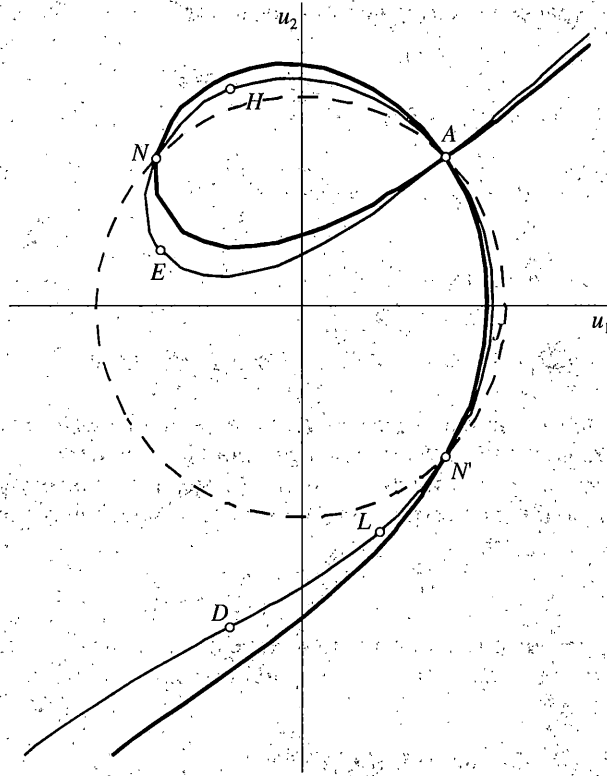
Используя конкретный вид функции $\Phi^1 = \Phi_u^1 + \Phi_s^1$ (1.7), получаем

$$\begin{aligned} P = & -2 \left(\frac{b}{d-f} \right)^2 (\rho_0 W_0^2 - f)(r^2 - R^2)(u_1 U_2 - u_2 U_1) - (2g_1 + k_1 R^2 + 2p_1 U_3)(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) + \\ & + (h_2 + 2l_2 R^2 + 2r_2 U_3)(r^2 - R^2)(u_1 U_2 - u_2 U_1) + \left(l_2 - r_2 \frac{b}{d-f} \right) (r^2 - R^2)^2 (u_1 U_2 - u_2 U_1) + \\ & + \left(2p_1 \frac{b}{d-f} - k_1 \right) (u_1 - U_1)(u_2 - U_2)(u_1(u_1 + U_1) + u_2(u_2 + U_2)) - \\ & - \frac{1}{2} \kappa \Psi ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2)(r^2 - R^2)(u_1 U_1 - u_2 U_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$h_2 = h_1 - 4b_1 \frac{b}{d-f} + 2d_1 \left(\frac{b}{d-f} \right)^2$$

$$l_2 = \frac{3}{2} l_1 - r_1 \frac{b}{d-f}, \quad r_2 = r_1 - n_1 \frac{b}{d-f} + 6a_1 \left(\frac{b}{d-f} \right)^2$$

Обе ударные адиабаты нулевого $F_0 = 0$ и следующего приближения $F_0 - P = 0$, изображенные на фиг. 1 на плоскости (u_1, u_2) , проходят через начальную точку $A(U_1, U_2)$ и две симметричные с ней относительно осей координат. Взаимное расположение этих кривых зависит от большого количества констант. Поэтому в целях сокращения произвольных параметров далее будем рассматривать несжимаемые среды, для которых в одномерных задачах условие несжимаемости имеет вид $u_3 = U_3 = \text{const} = 0$. Заметим, что при этом в нулевом приближении коэффициент $\kappa = -h$.



Фиг. 1

3. Ударная адиабата в несжимаемой упругой среде. Для одномерных движений несжимаемой среды упругий потенциал примет вид

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi_u^1 + \Phi_s^1 = \frac{1}{2}(f + f_1)r^2 + \frac{1}{2}(g + g_1)\bar{r}^2 + \frac{1}{4}(h + h_1)r^4 + \frac{1}{4}k_1r^2\bar{r}^2 + \frac{1}{4}l_1r^6 + \rho_0T_0(S - S_0) + \rho_0T_0\Psi r^2(S - S_0) \quad (3.1)$$

Ударная адиабата (2.7) при начальном состоянии перед разрывом U_1, U_2 представляется уравнением

$$\begin{aligned} F_0(u_1, u_2) &\equiv 2g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) - h(r^2 - R^2)(u_1U_2 - u_2U_1) = \\ &= P \equiv -2g_1(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) + h_1(r^2 - R^2)(u_1U_2 - u_2U_1) - \\ &- k_1(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) \left(\left(u_1 + \frac{1}{2}U_1\right)^2 + \left(u_2 + \frac{1}{2}U_2\right)^2 + \frac{3}{4}R^2 \right) + \\ &+ \frac{3}{2}l_1(r^2 + R^2)(r^2 - R^2)(u_1U_2 - u_2U_1) + \\ &+ \frac{h\Psi}{2} \left((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2 \right) (r^2 - R^2)(u_1U_2 - u_2U_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Правая часть этого уравнения содержит пять слагаемых:

$$P_1 \equiv P_g = -2g_1(u_1 - U_1)(u_2 - U_2)$$

$$P_2 \equiv P_h = h_1(u_1 U_2 - u_2 U_1)(r^2 - R^2)$$

$$P_3 \equiv P_k = -k_1(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) \left(\left(u_1 + \frac{1}{2} U_1 \right)^2 + \left(u_2 + \frac{1}{2} U_2 \right)^2 + \frac{3}{4} R^2 \right)$$

$$P_4 \equiv P_l = \frac{3}{2} l_1 (u_1 U_2 - u_2 U_1) (r^2 - R^2) (r^2 + R^2)$$

$$P_5 \equiv P_s = \frac{h\psi}{2} ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2) (r^2 - R^2) (u_1 U_2 - u_2 U_1)$$

Из-за линейности постановки задачи о добавках влияние каждого слагаемого правой части на вид ударной адиабаты можно исследовать отдельно.

Ударная адиабата (3.2) представляет собой одномерное множество, и для дальнейшего исследования удобно перейти к полярной системе координат с центром в начальной точке $A(U_1, U_2)$:

$$u_1 = U_1 + r \cos \theta, \quad u_2 = U_2 + r \sin \theta \quad (3.3)$$

Угол θ – угол между радиус-вектором и положительным направлением оси u_1 .

Уравнение ударной адиабаты нулевого приближения $F_0 = 0$ в полярных координатах имеет вид

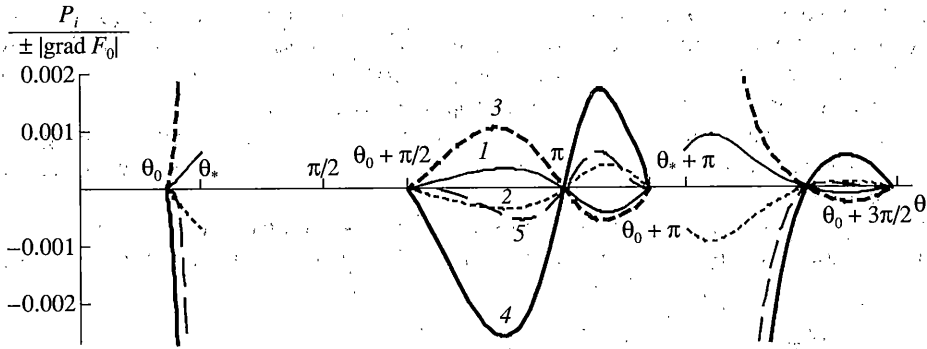
$$r = \frac{-g \sin 2\theta - h(U_1^2 - U_2^2) \sin 2\theta + 2hU_1 U_2 \cos 2\theta}{h(U_1 \sin \theta - U_2 \cos \theta)} \quad (3.4)$$

В [3] в выражении для упругого потенциала Φ^1 были учтены только члены с произведениями деформаций на изменение энтропии, т.е. $\Phi = \Phi^0 + \Phi_s^1$, $\Phi_s^1 = \rho_0 T_0 \psi (u_1^2 + u_2^2) (S - S_0)$, и было выяснено взаимное расположение ударных адиабат $F_0 = 0$ и $F_0 - P_s = 0$.

Теперь рассмотрим последовательно влияние остальных слагаемых в P , начиная с P_1 , т.е. считая, что в P коэффициенты $k_1 = l_1 = h_1 = \psi = 0$. Для каждой точки вдоль линии (3.4) найдем отклонение по нормали, т.е. по $\text{grad} F_0$, линии, изображающей уточненную ударную адиабату. Построим график этого отклонения как функцию угла θ . На фиг. 2 построены графики функций $(P_i / (\pm |\text{grad} F_0|))(\theta)$. Вместо r при этом следует подставлять его выражение через угол θ для ударной адиабаты нулевого приближения (3.4).

Построение выполнялось численно. Для этого всю область изменения θ разобьем на участки, исключив участки, где луч не пересекает ударную адиабату. При расчетах принималось $\epsilon \sim 0.1$, а величины коэффициентов брались в соответствии с их оценками (1.8). На фиг. 2 сплошной тонкой линией с номером 1 изображена величина отклонения уточненной ударной адиабаты от кривой нулевого приближения для начального состояния $U_1 = 0.1$, $U_2 = 0.1$ при $g = 0.01$, $h = 1$, $g_1 = 0.0001$, $k_1 = l_1 = h_1 = \psi = 0$. На плоскости (u_1, u_2) на фиг. 1 новая ударная адиабата схематически, без соблюдения масштаба величины отклонения, изображена жирной сплошной линией. С какой стороны от ударной адиабаты нулевого приближения лежит уточненная ударная адиабата зависит от знака g_1 .

Рассмотрение влияния остальных слагаемых P_h , P_k , P_l и P_s на вид ударной адиабаты, проводится аналогично, принимая (согласно оценкам (1.8)) соответственно $h_1 = 0.01$



Фиг. 2

для $P = P_2 \equiv P_h$ (кривая 2 на фиг. 2), $k_1 = 0.01$ для $P = P_3 \equiv P_k$ (кривая 3 на фиг. 2), $l_1 = 1$ для $P = P_4 \equiv P_l$ (кривая 4 на фиг. 2) и $\psi = 1$ для $P = P_5 \equiv P_s$ (кривая 5 на фиг. 2).

Из фиг. 2 видно, что влияние всех слагаемых P_i на изменение ударной адиабаты нулевого приближения одинаково по порядку величины и, следовательно, в разложении Φ^1 необходимо учитывать все члены.

4. Изменение энтропии, скорость и условие эволюционности ударных волн. Реально осуществляющимся разрывам могут отвечать только те состояния на ударной адиабате, для которых выполняется условие неубывания энтропии. Изменение энтропии при переходе скачком из начального состояния (U_1, U_2) в любое состояние (u_1, u_2) вычисляется из последнего уравнения (1.2). В нулевом приближении при $\Phi = \Phi^0$ для него было получено выражение (2.2), в котором для несжимаемой среды $\kappa = -h$. Из него видно, что $S = S_0$ на энтропийной окружности $u_1^2 + u_2^2 = R^2$, проходящей на плоскости (u_1, u_2) через начальную точку (U_1, U_2) (штриховая линия на фиг. 1). В средах с $h < 0$ росту энтропии в скачке отвечают точки ударной адиабаты, оказавшиеся внутри этой окружности, а в средах с $h > 0$ – вне ее. Энтропийная окружность пересекает ударную адиабату в трех точках: $A(U_1, U_2)$, $N(-U_1, U_2)$ и $N'(U_1, -U_2)$.

Изменение энтропии для среды с упругим потенциалом (3.1) находится из того же уравнения (1.2) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 [S] = [S]^0 + \frac{1}{4\rho_0 T_0} (r^2 - R^2) \{ & h_1 ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2) + \\
 + 2l_1 (r^4 + r^2 R^2 + R^4) - 3l_1 (u_1 U_1 + u_2 U_2) (r^2 + R^2) + & \\
 + \psi \rho_0 (u_1 U_1 + u_2 U_2) ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2) \} + & \\
 + \frac{1}{4\rho_0 T_0} k_1 ((u_1 - U_1)^3 (u_1 + U_1) - (u_2 - U_2)^3 (u_2 + U_2)) &
 \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что точки пересечения кривой $[S] = 0$ с ударной адиабатой не изменяются. Это начальная точка $A(U_1, U_2)$ и точки $N(-U_1, U_2)$ и $N'(U_1, -U_2)$. Это означает, что области неубывания энтропии остаются прежними. В средах с $h < 0$ росту энтропии в скачке отвечают точки ударной адиабаты, оказавшиеся внутри кривой $[S] = 0$, а в средах с $h > 0$ – вне ее. При этом кривую $[S] = 0$ можно заменить окружностью $u_1^2 + u_2^2 = R^2$.

Кроме необывания энтропии, для существования ударной волны должны быть удовлетворены еще условия ее эволюционности. Это необходимые условия устойчивости фронта по отношению к малым одномерным возмущениям. Согласно этим условиям, число уходящих от разрыва в обе стороны характеристик должно быть на единицу меньше числа граничных условий на разрыве. Предполагается, что на разрыве не выставляется никаких других граничных условий, кроме тех, которые даются законами сохранения.

Для упругих волн, распространяющихся в положительную сторону оси x , условия эволюционности состоят из двух систем неравенств, соответствующих двум типам волн,

$$\begin{aligned} (a) \quad c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad 0 \leq W \leq c_1^+ \\ (b) \quad c_2^- \leq W \leq \infty, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+ \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь c_α^+ , c_α^- ($\alpha = 1, 2$) характеристические скорости системы уравнений (1.1) по состоянию непосредственно за и перед скачком соответственно, пронумерованные так, что $0 \leq c_1 \leq c_2$. Системы неравенств (a) и (b) делят ударные волны на медленные (a) и быстрые (b).

Одновременное выполнение условий $[S] \geq 0$ и (4.1) выделяет на ударной адиабате отрезки, пригодные для использования при построении решений (эволюционные отрезки). Границами этих отрезков служат точки, в которых скорость скачка совпадает с одной из характеристических скоростей по состоянию впереди или сзади разрыва. Будем называть их точками Жуге.

Характеристические скорости для системы уравнений (1.1) находятся по формулам [1]:

$$\rho_0 c_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Phi_{11} - \Phi_{22})^2 + 4\Phi_{12}^2}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Для нулевого приближения [2] характеристические скорости имеют вид

$$\rho_0 (c_{1,2}^+)^2 = f + h \left(2(u_1^2 + u_2^2) \pm \sqrt{4u_1^2 u_2^2 + \left((u_1^2 - u_2^2) + \frac{g}{h} \right)^2} \right) \tag{4.2}$$

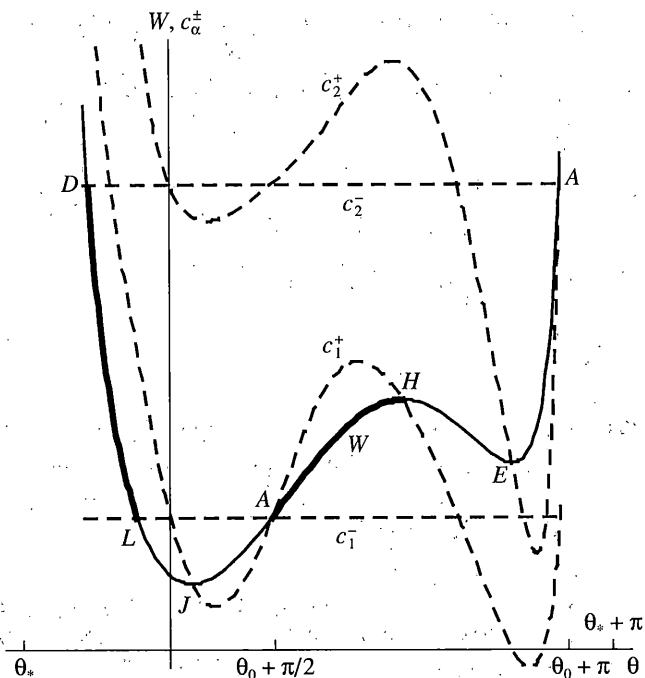
$$\rho_0 (c_{1,2}^-)^2 = f + h \left(2(U_1^2 + U_2^2) \pm \sqrt{4U_1^2 U_2^2 + \left((U_1^2 - U_2^2) + \frac{g}{h} \right)^2} \right)$$

Скорость скачка находится из условий на разрыве (2.5) при $q_i = 0$:

$$\rho_0 (W^0)^2 = f + hR^2 + h(u_1^2 + u_2^2 - R^2) \frac{u_1(u_2 - U_2) + u_2(u_1 - U_1)}{2(u_1 - U_1)(u_2 - U_2)} \tag{4.3}$$

Переходя к полярной системе координат r, θ с центром в начальной точке (3.3) в выражениях для c_α и W и заменяя в них r радиус-вектором точек ударной адиабаты нулевого приближения (3.4), получим характеристические скорости и скорость разрыва как функции угла θ вдоль ударной адиабаты.

На фиг. 3 сплошной линией изображен график функции $W^0(\theta)$, штриховыми линиями представлены графики $c_\alpha^-(\theta)$ (горизонтальные прямые) и $c_\alpha^+(\theta)$, полученные численно для нулевого приближения при $U_1 = 0.1, U_2 = 0.1, f = 1, g = 0.01$ и $h = 1$. В пересече-



Фиг. 3

нии получены точки Жуге D и L по состоянию перед скачком и точки J, H, E по состоянию за разрывом. Теми же буквами они отмечены на фиг. 1. Далее будем считать $h > 0$, следовательно, рассмотрим точки Жуге, лежащие вне кривой $[S] = 0$, а именно точки D, L и H (фиг. 1, 3). Эволюционными будут скачки в состоянии, лежащие на отрезках LD и AH . На фиг. 3 они выделены жирной линией.

Аналогично находим характеристические скорости c_α^\pm и W для уточненной модели

$$\begin{aligned} \rho_0 W^2 &= \rho_0 (W^0)^2 + f_1 + h_1 R^2 + \frac{3}{2} l_1 R^4 + \frac{(u_1(u_2 - U_2) + u_2(u_1 - U_1))}{2(u_1 - U_1)(u_2 - U_2)} \times \\ &\times \left(h_1 + \frac{3}{2} l_1 (r^2 + R^2) \right) (r^2 - R^2) + \frac{1}{2} k_1 \left(\left(u_1 + \frac{1}{2} U_1 \right)^2 - \left(u_2 + \frac{1}{2} U_2 \right)^2 + \frac{3}{4} \bar{R}^2 \right) \\ \bar{R}^2 &= U_1^2 - U_2^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теперь выясним, как влияет каждый из членов, уточняющих вид упругого потенциала (1.7), на положение концов эволюционных отрезков – точек Жуге. Начнем с оценки влияния члена с коэффициентом k_1 , т.е. примем $\Phi = \Phi^0 + f_1(u_1^2 + u_2^2)/2 + k_1(u_1^2 + u_2^2)(u_1^2 - u_2^2)/4$. Для сред с другими уточняющими членами, все выкладки проводятся аналогично, поэтому для них будет показан только результат.

Для такой среды уравнение ударной адиабаты имеет вид

$$\begin{aligned} 2g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) - h(r^2 - R^2)(u_1 U_2 - u_2 U_1) + \\ + k_1(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) \left(\left(u_1 + \frac{1}{2} U_1 \right)^2 + \left(u_2 + \frac{1}{2} U_2 \right)^2 + \frac{3}{4} R^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

А выражения для характеристических скоростей и скорости разрыва станут

$$\rho_0(c_{1,2}^+)^2 = f + f_1 + h \left(2r^2 + Kr^2 \pm \sqrt{4u_1^2 u_2^2 + (\bar{r}^2 + G + Kr^2)^2} \right)$$

$$\rho_0(c_{1,2}^-)^2 = f + f_1 + h \left(2R^2 + K\bar{R}^2 \pm \sqrt{4U_1^2 U_2^2 + (\bar{R}^2 + G + KR^2)^2} \right) \quad (4.6)$$

$$\rho_0 W_k^2 = \rho_0 (W^0)^2 + f_1 + \frac{1}{2} k_1 \left(\left(u_1 + \frac{1}{2} U_1 \right)^2 - \left(u_2 + \frac{1}{2} U_2 \right)^2 + \frac{3}{4} \bar{R}^2 \right)$$

$$G = g/h, \quad K = 3k_1/2h$$

Поставим в соответствие точке (u_1^0, u_2^0) на ударной адиабате нулевого приближения точку на уточненной ударной адиабате с координатами

$$u_1 = u_1^0 + \frac{\partial F_0}{\partial u_1} \frac{P_k}{|\text{grad} F_0|}, \quad u_2 = u_2^0 + \frac{\partial F_0}{\partial u_2} \frac{P_k}{|\text{grad} F_0|}$$

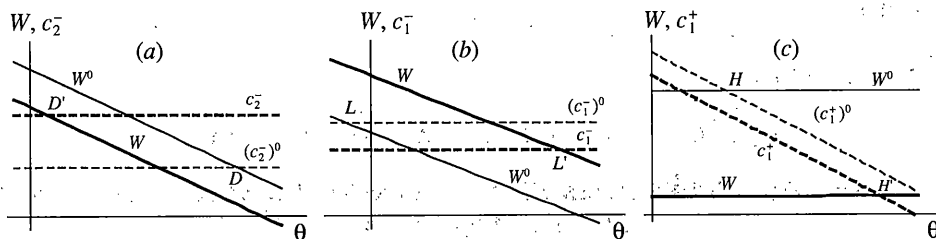
Смещение точки Жуге уточненной ударной адиабаты будем определять по тому, куда сместилась точка ударной адиабаты нулевого приближения, которой она соответствует, относительно точки Жуге нулевого приближения.

Для этого перейдем к полярной системе координат r, θ с центром в начальной точке $A(U_1, U_2)$. Во всех соотношениях нулевого приближения произведем замену $u_1 = U_1 + r \cos \theta$, $u_2 = U_2 + r \sin \theta$ и вместо r подставим выражение (3.4). Таким образом, получим характеристические скорости и скорость разрыва как функции угла θ вдоль ударной адиабаты нулевого приближения. Чтобы видеть, как сместились точки Жуге за счет уточнения вида Φ надо представить скорости нулевого приближения и уточненные скорости на одной координатной плоскости. Однако численное построение этих кривых для начального состояния $U_1 = 0.1, U_2 = 0.1$ при $f = 1, g = 0.01, h = 1, f_1 = 0.0001, k_1 = 0.01$ дало бы очень небольшое смещение графиков на фиг. 3 (их плохо видно на полной картине скоростей). Поэтому нарисуем участки графиков, приведенных на фиг. 3, и их уточненных положений в окрестности интересующих точек Жуге D, L, H в увеличенном масштабе. Как видно из фиг. 3 в нулевом приближении $W^0(D) = (c_2^-)^0, W^0(L) = (c_1^-)^0, W^0(H) = (c_1^+)^0$ в уточненной модели получим новые точки D', L', H' , в которых $W(D') = c_2^-, W(L') = c_1^-, W(H') = c_1^+$ из формул (4.6). Скорость разрыва нулевого приближения на фиг. 4 изображена сплошной тонкой линией, а уточненная – сплошной жирной линией. Штриховыми линиями той же толщины представлены графики характеристических скоростей c_2^- для точки D (фиг. 4, а), c_1^- для точки L (фиг. 4, б) и c_1^+ для H (фиг. 4, в). Из фигуры видно, что точки Жуге D и H удалились от начальной точки $A(U_1, U_2)$, а точка L сместилась в ее сторону.

Аналогичные графики построены для оценки влияния членов с коэффициентами g_1, h_1, l_1 и показано, что

при $g_1 = 0.0001$ точки Жуге D и H удалились от начальной точки $A(U_1, U_2)$, а точка L сместилась в ее сторону;

при $h_1 = 0.01$ точки Жуге D и H сместились в сторону начальной точки $A(U_1, U_2)$, а точка L удалилась от нее;



Фиг. 4

при $l_1 = 1$ Жуге D и H сместились в сторону начальной точки $A(U_1, U_2)$, а точка L удалилась от неё.

Для сред с другими упругими константами смещение точек Жуге определяется аналогично.

Таким образом получено в явном виде выражение для упругого потенциала среды в более точном приближении, чем это делалось ранее и даны формулы для вычисления всех уточняющих параметров решения. Оказалось, что влияния всех добавленных членов имеют один порядок. В то же время оправдано использование модели нулевого приближения.

Авторы благодарят А.Г. Куликовского за обсуждения и помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00729, 02-01-00613) и программы поддержки ведущих научных школ (НШ – 1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bland D.R. Nonlinear Dynamic Elasticity. Toronto; London: Waltham, 1969.
2. Куликовский А.Г., Свеишников Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. Куликовский А.Г., Свеишников Е.И. Влияние изменения энтропии на форму ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 88–98.
4. Куликовский А.Г., Свеишников Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.07.2003