МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. М.У. НИКАБАДЗЕ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА–ШТЕЙНЕРА И ФОРМУЛЫ БУРА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Приведены определения: момента инерции относительно оси, тензора инерции относительно точки, момента инерции относительно пересекающихся осей и, в частности, осевых и центробежных моментов инерции относительно координатных осей и момента инерции относительно точки (полярного момента инерции).

Найдена зависимость между двумя тензорами инерций, рассмотренными относительно двух различных полюсов и, исходя из этой зависимости, доказана и сформулирована обобщенная теорема Гюйгенса–Штейнера, из которой в свою очередь получена и классическая теорема. Приведены несколько утверждений, касающихся моментов инерций.

Выписана классическая формула Бура и даны ее обобщения на случаи тензоров второго и $n > 2$ рангов. При этом в случае тензора ранга $n \geq 2$ дано определение транспонированного k-го порядка тензора и сформулированы некоторые касающиеся этого определения утверждения и вытекающие из них следствия.

Выписаны выражения кинетического момента и кинетической энергии как для системы материальных точек в сложном движении, так и для свободного твердого тела и, в частности, для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. При этом в последних случаях даны несколько форм записей кинетического момента и кинетической энергии.

На основании обобщенной формулы Бура выписаны динамические уравнения Эйлера в векторной форме.

1. Момент инерции относительно оси и тензор инерции относительно точки. Как известно [1–4], момент инерции, например, системы материальных точек (СМТ) относительно оси l обозначается через I_l, или I_{ll} и определяется следующим образом.

Определение 1.1. Моментом инерции СМТ относительно оси l называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до оси l, т.е.

$$I_{ll} = \sum_{\alpha} m_\alpha d_\alpha^2 \qquad (1.1)$$

где m_α – масса материальной точки M_α; $d_\alpha = |M_\alpha A_\alpha|$ – расстояние от точки M_α до оси l, $A_\alpha \in l$.

Возьмем на оси l произвольную точку O и пусть, $\mathbf{r}_\alpha$ – радиус-вектор точки M_α относительно точки O. Тогда имеем

$$d_\alpha^2 = \mathbf{r}_\alpha^2 - (OA_\alpha)^2 = \mathbf{r}_\alpha^2 - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_\alpha)^2 = \mathbf{r}_\alpha^2 \mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{l} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r}_\alpha^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) \cdot \mathbf{l}$$

Таким образом

$$d_\alpha^2 = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r}_\alpha^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) \cdot \mathbf{l} \qquad (1.2)$$

где $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ – единичный тензор второго ранга, $\mathbf{l}$ – единичный направляющий вектор оси l, а $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha$ – диада[1].

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем

$$I_{ll} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r}_\alpha^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_\alpha^2 \mathbf{r}_\alpha^2) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot \left[\sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{r}_\alpha^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_\alpha) \right] \cdot \mathbf{l} \tag{1.3}$$

Определение 1.2. Симметричный тензор второго ранга

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{r}_\alpha^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) \tag{1.4}$$

называется тензором инерции СМТ относительно точки (полюса) O.

На основании (1.4) момент инерции (1.3) относительно оси l представляется в виде

$$I_{ll} = \mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{l} \tag{1.5}$$

Видно, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Для любых точек O и O', лежащих на оси l:

$$I_{ll} = \mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{O'} \cdot \mathbf{l}$$

т.е. момент инерции относительно оси l не зависит от выбора лежащей на оси точки, относительно которой рассматривается тензор инерции.

Таким образом, имея определение тензора инерции относительно точки O, момент инерции относительно оси l, проходящей через точку O можно определить соотношением (1.5).

Теперь наряду с осью l рассмотрим еще другую ось l', проходящую через точку O с единичным направляющим вектором $\mathbf{l}'$ и введем следующее определение.

Определение 1.3. Величина

$$I_{Oll'} = -\mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{l}' \tag{1.6}$$

называется моментом инерции относительно пересекающихся в точке O осей l и l'.

Нетрудно заметить, что если $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), например, ортонормированный базис репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, т.е. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, то на основании (1.5) и (1.6) осевые и центробежные моменты инерции относительно координатных осей соответственно представляются соотношениями

$$I_{ii} = \mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{e}_i; \quad I_{Oij} = -\mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{e}_j \quad \langle i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3 \rangle \tag{1.7}$$

а полярный момент инерции относительно точки O, как легко усмотреть, представится в виде[2]

$$I_O = 1/2\mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{e}_i = 1/2 I_1(\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O) = 1/2\underset{\sim}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \quad (i = 1, 2, 3)$$

---

[1] Знак тензорного умножения с целью сокращения письма опускаем.

[2] При изложении материала применяются обычные правила тензорного исчисления [5], [6]. В основном сохранены обозначения работы: Никабадзе М.У. Некоторые вопросы классической механики на языке тензорного анализа. М., 1999. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 12.01.99, № 15-В99.

Представляя тензор инерции (1.4) относительно точки O в виде суммы шарового тензора и девиатора, будем иметь

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = \bar{\underset{\sim}{\mathbf{I}}}_O + 1/3 I_1(\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O)\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \bar{\underset{\sim}{\mathbf{I}}}_O + 2/3 I_O \underset{\sim}{\mathbf{E}}$$
$$\bar{\underset{\sim}{\mathbf{I}}}_O = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O - 2/3 I_O\underset{\sim}{\mathbf{E}}, \quad I_O = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha^2 \tag{1.8}$$

Учитывая второе соотношение (1.8), тензор инерции СМТ (1.4), например, в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ можно представить в виде

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = I_O^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (I_O\delta^{ij} - J_O^{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
$$I_O^{ij} = I_O\delta^{ij} - J_O^{ij}, \quad J_O^{ij} = \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha^i x_\alpha^i \tag{1.9}$$

Следует заметить, что J_O^{11}, J_O^{22}, J_O^{33} представляют моменты инерции относительно плоскостей Ox^2x^3, Ox^1x^3, Ox^2x^2 соответственно, а J_O^{ij} $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3)$ являются центробежными моментами инерции.

2. Зависимость тензора инерции от выбора полюса. Обобщенная теорема Гюйгенса–Штейнера. Найдем зависимость между двумя тензорами инерций $\underset{\sim}{\mathbf{I}}_A$ и $\underset{\sim}{\mathbf{I}}_B$, рассматриваемыми относительно двух различных полюсов A и B соответственно. По определению *1.2* имеем

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_A = \sum_\alpha m_\alpha(\mathbf{r}_\alpha^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\alpha), \quad \underset{\sim}{\mathbf{I}}_B = \sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\rho}_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ и $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ – радиус-векторы точки M_α с массой m_α относительно точек A и B соответственно.

Представляя радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ в виде $\boldsymbol{\rho}_\alpha = \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_\alpha$, где $\mathbf{r}_{BA}$ – радиус-вектор точки A относительно точки B, в силу (2.1) получаем

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_B = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BA} + M[2\mathbf{r}_{BA}\cdot\mathbf{r}_{AC}\underset{\sim}{\mathbf{E}} - (\mathbf{r}_{AC}\mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{BA}\mathbf{r}_{AC})], \quad \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BA} = M(\mathbf{r}_{BA}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_{BA}\mathbf{r}_{BA}) \tag{2.2}$$

где $M = \sum_\alpha m_\alpha$ – масса системы, C – центр масс, $\underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BA}$ – тензор инерции относительно точки B точки A при условии, что в точке A сосредоточена вся масса СМТ.

Нетрудно видеть, что

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BA} = M(\mathbf{r}_{BA}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_{BA}\mathbf{r}_{BA}) = M(\mathbf{r}_{AB}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_{AB}\mathbf{r}_{AB}) = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{AB} \tag{2.3}$$

Учитывая $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_{BC} - \mathbf{r}_{AC}$ в (2.3), получим

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BA} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BC} + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{AC} - M[2\mathbf{r}_{BC}\cdot\mathbf{r}_{AC}\underset{\sim}{\mathbf{E}} - (\mathbf{r}_{AC}\mathbf{r}_{BC} + \mathbf{r}_{BC}\mathbf{r}_{AC})] \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и осуществляя простые преобразования, имеем

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_B = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BC} - \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{AC} \tag{2.5}$$

Теперь, если допустить, что точка A совпадает с точкой C, то из (2.2), или из (2.5) получим

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_B = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BC} \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) выражает содержание следующей обобщенной теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Теорема 2.1. Тензор инерции СМТ относительно какой-нибудь точки представляется в виде суммы тензора инерции той же СМТ относительно центра масс и тензора инерции центра масс относительно рассматриваемой точки при условии, что в центре масс сосредоточена вся масса СМТ.

Следует заметить, что (2.5) – более общая теорема, чем (2.6).

Заметим также, что (2.6) можно было получить, например, из второго соотношения (2.1), если учесть, что $\boldsymbol{\rho}_\alpha = \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{R}_\alpha$, где $\mathbf{R}_\alpha$ – радиус-вектор точки M_α с массой m_α относительно центра масс C.

Теперь проведем через точки A, C и B параллельные прямые Al', Cl и Bl'' соответственно и пусть, $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}''$ – единичные направляющие векторы этих прямых. Тогда

$$\mathbf{l}' \cdot \mathbf{I}_{AC} \cdot \mathbf{l}' = Md_1^2, \quad \mathbf{l}'' \cdot \mathbf{I}_{BC} \cdot \mathbf{l}'' = Md_2^2 \tag{2.7}$$

где d_1 – расстояние между осями Cl и Al', а d_2 – между осями Cl и Bl''.

Теперь нетрудно получить классическую теорему Гюйгенса–Штейнера. В самом деле, умножая (2.6) слева и справа скалярно на $\mathbf{l}'' = \mathbf{l}$, имеем

$$\mathbf{l}'' \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_B \cdot \mathbf{l}'' = \mathbf{l} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}'' \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{BC} \cdot \mathbf{l}''$$

а отсюда на основании (1.5) и второго соотношения (2.7) получаем $I_{Bl''} = I_{Cl} + Md_2^2$, что и требуется. Аналогично из (2.5) получаем $I_{Bl''} = I_{Al'} + M(d_2^2 - d_1^2)$.

Теперь допустим, что Cx_1, Cx_2 и Cx_3 – центральные оси инерции. Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ единичные векторы этих осей, следовательно, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Возьмем на некоторой центральной оси, например, на оси Cx_3 произвольную точку O и рассмотрим репер $O\mathbf{e}_{1'}\mathbf{e}_{2'}\mathbf{e}_{3'}$, оси которого параллельны осям репера $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Очевидно, $\mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \delta_{i'j'}$. Пусть, $|OC| = h$. Тогда на основании обобщенной теоремы Гюйгенса–Штейнера (2.6) имеем

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} \tag{2.8}$$

где на основании (2.3):

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} = M(\mathbf{r}_{OC}^2 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}_{OC}\mathbf{r}_{OC}) = Mh^2(\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{e}_{3'}\mathbf{e}_{3'}) = Mh^2(\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.8) получаем

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C + Mh^2(\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) \tag{2.10}$$

Из (2.10) в силу (1.7) следует

$$I_{Oi'i'} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} \cdot \mathbf{e}_i \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle$$

$$I_{Oi'j'} = -\mathbf{e}_{i'} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \mathbf{e}_{j'} = -\mathbf{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \cdot [Mh^2(\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)] \cdot \mathbf{e}_j \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3)$$

т.е.

$$\begin{aligned} I_{Oi'i'} &= I_{Cii} + Mh^2(\delta_{ii} - \delta_{3i}\delta_{3i}) \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle \\ I_{Oi'j'} &= I_{Cij} + Mh^2(\delta_{3i}\delta_{3j} - \delta_{ij}) = I_{Cij}, \quad \forall O \in Cx_3 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Теперь допустим, что репер $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ – главный центральный репер инерции. Тогда из (2.11) получаем

$$\begin{aligned} I_{Oi'i'} &= I_{Cii} + Mh^2(1 - \delta_{3i}\delta_{3i}), \quad \forall O \in Cx_3 \quad \langle i = 1, 2, 3\rangle \\ I_{Oi'j} &= 0, \quad \forall O \in Cx_3 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Следовательно, соотношения (2.12) выражают содержание следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Для произвольной точки, лежащей на какой-нибудь главной центральной оси инерции, главные оси инерции параллельны главным центральным осям инерции.

Отсюда в свою очередь имеем следующее следствие.

Следствие 2.1. Главная центральная ось инерции для любой своей точки является главной осью инерции.

Аналогично утверждению *2.1* в силу обобщенной теоремы Гюйгенса–Штейнера и представления тензора инерции в виде (1.4) или (1.9) нетрудно доказать и остальные теоремы для моментов инерции. Поэтому на доказательствах этих теорем останавливаться не будем.

Замечание. Приведенные выше соотношения имеют место и в случае сплошного твердого тела, при условии, что в соотношениях символы сумм надо заменить соответствующими интегралами. Например, соотношение (1.4) для трехмерного сплошного твердого тела заменяется соотношением

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_O = \int_V \rho(\mathbf{r}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}\mathbf{r})dV \tag{2.13}$$

3. Обобщение формулы Бура. *3.1. Классическая формула Бура.* Как известно [1–4], связь между полной (абсолютной) и относительной (локальной) производными по времени вектора $\mathbf{a}$ и величинами, характеризующими движение подвижного репера относительно неподвижного задается формулой Бура

$$d\mathbf{a}/dt = \delta\mathbf{a}/\delta t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \tag{3.1}$$

где $d\mathbf{a}/dt$ – абсолютная производная, $\delta\mathbf{a}/\delta t$ – относительная производная, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости части движения вокруг своего начала подвижного репера относительно неподвижного.

3.2. Обобщение формулы Бура на случай тензора второго ранга. Пусть $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ – тензор второго ранга. Рассмотрим его диадное представление в подвижном репере. Будем иметь

$$\underset{\sim}{\mathbf{Q}} = q_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

Не нарушая общности, будем полагать, что базис $\mathbf{e}_i$ – ортонормированный, т.е. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ и найдем абсолютную производную по времени t от тензора (3.2). Имеем

$$\frac{d\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{dt} = \frac{d}{dt}(q_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = \frac{dq_{ij}}{dt}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + q_{ij}\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\mathbf{e}_j + q_{ij}\mathbf{e}_i\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} =$$

$$= \frac{\delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{\delta t} + q_{ij}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + q_{ij}\mathbf{e}_i\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j = \frac{\delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}} + (\boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T)^T$$

Таким образом

$$\frac{d\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{dt} = \frac{\delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}} + (\boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T)^T, \quad \frac{\delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}}{\delta t} = \frac{dq_{ij}}{dt}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{3.3}$$

где $\delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}/\delta t$ – относительная производная, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращательного движения вокруг своего начала подвижного репера относительно неподвижного, $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T$ – транспонированный тензор.

3.3. Обобщение формулы Бура на случай тензора ранга $n \geq 2$. Можно обобщить (3.3) и на случай тензора, имеющего ранг не меньше двух. Пусть, представление тензора Q в мультипликативном базисе, составленном из ортонормированного базиса подвижного репера имеет вид

$$\underset{\sim}{\mathbf{Q}} = q_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_n} \quad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m, m \geq 2, n \geq 2) \tag{3.4}$$

Введем определение операции транспонирования k-го порядка тензора ранга $n \geq 2$ следующим образом.

Определение 3.1. Тензор, обозначаемый через $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{k}{T}}$ и представляемый в виде

$$\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{k}{T}} = \begin{cases} q_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mathbf{e}_{i_{k+1}} \mathbf{e}_{i_{k+2}} \cdots \mathbf{e}_{i_n} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_k}, \text{ если } 0 \leq k \leq n \\ q_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mathbf{e}_{i_{n+k+1}} \mathbf{e}_{i_{n+k+2}} \cdots \mathbf{e}_{i_n} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_{n+k}}, \text{ если } 0 < -k \leq n \end{cases}$$

называется транспонированным k-го порядка тензором. Целое число k называется порядком транспонирования.

Заметим, что показатель порядка 1 часто следует опускать, т.е. целесообразно писать $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{1}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T$.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3.1. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ имеет ранг $n \geq 2$, то $\underset{\sim}{\mathbf{Q}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{0}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{n}{T}}$.

Утверждение 3.2. Ранг $n \geq 2$ является периодом операции транспонирования тензора, т.е. для любого целого числа p имеем $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{p+n}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{p}{T}}$.

Утверждение 3.3. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ имеет ранг $n \geq 2$, а p и q произвольные целые числа, то

$$(\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{p}{T}})^{\overset{q}{T}} = (\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{q}{T}})^{\overset{p}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{p+q}{T}}$$

Видно, что из последних двух утверждений вытекает следствие.

Следствие 3.1. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ имеет ранг $n \geq 2$, а $m = np + q$, где m, p, q – целые числа, то

$$\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{m}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{np+q}{T}} = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{q}{T}}$$

Утверждение 3.4. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ имеет ранг $n \geq 2$, s – целое число, удовлетворяющее условию $0 \leq |s| \leq n$, а $\mathbf{a}$ – произвольный вектор, то

$$(\mathbf{a} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{s}{T}})^T = -\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{s+1}{T}} \times \mathbf{a} \tag{3.5}$$

Теперь можно усмотреть, что в силу утверждений 3.3 и 3.4 имеем следующее следствие:

Следствие 3.2. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ имеет ранг $n \geq 2$, s и r – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq |s| \leq n$, $0 \leq |r| \leq n$, а $\mathbf{a}$ – произвольный вектор, то

$$(\mathbf{a} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{s}{T}})^{\overset{r+1}{T}} = -(\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{s+1}{T}} \times \mathbf{a})^{\overset{r}{T}} \tag{3.6}$$

Действительно, применяя операцию $\overset{r}{T}$ к обеим частям (3.5), получим (3.6).

Следует заметить, что в силу следствия *3.1* в качестве s и r можно было выбрать любые целые числа, т.е. наложенные на них ограничения не нарушают общности.

Нетрудно проверить, что имеет место применяемые часто в приложениях следующее следствие [5].

Следствие 3.3. Если тензор $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ второго ранга, то, например, из (3.6) получаем

$$(\mathbf{a} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{T})^{T} = -\underset{\sim}{\mathbf{Q}} \times \mathbf{a}, \quad (\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{T} \times \mathbf{a})^{T} = -\mathbf{a} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}} \tag{3.7}$$

Первое соотношение (3.7) получается из (3.6) при $s = 1$, $r = 0$, а второе – при $s = 0$, $r = 0$. При этом следует учитывать утверждение *3.1*.

Теперь аналогично случаю тензора второго ранга, найдя абсолютную производную от тензора (3.4), убедимся в справедливости следующей обобщенной формулы на случай тензора ранга $n \geq 2$:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{Q}}/dt = \delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}/\delta t + \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{k-1}{T}})^{\overset{n-k+1}{T}} \tag{3.8}$$

или на основании утверждения 3.2 последнее соотношение еще можно представить в виде

$$d\underset{\sim}{\mathbf{Q}}/dt = \delta\underset{\sim}{\mathbf{Q}}/\delta t + \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^{\overset{k-1}{T}})^{\overset{1-k}{T}}$$

Заметим, что, например, из (3.6) при $n = 2$ следует (3.3), а при $n = 1$ – (3.1).

4. Кинетический момент (момент количества движения) и кинетическая энергия СМТ в сложном движении. Предполагается, что сложное движение (абсолютное движение) СМТ состоит из движения поступательно перемещающегося репера с началом в некоторой точке (полюсе) и движения СМТ относительно указанного выше подвижного репера. Как известно [1–4], в рассматриваемом случае кинетический момент абсолютного движения относительно какой-нибудь "неподвижной" точки O представляется в виде

$$\mathbf{G}_O = \mathbf{G}_O(M\mathbf{v}_C) + \mathbf{G}_{Cr}, \quad M = \sum_k m_k \tag{4.1}$$

где $\mathbf{G}_O(M\mathbf{v}_C)$ – кинетический момент центра масс относительно точки O, при условии, что в нем сосредоточена вся масса СМТ, а $\mathbf{G}_{Cr}$ – кинетический момент СМТ относительно центра масс относительного движения СМТ, происходящего по отношению к поступательно перемещающемуся реперу, начало которого совпадает с центром масс СМТ.

Кинетическая энергия абсолютного движения СМТ [2] представляется в виде

$$T = 1/2M\mathbf{v}_1^2 + M\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_{Cr} + T_{Ar} \tag{4.2}$$

где теперь начало поступательно движущегося репера совпадает с некоторой точкой A, $\mathbf{v}_A$ – абсолютная скорость точки A; $\mathbf{v}_{Cr}$ – скорость центра масс C относительно подвижного репера с началом в точке A, т.е. $\mathbf{v}_{Cr}$ – относительная скорость центра масс C относительно поступательно движущегося репера с началом в точке A; T_{Ar} – кинетическая энергия относительного движения СМТ по отношению к поступательно движущемуся реперу с началом в точке A.

Если точка A совпадает с точкой C, то $\mathbf{v}_{Cr} = 0$ и из (4.2) получаем теорему Кенига

$$T = 1/2M\mathbf{v}_C^2 + T_{Cr} \tag{4.3}$$

5. Кинетический момент и кинетическая энергия свободного твердого тела. Как известно [1–4], движение свободного твердого тела можно представить состоящим из поступательного движения вместе с какой-либо точкой тела и вращательного движения вокруг этой точки. При этом, скорость любой точки B твердого тела во вращательном движении определяется формулой Эйлера

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{5.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки B относительно рассматриваемой точки (полюса).

Пусть, в качестве полюса взята точка A. Тогда кинетический момент относительного движения твердого тела вокруг точки A на основании (5.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{Ar} &= \int\limits_V \rho\mathbf{r} \times \mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dV = \int\limits_V \rho[\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]dV = \\ &= \int\limits_V \rho(\mathbf{r}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}dV = \left[\int\limits_V \rho(\mathbf{r}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}\mathbf{r})dV\right] \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь ρ – плотность твердого тела, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости твердого тела при вращении вокруг полюса A. Она, следовательно, одинакова для всех точек тела и от переменной интегрирования не зависит.

В силу (2.13) соотношение (5.2) представится в виде

$$\mathbf{G}_{Ar} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \tag{5.3}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{I}}_A = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}\mathbf{r})dV \tag{5.4}$$

Аналогично для кинетической энергии относительного движения твердого тела вокруг точки A будем иметь

$$\begin{aligned} T_{Ar} &= \int\limits_V \rho\frac{\mathbf{v}^2}{2}dV = 1/2\int\limits_V \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dV = 1/2\int\limits_V \rho[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \cdot \boldsymbol{\omega}dV = \\ &= 1/2\int\limits_V \rho[\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \cdot \boldsymbol{\omega}dV = 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \left[\int\limits_V \rho(\mathbf{r}^2\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \mathbf{r}\mathbf{r})dV\right] \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Таким образом, отсюда в силу (5.4) получаем

$$T_{Ar} = 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = 1/2\mathbf{G}_{Ar} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.5}$$

Теперь на основании (5.3) и (5.5) соотношения (4.1) и (4.2) для свободного твердого тела соответственно можно представить в виде

$$\mathbf{G}_O = \mathbf{G}_O(M\mathbf{v}_C) + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.6}$$

$$T = 1/2M\mathbf{v}_A^2 + M\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_{Cr} + 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.7}$$

Следует заметить, что (5.7) можно придать другой вид. Действительно, учитывая, что $\mathbf{v}_{Cr} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}$ и $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C$, будем иметь

$$M\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_{Cr} = M\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC}) = M(\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{v}_A) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}_A(M\mathbf{v}_C) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

и, следовательно, (5.7) примет вид

$$T = 1/2M\mathbf{v}_A^2 + \mathbf{G}_A(M\mathbf{v}_C) \cdot \boldsymbol{\omega} + 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.8}$$

или, учитывая, что главный вектор количеств движения

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{r} dV = M\mathbf{v}_C \tag{5.9}$$

кинетическая энергия (5.8) представится в виде

$$T = 1/2M\mathbf{v}_A^2 + \mathbf{G}_A(\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\omega} + 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.10}$$

На основании (5.3) кинетическую энергию (5.10) можно еще записать так

$$T = 1/2M\mathbf{v}_A^2 + \mathbf{G}_A(\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\omega} + 1/2\mathbf{G}_{Ar} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Заметим, что кинетический момент (5.6) можно на основании (5.9) также представить в виде

$$\mathbf{G}_O = \mathbf{G}_O(\mathbf{P}) + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.11}$$

Используя, например, (5.3) и (5.5), получим выражения для кинетического момента относительного движения твердого тела вокруг точки A и тензора инерции относительно полюса A:

$$\frac{d\mathbf{G}_{Ar}}{d\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{e}_i\frac{\partial \mathbf{G}_{Ar}}{\partial \omega_i} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A, \quad \frac{dT_{Ar}}{d\boldsymbol{\omega}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}_{Ar}$$

Аналогично на основании (5.11) и (5.10) будем иметь соответственно

$$\frac{d\mathbf{G}_O}{d\boldsymbol{\omega}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C, \quad \frac{dT}{d\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{G}_A(\mathbf{P}) + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}_A(\mathbf{P}) + \mathbf{G}_{Ar}$$

Если точка A совпадает с центром масс C, то, например, из (5.10) получаем

$$T = 1/2M\mathbf{v}_C^2 + 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.12}$$

6. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. В этом случае целесообразно в качестве полюса взять неподвижную точку. Обозначим ее через O. Тогда, как легко усмотреть, на основании (2.3) будем иметь

$$\mathbf{G}_O(M\mathbf{v}_C) = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} \tag{6.1}$$

и, подставляя (6.1) в (5.6) с учетом (2.6) получаем

$$\mathbf{G}_O = (\underset{\sim}{\mathbf{I}}_C + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \tag{6.2}$$

Аналогично в рассматриваемом случае, например, из (5.12) с учетом (2.6) получаем

$$T = 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot (\underset{\sim}{\mathbf{I}}_{OC} + \underset{\sim}{\mathbf{I}}_C) \cdot \boldsymbol{\omega} = 1/2\boldsymbol{\omega} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{I}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 1/2\mathbf{G}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{6.3}$$

Следовательно, на основании (6.2) и (6.3) получаем соответственно

$$dG_O/d\omega = \underset{\sim}{I}_O, \quad dT/d\omega = \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega = G_O$$

7. Динамические уравнения Эйлера. На основании теоремы об изменении кинетического момента абсолютного движения имеем

$$dG_O/dt = M_O^{(e)} \tag{7.1}$$

Будем предполагать, что тензор инерции относительно точки O представлен в базисе подвижного репера, жестко скрепленного с телом. Тогда очевидно, I_{ij} = const и на основании (3.3) и (6.2) будем иметь

$$\frac{dG_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{I}_O \cdot \omega) = \underset{\sim}{I}_O \cdot \frac{d\omega}{dt} + [\omega \times \underset{\sim}{I}_O + (\omega \times \underset{\sim}{I}_O)^T] \cdot \omega = \underset{\sim}{I}_O \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega$$

Таким образом

$$dG_O/dt = \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega^{\bullet} + \omega \times \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega, \quad \omega^{\bullet} = d\omega/dt \tag{7.2}$$

Учитывая (7.2) в (7.1), получим искомое уравнение в векторном виде, а именно

$$\underset{\sim}{I}_O \cdot \omega^{\bullet} + \omega \times \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega = M_O^{(e)} \tag{7.3}$$

Из (6.3) получим

$$dT/dt = \omega \cdot \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega^{\bullet} \tag{7.4}$$

Умножая (7.3) на ω скалярно, имеем

$$\omega \cdot \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega^{\bullet} = M_O^{(e)} \cdot \omega \tag{7.5}$$

Теперь, сравнивая (7.4) с (7.5), получим

$$dT/dt = \omega \cdot \underset{\sim}{I}_O \cdot \omega^{\bullet} = M_O^{(e)} \cdot \omega$$

Автор признателен Победре Б.Е. за обсуждение результатов работы.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00780).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Гостехиздат, 1960.
2. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах. СПб.: Изд-во "Лань", 1998. 736 с.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. М.: Наука, ч. 1, 1972. 468 с; ч.2, 1972. 332 с.
4. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика: Учебник. М.: Изд-во МГУ, 1998. 272 с.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.11.2001