

УДК 539.3

© 2004 г. И.Н. БОЯРШИНОВА, В.Ю. СТОЛБОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ОБРАБОТКЕ

Представлены постановка и методика решения задачи оптимизации процесса создания остаточных напряжений, обеспечивающих оптимальные прочностные свойства конструкции при эксплуатации. В качестве примера предлагается аналитическое решение задачи определения оптимальных параметров дробеструйной обработки поверхности детали.

Выбор параметров процесса обработки изделия для получения оптимального с точки зрения эксплуатации распределения остаточных напряжений приводит к необходимости решения двух связанных между собой задач оптимизации: задачи оптимального проектирования конструкции и задачи оптимизации процесса ее обработки. Во второй задаче требуется найти параметры обработки, обеспечивающие создание заданного распределения остаточных напряжений. Для решения такой задачи необходимо знать, какие остаточные напряжения наиболее благоприятны для улучшения эксплуатационных характеристик изделия (например, повышения прочности), так как во время работы конструкции остаточные напряжения будут суммироваться с напряжениями от внешних нагрузок. Эта задача также является задачей оптимизации.

Общая совместная постановка задач оптимального проектирования конструкций и оптимального управления процессом ее изготовления, а также методики решения таких задач, названных задачами биооптимизации, для ряда процессов термомеханической обработки изложены ранее [1, 2].

В предлагаемой работе рассматриваются математическая постановка и аналитическое решение задачи оптимизации процесса поверхностной обработки детали с целью достижения оптимальной прочности в условиях эксплуатации.

1. Постановка задачи биооптимизации. Пусть в процессе обработки на отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматриваемое тело занимает область V_1^t пространства R^3 с границей ∂V_1^t . Затем, при эксплуатации, на отрезке времени $[t_1, t_2]$ – область V_2^t с границей ∂V_2^t . При этом $\bar{V}_2^t = \bar{V}_1^t$ ($\bar{V}^t = V^t \cup \partial V^t$).

Вектор-функция состояния тела в процессе обработки и последующей эксплуатации может включать в себя поля напряжений, деформаций, перемещений, зависящие в общем случае от времени и координат. Из физических соображений положим, что функции состояния являются кусочно-гладкими

$$u_1(\cdot, \cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \bar{V}_1^t), \quad u_2(\cdot, \cdot) \in KC^1([t_1, t_2], \bar{V}_2^t)$$

Пусть h_1 и h_2 – вектор-функции параметров оптимизации в задачах обработки и эксплуатации, соответственно.

Для задачи обработки параметрами оптимизации будут служить технологические параметры процесса, независящие от времени и представляющие собой величины, характеризующиеся действительными числами. В общем виде определим вектор параметров оптимизации \mathbf{h}_1 как $\mathbf{h}_1 = (h_{11}, \dots, h_{1m}) \in R^m$, где m – число технологических параметров процесса обработки.

Параметром оптимизации, определяющим свойства детали, в задаче эксплуатации выберем функцию остаточных напряжений ρ , имеющую те же свойства, что и функция состояния. Тогда

$$\mathbf{h}_2(\cdot, \cdot) \in KC^1([t_1, t_2], \bar{V}_2^t)$$

Пусть L_1 и L_2 – дифференциальные операторы, описывающие поведение тела при обработке и эксплуатации соответственно. Тогда можно записать уравнения, связывающие между собой функции состояния и параметры оптимизации,

$$L_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{h}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{P}_1) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \mathbf{r} \in \bar{V}_1^t \quad (1.1)$$

$$L_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1(t_1, \cdot), \mathbf{P}_2) = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \mathbf{r} \in \bar{V}_2^t \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 – вектор-функции, определяющие внешние нагрузки соответственно при обработке и эксплуатации. Система дифференциальных уравнений (1.1) определяет остаточные напряжения в процессе обработки изделия, система (1.2) описывает упругое поведение конструкции в процессе эксплуатации.

В качестве критериев оптимизации определим функционалы

$$J_1(\mathbf{h}_1) = J_1(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}_1(\mathbf{h}_1), f_1(\mathbf{h}_2)), \quad J_2(\mathbf{h}_2) = J_2(\mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2(\mathbf{h}_2), f_2(\mathbf{h}_1))$$

Функции $f_1(\mathbf{h}_2)$ и $f_2(\mathbf{h}_1)$ определяют связанность двух задач оптимизации.

Цель обработки – получение заданного распределения остаточных напряжений. Поэтому в качестве критерия оптимизации процесса обработки выберем интегральную величину квадрата отклонения интенсивности остаточных напряжений ρ_i от требуемого значения ρ_i^*

$$J_1(\mathbf{h}_1) = \int_{V_1} (\rho_i(\mathbf{r}, \mathbf{h}_1) - \rho_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{h}_2))^2 dV \quad (1.3)$$

Отметим, что “заданное” значение ρ_i^* на самом деле неизвестно и определяется из решения задачи биооптимизации.

В задаче эксплуатации цель оптимизации – повышение прочности изделия. Критерием обеспечения максимальной прочности может служить условие равнопрочности конструкции [3]. Выберем условие равнопрочности в качестве критерия оптимизации во второй задаче

$$J_2(\mathbf{h}_2) = \int_{V_2} (\sigma_i^\Sigma(\rho(\mathbf{h}_2), \mathbf{r}) - \sigma^0)^2 dV \quad (1.4)$$

Здесь σ^0 – уровень напряжений, желательный для данной конструкции, σ_i^Σ – интенсивность напряжений в детали. В условиях упругого поведения конструкции напряжения от внешних нагрузок σ^e суммируются с остаточными напряжениями:

$$\sigma^\Sigma = \sigma^e + \rho \quad (1.5)$$

В задаче оптимизации процесса обработки на параметры оптимизации будут накладываться ограничения, определяемые технологией процесса. Компоненты вектора параметров оптимизации h_{1i} ($i = 1, 2, \dots, m$) могут принимать значения в пределах от h_{1i}^{\min} до h_{1i}^{\max} , т.е.

$$h_{1i}^{\min} \leq h_{1i} \leq h_{1i}^{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.6)$$

В задаче эксплуатации ограничения типа неравенств будут накладываться на прочность конструкции. В частности, интенсивность суммарных напряжений не должна превышать некоторой заданной величины, определяемой пределом текучести σ_s и требуемым запасом прочности n_2 :

$$\max_{r \in \bar{V}_2} (\sigma_i^{\Sigma}(r) - \sigma_s/n_2) \leq 0 \quad (1.7)$$

С учетом вышеизложенного задачу биооптимизации процесса создания остаточных напряжений, обеспечивающих максимальную прочность конструкции в условиях эксплуатации, можно сформулировать следующим образом: найти параметры оптимизации $\bar{\mathbf{h}}_1$ и $\bar{\mathbf{h}}_2$, доставляющие минимум функционалам J_1 и J_2 , имеющим вид (1.3) и (1.4), т.е.

$$J_1(\bar{\mathbf{h}}_1) = \inf J_1(\mathbf{h}_1), \quad J_2(\bar{\mathbf{h}}_2) = \inf J_2(\mathbf{h}_2) \quad (1.8)$$

При этом должны выполняться ограничения типа равенств (1.1) и (1.2), а также ограничения типа неравенств (1.6) и (1.7).

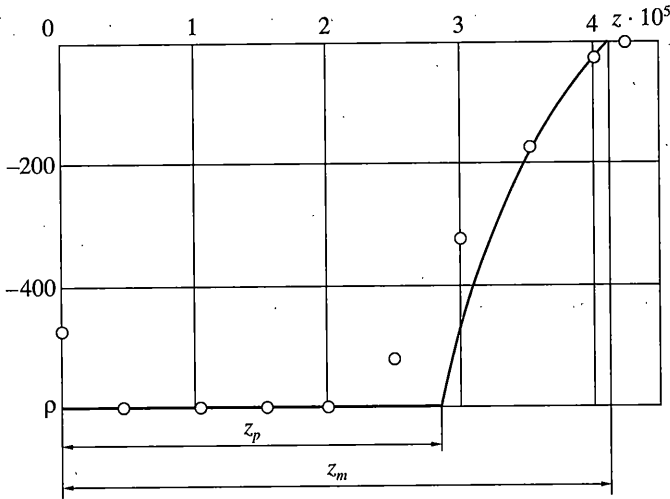
Следует отметить, что рассматриваемая задача может быть сформулирована не в форме двух связанных задач, а как единая оптимизационная задача. Например, пусть параметрами оптимизации служат параметры процесса обработки \mathbf{h}_1 . В качестве критерия оптимизации выберем функционал вида (1.4). Ограничениями типа равенств будут дифференциальные уравнения (1.2), описывающие упругое поведение конструкции при эксплуатации. При этом функция \mathbf{u}_1 должна определяться из уравнений (1.1), описывающих остаточные напряжения. Ограничениями типа неравенств служат ограничения на параметры оптимизации (1.6) и на прочность конструкции (1.7).

Главное отличие такой постановки задачи от описанной выше (1.1)–(1.8) состоит в том, что она приводит к задаче минимизации функционала с пределами интегрирования, зависящими от параметров оптимизации. Выразить указанную зависимость в явном виде при аналитическом решении задачи практически невозможно. Решение такой задачи сопряжено со значительно большими трудностями, чем решение задачи биооптимизации.

Разделение задачи оптимизации процесса на две связанные задачи существенно облегчает решение, заменяя сложную задачу двумя более простыми.

2. Методика решения задачи биооптимизации процесса дробеструйной обработки. В качестве примера рассмотрим решение поставленной задачи для процесса дробеструйной обработки поверхности. Аналитическое решение прямой задачи определения остаточных напряжений в поверхностном слое толстой пластины описано ранее [4, 5].

Функцию распределения остаточных напряжений по глубине упроченного слоя $\rho(z)$, полученную в результате решения прямой задачи, примем в качестве функции состояния в задаче обработки (1.1), (1.3), (1.6), (1.8). Здесь предполагается, что релаксации остаточных напряжений в процессе эксплуатации не происходит и функция $\rho(z)$ не зависит от времени. Вектор \mathbf{h}_1 можно определить как $\mathbf{h}_1 = (r, v)$, где r и v – параметры процесса обработки (радиус и скорость падения дроби).



Фиг. 1

Выбор параметров оптимизации определяет и накладываемые на них ограничения типа неравенств (1.6), которые запишутся в виде

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad v_1 \leq v \leq v_2 \quad (2.1)$$

Ограничения типа равенств (1.1) выполняются тождественно, поскольку функция $\rho(z)$ – точное аналитическое решение соответствующей краевой задачи.

Для задачи эксплуатации (1.2), (1.4), (1.7), (1.8) в качестве функции состояния тела выберем зависимость интенсивности напряжений, возникающих в детали в процессе ее эксплуатации, от глубины z . Если во время эксплуатации реализуется упругое нагружение, то суммарные напряжения складываются из напряжений от внешних нагрузок и остаточных напряжений, сформированных в процессе обработки детали. При этом выполняется условие

$$\max_{z \in \bar{V}_2} (\sigma_i^\Sigma(z) - \sigma_s/n_2) \leq 0 \quad (2.2)$$

Будем считать, что напряжения σ^e , возникающие в теле под действием эксплуатационных нагрузок, найдены из решения соответствующей краевой задачи и поэтому обеспечивают выполнение ограничений типа равенств (1.2).

Параметром оптимизации в задаче эксплуатации являются остаточные напряжения ρ . Из результатов решения прямой задачи, рассмотренных ранее [4] и подтвержденных экспериментальными данными [6], следует, что зависимость остаточных напряжений от глубины упрочненного слоя ρ (МПа) после дробеструйной обработки может быть описана следующим образом (см. фиг. 1, где светлыми точками показаны экспериментальные результаты, z [м]).

1. На участке от 0 до z_p (глубина пластической зоны) величина остаточных напряжений постоянна и определяется только свойствами материала детали. Следовательно, на этом участке график функции $\rho(z)$ – прямая линия

$$\rho(z) = -A, \quad A = \frac{E\sigma_s}{3C(1-\mu) + E} \quad (2.3)$$

где E – модуль упругости материала конструкции, C – коэффициент упрочнения, μ – коэффициент Пуассона.

2. На участке от z_p до z_m (общая глубина упрочненного слоя) функция остаточных напряжений, убывающих до нуля, $\rho(z)$ может быть представлена в виде участка параболы, определяемой уравнением вида

$$\rho(z) = az^2 + bz + c \quad (2.4)$$

Коэффициенты распределения a , b и c примем в качестве параметров оптимизации в задаче эксплуатации. Тогда ограничения, накладываемые на параметры оптимизации, будут определяться характером функции остаточных напряжений, полученной при решении прямой задачи:

$$c = -b^2/(4a), \quad a < 0, \quad -b/(2a) \leq z_{\max} \quad (2.5)$$

Последнее неравенство системы означает, что общая глубина упрочненного слоя z_m не должна превышать известных из эксперимента значений. Величины z_p и z_m зависят от параметров оптимизации

$$z_p = -b/(2a) - \sqrt{-A/a}, \quad z_m = -b/(2a) \quad (2.6)$$

Учитывая соотношения (2.3)–(2.6), можно записать функционал $J_2(\mathbf{h}_2)$ как функцию трех переменных

$$J_2(a, b, c) = \int_0^{z_p} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, A)) - \sigma^0] dz + \int_{z_p}^{z_m} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, a, b, c)) - \sigma^0]^2 dz \quad (2.7)$$

Функционал $J_1(\mathbf{h}_1)$ может быть записан в виде функции двух переменных

$$J_1(r, \mathbf{v}) = \int_0^{z_p} [\rho(z, r, \mathbf{v}) - \rho^*(z, \bar{a}, \bar{b})]^2 dz + \int_{z_p}^{z_m} [\rho(z, r, \mathbf{v}) - \rho^*(z, \bar{a}, \bar{b})]^2 dz \quad (2.8)$$

Здесь $\rho^*(z, \bar{a}, \bar{b}) = \rho(z, \mathbf{h}_2)$ – оптимальная функция распределения остаточных напряжений, найденная из решения задачи эксплуатации.

Таким образом, решение задачи биоптимизации (1.1)–(1.8) можно осуществить последовательным решением двух оптимизационных задач. Первой должна решаться задача эксплуатации, которая заключается в отыскании параметров \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , доставляющих минимум функционалу (2.7) при ограничениях (2.2). В результате решения получаем распределение остаточных напряжений, оптимальное для обеспечения прочности изделия в условиях эксплуатации. Вторая задача заключается в отыскании параметров \bar{r} и $\bar{\mathbf{v}}$, доставляющих минимум функционалу (2.8) при ограничениях (2.1). В результате решения второй задачи находятся параметры процесса упрочнения, позволяющие достичь необходимого распределения остаточных напряжений. Следует отметить, что в данном случае решение задачи биотимизации находится за одну итерацию. Это связано с тем, что решение задачи эксплуатации здесь не зависит от решения задачи обработки (функция $f_2(\mathbf{h}_1) \equiv 0$), так как размеры детали при дробеструйной обработке считаются неизменными. В общем случае требуется построение специальных минимизирующих последовательностей, при определенных условиях гладкости задачи биоптимизации сходящихся к некоторой точке “устойчивого равновесия”, которая и выбирается в качестве решения связанных оптимальных задач [1, 2]. В каж-

дом конкретном случае вопросы существования и сходимости итерационной процедуры должны рассматриваться отдельно.

3. Решение задачи оптимизации остаточных напряжений. Для решения первой задачи (2.2), (2.7) составим функцию Лагранжа

$$L(a, b, \lambda) = J_2(a, b) + \lambda f(a, b) \tag{3.1}$$

$$f(a, b) = \max[\sigma_i^\Sigma(\sigma^e + b^2/(4a)) - \sigma_s/n_2]$$

Необходимыми условиями локального минимума функционала (2.7) являются

$$\partial L/\partial a = 0, \quad \partial L/\partial b = 0, \quad \lambda f = 0, \quad \lambda \geq 0 \tag{3.2}$$

При учете (2.5) и (3.1) систему уравнений (3.2) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{z_p} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, A)) - \sigma^0]^2 dz + \frac{\partial}{\partial a} \int_{z_p}^{z_m} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, az^2 + bz + c)) - \sigma^0]^2 dz + \lambda \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^{z_p} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, A)) - \sigma^0]^2 dz + \frac{\partial}{\partial b} \int_{z_p}^{z_m} [\sigma_i^\Sigma(z, (\sigma^e, az^e + bz + c)) - \sigma^0]^2 dz + \lambda \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \tag{3.3}$$

$$\lambda f = 0, \quad \lambda \geq 0$$

После интегрирования выражений, входящих в систему (3.3), в результате ее решения находятся коэффициенты a, b, c функции распределения остаточных напряжений $\rho(z)$, а также значения z_p, z_m соответственно глубины пластической зоны и общей глубины упрочненной зоны, оптимальные с точки зрения равнопрочности конструкции при заданных напряжениях от эксплуатационной нагрузки.

Следует отметить, что в данном случае функция является дифференцируемой и выпуклой по параметрам оптимизации, а множество ограничений, заданное условиями прочности реальной конструкции, является компактным. Поэтому решение задачи, удовлетворяющее условиям (3.3), существует и является абсолютным минимумом.

4. Решение задачи оптимизации процесса обработки. Для оптимизационной задачи, определяемой выражениями (2.8), (2.1), функция Лагранжа совпадает с функционалом J_1 , поскольку ограничение (1.2) выполняется тождественно. После преобразований функционал может быть записан в виде

$$J_1(p, w) = \int_0^{z_p} c_0 dz + \int_{z_p}^{z_p} [f(Z) + wg(Z) - h(z)]^2 dz \tag{4.1}$$

$$p = rv^{2/5}, \quad w = v^{2/5}, \quad h(z) = az^2 + bz + c + d_6 \tag{4.2}$$

$$f(Z) = d_2 Z^{-1} + d_3 \arctg(Z/d_4)$$

$$wg(Z) = d_1 Z w + \frac{d_5 w}{d_4^2 + Z^2}, \quad Z = \frac{z}{p}$$

$$c_0 = (K\sigma_s/3 - A)^2$$

Коэффициенты K, d_1, d_2, \dots, d_6 зависят от свойств материалов дробы и обрабатываемой поверхности и определяются при решении прямой задачи [4], a, b, c, z_p, z_m – оптималь-

ные параметры функции остаточных напряжений, найденные из решения первой оптимизационной задачи.

Учитывая соотношения (4.2), необходимые условия минимума функционала запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial r} &= \frac{\partial J_1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial J_1}{\partial p} w = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial v} &= \frac{\partial J_1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial J_1}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial J_1}{\partial p} r \frac{2}{5} v^{-3/5} + \frac{\partial J_1}{\partial w} \frac{2}{5} v^{-3/5} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

В итоге получаем систему уравнений

$$\frac{\partial J_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial w} = 0 \quad (4.4)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (4.4). После дифференцирования функционала J_1 из (4.1) получим уравнение, решив которое относительно w , найдем

$$w = \left[- \int_{z_p}^{z_m} f(Z)g(Z)dz + \int_{z_p}^{z_m} h(z)g(Z)dz \right] \left[\int_{z_p}^{z_m} g^2(Z)dz \right]^{-1} \quad (4.5)$$

Обратимся к первому уравнению системы (4.4). После дифференцирования выражения (4.1) и некоторых преобразований получим

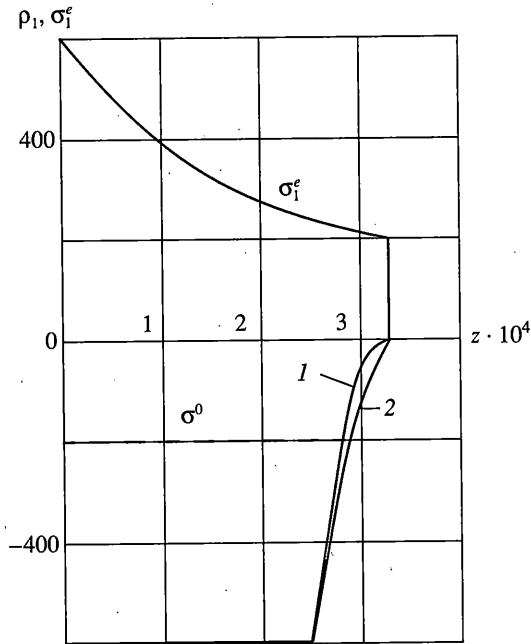
$$\begin{aligned} &\int_{z_p}^{z_m} \{ f(Z)f'(Z)z + wg(Z)f'(Z)z - h(z)f'(Z) + \\ &+ wg'(Z)f(Z)z + w^2g(Z)g'(Z)z - wh(z)g'(Z)z \} dz = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решив уравнение (4.6) относительно p , получим при учете выражения (4.5) и ограничений типа неравенств (2.1) значения функций p и w , единственным образом определяющих искомые оптимальные параметры процесса обработки \mathbf{g} и \mathbf{v} .

Следует отметить, что вследствие дифференцируемости минимизируемой функции и компактности допустимой области решение данной задачи существует. Однако данная задача не является выпуклой. Поэтому исследование полученного решения здесь необходимо проводить дополнительно при каждом наборе исходных данных задачи.

Например, пусть функция интенсивности эксплуатационных напряжений аппроксимируется параболой вида (2.4) с параметрами $a = 1.5 \cdot 10^{16}$, $b = -1.05 \cdot 10^2$, $c = 4.5 \cdot 10^8$, а желаемый уровень результирующих напряжений составляет $\sigma^0 = \sigma_s/3$. В результате решения первой оптимизационной задачи получаем оптимальные параметры функции остаточных напряжений $\bar{a} = -1.03 \cdot 10^{17}$, $\bar{b} = 6.78 \cdot 10^{13}$, при которых оптимальная глубина пластической части упроченной зоны и общая глубина упрочнения равны соответственно $z_p = 2.52 \cdot 10^{-4}$ м и $z_m = 3.28 \cdot 10^{-4}$ м. Решение второй задачи оптимизации дает оптимальные параметры обработки: скорость падения дроби $v = 60$ м/с и радиус дроби $r = 1.5 \cdot 10^{-4}$ м. При этом численные исследования показали, что найденные значения являются абсолютным минимумом исходной задачи.

Графически результаты представлены на фиг. 2. Штрихами нанесен уровень интенсивности суммарных напряжений при обработке поверхности с оптимальными параметрами. Кривая 1 показывает оптимальное распределение остаточных напряжений, полученное в результате решения первой задачи. Кривая 2 – распределение остаточных напряжений при оптимальных параметрах обработки.



Фиг. 2

Видно, что найденные оптимальные режимы дробеструйной обработки позволяют достаточно близко приблизиться к оптимальной эпюре остаточных напряжений и тем самым наилучшим способом реализовать условия равнопрочности конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Няшин Ю.И., Столбов В.Ю. Оптимальное управление технологическими остаточными напряжениями с целью повышения прочности и устойчивости конструкций // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 8. С. 3–12.
2. Столбов В.Ю., Трусов П.В. Связанные задачи оптимизации процессов упругопластического деформирования металлов // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 687–695.
3. Баничук Н. В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
4. Бояришнова И.Н., Колмогоров Г.Л. Остаточные напряжения в поверхностном слое деталей после дробеструйной обработки // Вестн. ПГТУ. Механика. Пермь, 1995. № 2. С. 18–25.
5. Zarka J. Direct analysis of elastic-plastic structures with "overlay" materials during cyclic loading // Intern. J. Num. Meth. in Eng. 1980. V. 15. № 2. P. 225–235.
6. Niku-Lari A., Lu J., Flavenot J. F. Measurement of residual stress distribution by the incremental hole-drilling method // Advances in Surface Treat. 1987. V. 4. P. 199–219.

Пермь

Поступила в редакцию
22.05.2001