

УДК 539.3

© 2004 г. А.Н. ДАНИЛИН, Н.Н. ЗУЕВ, А.Б. КОСТРИЧЕНКО,  
В.И. ШАЛАШИЛИН

## О РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

При моделировании нелинейного деформирования упругих систем используются различные варианты геометрически нелинейных соотношений (ГНС) между перемещениями и деформациями [1–4]. В статье дается сравнительный анализ трех вариантов ГНС: точные, полные квадратичные и неполные квадратичные соотношения. Последние два варианта являются приближенными и получаются из точных соотношений в результате разложений в степенные ряды и удержании определенного числа членов разложений. Показывается, что использование приближенных вариантов ГНС может вносить в расчет значительную погрешность, причем заранее невозможно определить, какой из вариантов приближенных ГНС предпочтительнее использовать в расчетах. На простых примерах сделаны оценки точности вычислений с использованием различных вариантов ГНС. Даны сравнительные примеры и рассмотрена конечноэлементная формулировка задачи о сильном геометрически нелинейном деформировании консольной балки с использованием процедуры наилучшей параметризации.

Важную роль в процессе расчета гибких элементов конструкций играет выбор используемых геометрически нелинейных соотношений между перемещениями и деформациями. Точные соотношения имеют вид [1]:

$$E_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i} - 1$$

$$\sin \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_i \partial u_j / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_j \partial u_i / \partial x_i + \partial u_k / \partial x_i \partial u_k / \partial x_j}{(E_i + 1)(E_j + 1)} \quad (1)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right], \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

где  $u_i$  – перемещение по  $i$ -му направлению,  $E_i$  – относительное удлинение по  $i$ -му направлению,  $\gamma_{ij}$  – сдвиг,  $\varepsilon_i$  – компоненты тензора деформаций.

Эти соотношения являются достаточно сложными и не очень удобны для использования в аналитических расчетах, поэтому традиционно используются различные приближенные варианты, основанные на разложении выражений (1) в степенной ряд и удержании определенного числа членов разложения. Например, используя представления вида  $\sqrt{1 + 2x} \approx 1 + x$ ,  $\sin(x) \approx x$ , получаем

$$E_i = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right]$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j \partial u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_k \partial u_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Этот вариант ГНС обычно называется полным квадратичным.

Если учитывать, что разложение выполняется не по степеням  $\varepsilon$ , а по степеням производных перемещений по координатам, получим, что в разложении (2) следует сохранять не все квадратичные члены. Этот факт отмечен, например, в [2–4]. В таком случае соотношения (2) принимают вид (см. [3]):

$$E_i = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (3)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_k \partial u_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Этот вариант ГНС обычно называется неполным квадратичным. В [4] приведены результаты расчета модельного примера изгиба пластины с использованием полного и неполного квадратичных вариантов. Показано, что в некоторых случаях неполный квадратичный вариант дает более точные результаты.

Определим величины погрешностей, получаемых при использовании различных вариантов ГНС в случае поворота на угол  $\varphi$  в плоскости  $x, y$  линейного элемента длиной  $dx$  (фиг. 1, а), испытывающего только линейную деформацию  $E_0 = (dx_1 - dx)/dx$ . Считая, что ось элемента в начальном положении совпадала с осью  $x$ , получим, что обыкновенные и частные производные от перемещений совпадают и имеют вид

$$\partial u/\partial x = du/dx = (1 + E_0) \cos \varphi - 1, \quad \partial v/\partial x = dv/dx = (1 + E_0) \sin \varphi$$

Рассмотрим выражения для деформации стержня, получаемые по различным вариантам ГНС, и их погрешности  $\Delta E = E_x - E_0$ .

Линейный вариант (соотношения Коши)

$$E_x = \partial u/\partial x = (1 + E_0) \cos \varphi - 1, \quad \Delta E = (E_0 + 1)(\cos \varphi - 1) \quad (4)$$

Полный квадратичный вариант

$$E_x = \partial u/\partial x + 1/2[(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial x)^2] = E_0 + E_0^2/2, \quad \Delta E = E_0^2/2 \quad (5)$$

Неполный квадратичный вариант

$$E_x = \partial u/\partial x + 1/2(\partial v/\partial x)^2 = E_0 + E_0^2/2 - 1/2[(1 + E_0) \cos \varphi - 1]^2$$

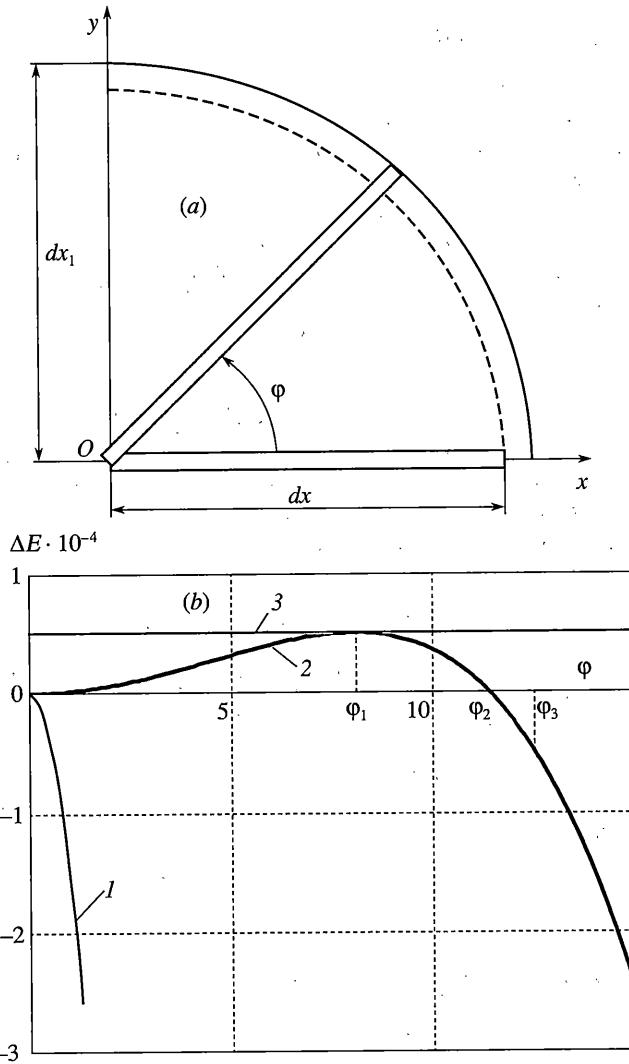
$$\Delta E = E_0^2/2 - 1/2[(1 + E_0) \cos \varphi - 1]^2 \quad (6)$$

Точные соотношения

$$E_x = \sqrt{(1 + E_0)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} - 1 = E_0$$

Как и следовало ожидать, точные соотношения дают точное значение деформаций. Линейный вариант (4) дает правильное значение деформации при  $\varphi = 0$ . Погрешность полного квадратичного варианта (5) постоянна, не зависит от угла  $\varphi$ , а зависит только от деформации  $E_0$ . При нулевой деформации (поворот как жесткого тела) погрешность равна нулю, т.е. он правильно описывает перемещения жесткого тела; при  $E_0 \neq 0$  появляется погрешность.

Погрешность неполного квадратичного варианта (6) зависит как от величины деформации  $E_0$ , так и от угла поворота  $\varphi$ , причем при некоторых углах поворота она меньше, чем погрешность полного квадратичного варианта. Определим эти значения углов. Из (6) следует, что погрешность неполного квадратичного варианта  $\Delta E = E_x - E_0$



Фиг. 1

обращается в нуль при двух значениях угла поворота:  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi_2 = \arccos((1 - E_0)/(1 + E_0))$ . На промежутке от  $\varphi_0$  до  $\varphi_2$  она положительна, т.е.  $E_x \geq E_0$ , причем достигает максимального значения  $\Delta E_{\max} = E_0^2/2$  при  $\varphi_1 = \arccos(1/(1 + E_0))$ . Далее при  $\varphi > \varphi_2$  погрешность становится отрицательной, достигая минимума  $\Delta E_{\min} = -2(1 + E_0)$  при  $\cos \varphi = -1$ , т.е. при повороте на  $180^\circ$ . Определим значения углов поворота, для которых погрешность неполного квадратичного варианта не превышает по модулю погрешность полного квадратичного варианта. На промежутке от  $\varphi_0$  до  $\varphi_2$  погрешность  $\Delta E$  остается положительной. Найдем значение угла поворота  $\varphi_3$ , при котором будет выполняться равенство  $\Delta E = -E_0^2/2$ . Тогда соотношение (6) приводит к уравнению

$$E_0^2 - 1/2[(1 + E_0) \cos \varphi_3 - 1]^2 = 0$$

решая которое, получаем  $\varphi_3 = \arccos((1 - E_0\sqrt{2})/(1 + E_0))$ . Следовательно, при  $0 \leq \varphi \leq \varphi_3$  выполняется условие  $|\Delta E| \leq E_0^2/2$ .

Рассмотрим три случая деформирования стержня:

при  $E_0 = 0.0001$  получим  $\Delta E_{\max} = 5 \cdot 10^{-9}$ ,  $\varphi_1 = 0.81^\circ$ ,  $\varphi_2 = 1.15^\circ$ ,  $\varphi_3 = 1.26^\circ$ ; при  $E_0 = 0.001$  получим  $\Delta E_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}$ ,  $\varphi_1 = 2.56^\circ$ ,  $\varphi_2 = 3.62^\circ$ ,  $\varphi_3 = 3.98^\circ$ ; при  $E_0 = 0.01$  получим  $\Delta E_{\max} = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varphi_1 = 8.07^\circ$ ,  $\varphi_2 = 11.42^\circ$ ,  $\varphi_3 = 12.55^\circ$ .

На фиг. 1, *b* приведены зависимости  $\Delta E(\varphi)$  для линейного варианта (кривая 1), неполного квадратичного варианта (кривая 2) и полного квадратичного варианта (кривая 3) при  $E_0 = 0.01$ .

Таким образом, неполный квадратичный вариант ГНС дает меньшую погрешность по сравнению с полным квадратичным вариантом ГНС при весьма малых углах поворота.

Получим аналогичные оценки погрешности деформации сдвига. Рассмотрим прямоугольный элемент с размерами  $dx$ ,  $dy$ , получивший начальную деформацию чистого сдвига  $\gamma_0$  и поворот  $\varphi$  (фиг. 2, *a*). Произвольная точка *A* с начальными координатами  $dx$ ,  $dy$  в результате сдвига смещается в положение *A'* ( $dx + dy \sin \gamma_0$ ,  $dy \cos \gamma_0$ ). После поворота элемента на угол  $\varphi$  относительно начала координат *O* эта точка займет положение *A''* с координатами

$$(dx + dy \sin \gamma_0) \cos \varphi - dy \cos \gamma_0 \sin \varphi, \quad (dx + dy \sin \gamma_0) \sin \varphi + dy \cos \gamma_0 \cos \varphi$$

Приращения перемещений  $du$  и  $dv$  точки *A* относительно неподвижной точки *O* равны

$$du = (\cos \varphi - 1)dx + \sin(\gamma_0 - \varphi)dy, \quad dv = \sin \varphi dx + (\cos(\gamma_0 - \varphi) - 1)dy$$

Определим деформацию сдвига  $\gamma$  и погрешность  $\Delta \gamma = \gamma - \gamma_0$ , аналогично выражениям (4)–(6).

Линейный вариант (соотношения Коши):

$$\gamma = du/dy + dv/dx = \sin(\gamma_0 - \varphi) + \sin \varphi, \quad \Delta \gamma = \sin(\gamma_0 - \varphi) + \sin \varphi - \gamma_0 \quad (7)$$

Полный квадратичный вариант

$$\gamma = du/dy + dv/dx + du/dx du/dy + dv/dx dv/dy = \sin \gamma_0, \quad \Delta \gamma = \sin \gamma_0 - \gamma_0 \quad (8)$$

Неполный квадратичный вариант

$$\begin{aligned} \gamma &= du/dy + dv/dx - du/dx dv/dx - du/dy dv/dy = \\ &= (2 - \cos(\gamma_0 - \varphi)) \sin(\gamma_0 - \varphi) + (2 - \cos \varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad (9)$$

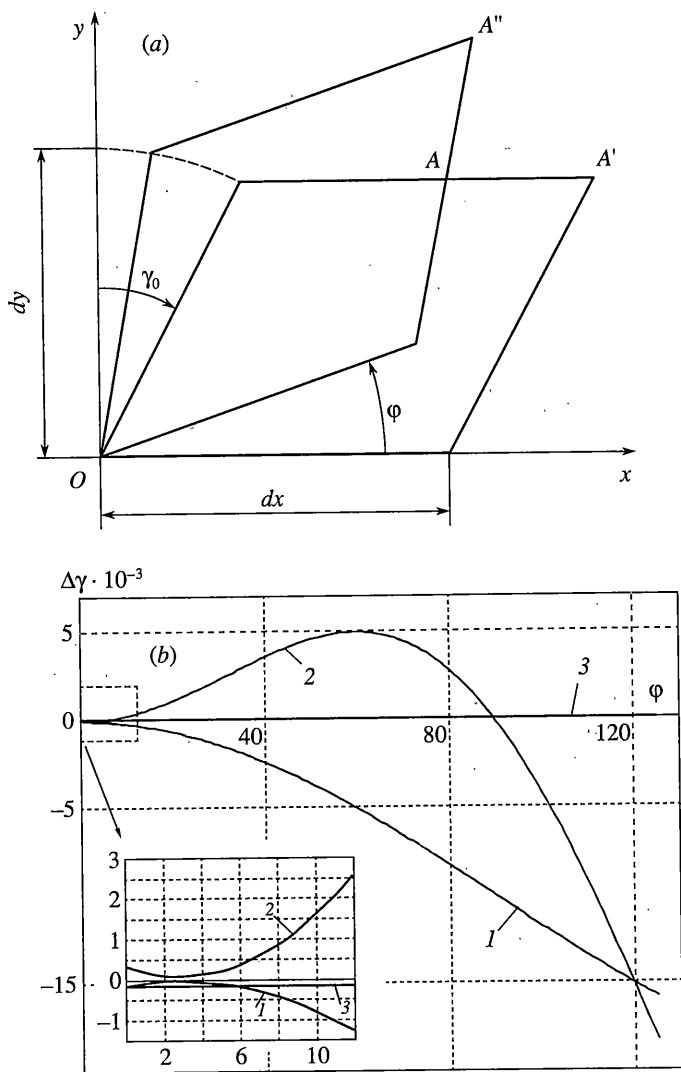
$$\Delta \gamma = (2 - \cos(\gamma_0 - \varphi)) \sin(\gamma_0 - \varphi) + (2 - \cos \varphi) \sin \varphi - \gamma_0$$

Точные соотношения

$$\sin \gamma = du/dy + dv/dx + du/dx du/dy + dv/dx dv/dy = \sin \gamma_0, \quad \Delta \gamma = 0$$

Зависимости  $\Delta \gamma(\varphi)$  при  $\gamma_0 = 0.01$  даны на фиг. 2, *b*. Кривые 1, 2, 3 соответствуют линейному варианту, неполному и полному квадратичным вариантам. Отметим, что характер кривых слабо зависит от величины начального сдвига  $\gamma_0$ . Она определяет только величины  $\Delta \gamma$ .

Как видно из приведенных зависимостей, полный квадратичный вариант позволяет получить более точные значения для относительных удлинений и сдвигов по сравнению с другими приближенными соотношениями при произвольных перемещениях. Однако это еще не гарантирует более точных результатов расчета напряженно-де-

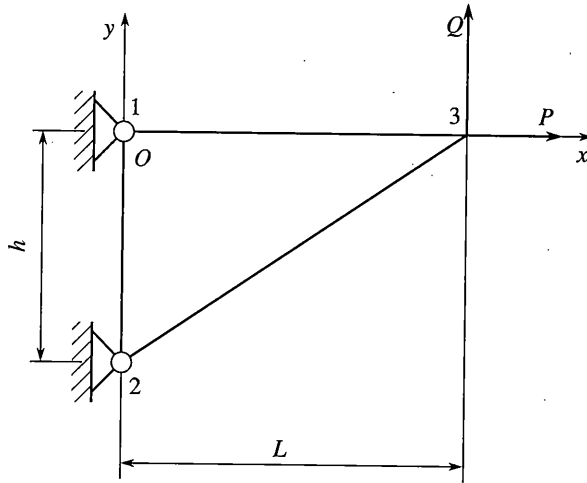


Фиг. 2

формированного состояния, поскольку в уравнения равновесия входят не только деформации, но и их производные по перемещениям.

Метод конечных элементов в настоящее время является одним из наиболее мощных методов определения напряженно-деформированного состояния самых разнообразных конструкций, в том числе и их гибких элементов. Традиционно используется разложение тензора конечной деформации на тензор малой деформации и тензор малого поворота [1], причем в зависимости от принятых предположений те или иные малые величины не учитываются. Для машинных расчетов условие простоты расчетных формул не является критичным, поэтому есть смысл такое разложение не проводить.

Результаты использования тех или иных соотношений продемонстрируем на численных примерах.



Фиг. 3

Рассмотрим конечноэлементный подход к определению деформации элемента в форме треугольника толщиной  $t$ , находящегося в плоском напряженном состоянии (фиг. 3).

Обозначая перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$  соответственно и используя линейную аппроксимацию перемещений в пределах элемента, с учетом граничных условий  $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$  получим выражения для перемещений

$$u(x) = (u_3/L)x, \quad v(x) = (v_3/L)x \quad (10)$$

Тогда производные от перемещений будут постоянны по элементу и равны  $du/dx = u_3/L$ ,  $dv/dx = v_3/L$ ,  $du/dy = dv/dy = 0$ . Введем следующие обозначения:  $u_3/L = \bar{U}$ ,  $v_3/L = \bar{V}$ . Используя принцип возможных перемещений, получим систему уравнений равновесия:

$$\int_V \left( \sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_3} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_3} + \tau_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_3} \right) dV = P$$

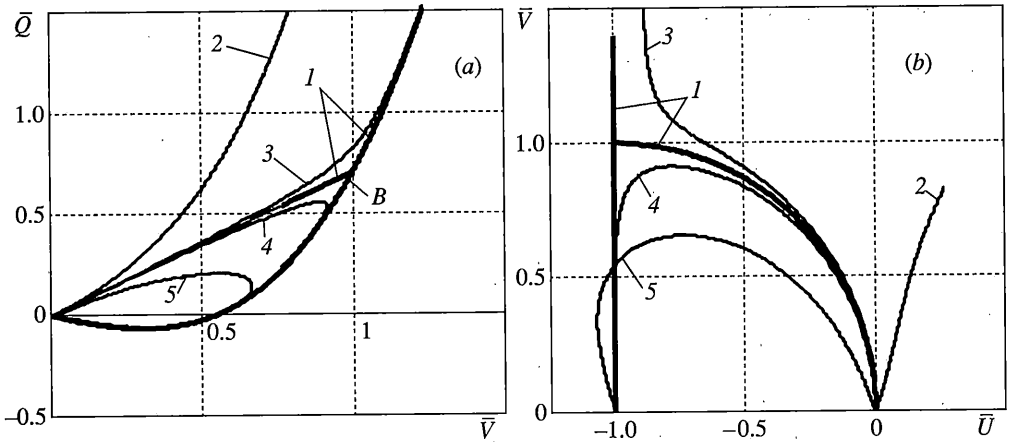
$$\int_V \left( \sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_3} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_3} + \tau_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_3} \right) dV = Q \quad (11)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\tau$  – обобщенные напряжения, которые в рассматриваемом случае совпадают с компонентами тензора напряжений.

Закон Гука для плоского напряженного состояния принимаем в виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Учитывая, что при линейной аппроксимации перемещений (10) величины под знаками интегралов в (11) являются константами, будем иметь следующие системы уравнений равновесия:



Фиг. 4

для полного квадратичного варианта (2):

$$\begin{aligned} (1 + \bar{U})[(1 + \bar{U})^2 + \bar{V}^2 - 1] &= \bar{P} \\ \bar{V}[(1 + \bar{U})^2 + \bar{V}^2 - \mu] &= \bar{Q} \end{aligned} \quad (12)$$

для неполного квадратичного варианта (3):

$$\begin{aligned} [\bar{U}(2 + \bar{V}^2) + \mu\bar{V}^2(1 - \bar{U})] &= \bar{P} \\ \bar{V}[1 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2 - \mu(1 - \bar{U})^2] &= \bar{Q} \\ \bar{P} = 4P(1 - \mu^2)/(Eht), \quad \bar{Q} = 4Q(1 - \mu^2)/(Eht) \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона (в расчетах  $\mu = 0.3$ ).

Получим кривые зависимости перемещений  $\bar{U}$  и  $\bar{V}$  от величины приложенной нагрузки при использовании различных вариантов ГНС.

Сначала рассмотрим случай использования полного квадратичного варианта ГНС.

Пусть  $\bar{P} = 0$ . Тогда первое уравнение системы (12) удовлетворяется при  $\bar{U} = -1$  или  $(1 + \bar{U})^2 + \bar{V}^2 = 1$ . Если  $\bar{U} = -1$ , то из второго уравнения следует, что  $\bar{V}^3 - \mu\bar{V} = \bar{Q}$ . Если  $(1 + \bar{U})^2 + \bar{V}^2 = 1$ , то из второго уравнения получим  $\bar{V} = \bar{Q}/(1 - \mu)$ .

На фиг. 4 цифрой 1 обозначены проекции кривой деформирования в пространстве  $\{\bar{U}, \bar{V}, \bar{Q}\}$  на плоскости  $\bar{V}, \bar{Q}$  и  $\bar{U}, \bar{V}$ . Она состоит из двух ветвей: кубической параболы и дуги окружности, причем из недеформированного положения движение точки 3 происходит по окружности до точки бифуркации B, которой соответствует величина нагрузки, определяемая из системы уравнений  $\bar{V}^3 - \mu\bar{V} = \bar{Q}$ ,  $\bar{V} = \bar{Q}/(1 - \mu)$ .

Решая ее, получаем  $\bar{Q} = 1 - \mu$ . Для этой точки  $\bar{U} = -1$  и элемент вырождается: при конечном значении нагрузки все узлы выстраиваются в одну линию. Следовательно, эта точка не имеет никакого физического смысла, т.е. является “искусственной” и обусловлена принятой математической моделью деформирования.

Рассмотрим более общий случай однопараметрического (простого) нагружения, когда  $\bar{P} \neq 0$ . Систему уравнений (12) можно решить, введя параметр  $q = \bar{Q}/\bar{V}$  и рассмотрев зависимости  $\bar{Q}(q)$ ,  $\bar{U}(q)$ ,  $\bar{V}(q)$  при условии  $\bar{P} = k\bar{Q}$ :

$$\bar{V}(q) = \pm \sqrt{\frac{(q + \mu)(q + \mu - 1)^2}{k^2 q^2 + (q + \mu - 1)^2}}$$

$$\bar{U}(q) = -1 + \frac{kq\bar{V}}{q + \mu - 1}, \quad \bar{Q}(q) = q\bar{V}(q)$$

Зависимости  $\bar{Q}(\bar{V})$ ,  $\bar{V}(\bar{U})$  для значений  $k = -1, -0.05, 0.05$  и  $1$  обозначены на фиг. 4 цифрами 2, 3, 4, 5 соответственно.

Из этих графиков видно, что в случае  $\bar{P} > 0$  величина  $\bar{Q}$  изменяется от 0 до  $\infty$ , тогда как при  $\bar{P} < 0$  величина  $\bar{Q}$  изменяется от 0 до некоторого  $\bar{Q}_{\max}$ , т.е. при  $\bar{Q} > \bar{Q}_{\max}$  равновесие невозможно.

При использовании неполного квадратичного варианта ГНС при  $\bar{P} = 0$  из первого уравнения системы (13) следует

$$\bar{U} = -\frac{\mu\bar{V}^2}{2 + (1 - \mu)\bar{V}^2}$$

На этой кривой деформирования точек бифуркации нет.

В случае  $\bar{P} \neq 0$  аналогично тому, как это сделано выше, полагая  $\bar{P} = k\bar{Q}$ , получаем

$$\bar{U}(2 + \bar{V}^2) + \mu\bar{V}^2(1 - \bar{U}) = k\bar{Q}$$

$$\bar{V}[1 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2 - \mu(1 - \bar{U})^2] = \bar{Q}$$

Исключая из них  $\bar{Q}$  и рассматривая  $\bar{V}$  как параметр, получим квадратное уравнение относительно  $\bar{U}$ :

$$k\bar{V}(1 - \mu)\bar{U}^2 + [2(k\bar{V}\mu - 1) - 1(1 - \mu)\bar{V}^2]\bar{U} + k\bar{V}(\bar{V}^2 + 1 - \mu) - \mu\bar{V}^2 = 0$$

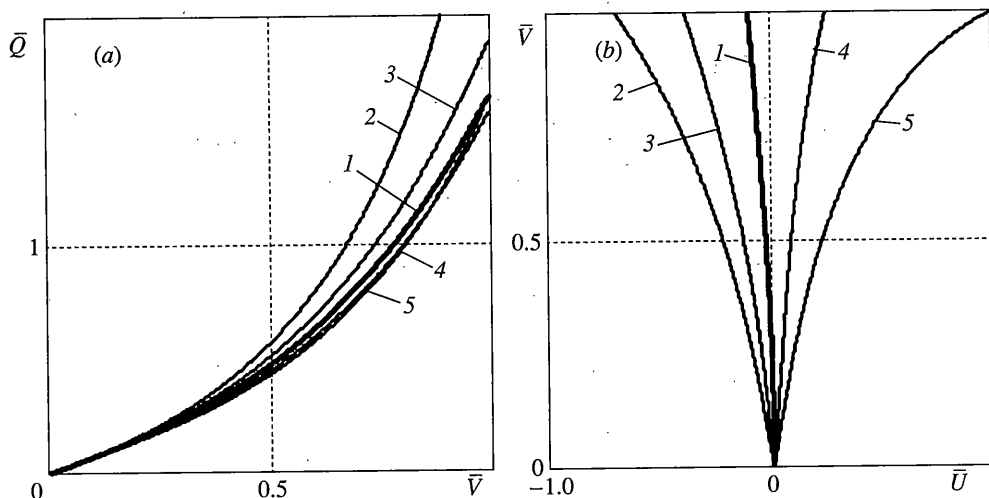
Зависимости  $\bar{Q}(\bar{V})$ ,  $\bar{V}(\bar{U})$  приведены на фиг. 5. Цифрой 1 обозначены кривые деформирования при  $k = 0$ , цифрами 2, 3, 4, 5 – для  $k = -1, -0.5, 0.5$  и  $1$  соответственно.

Из этих зависимостей следует, что при больших перемещениях квадратичные варианты ГНС дают значительную погрешность в определении НДС. Это можно показать на примере конечноэлементного расчета изгиба консольной полосы (фиг. 6).

Рассматривался изгиб полосы с параметрами  $L = 40$  см,  $h = 10$  см,  $t = 1$  см (толщина полосы),  $E = 10$  МПа,  $\mu = 0.3$ . На правом конце прикладывалась поперечная нагрузка  $P = 250$ Н. Конечноэлементная модель включала 80 элементов, 55 узлов (фиг. 6, а).

Методом непрерывного продолжения по наилучшему параметру [5, 6] определялись перемещения в зависимости от нагрузки и строились кривые безразмерных перемещений  $\bar{U} = U/L$ ,  $\bar{W} = W/L$  узла А от безразмерной нагрузки  $\bar{P} = PL^2/EI$ . Результаты расчета показаны на фиг. 6, б и 6, с. Расчеты проводились с использованием полного (кривые 1) и неполного (кривые 2) квадратичных вариантов геометрически нелиней-





Фиг. 5

ной теории. Точками показаны результаты расчетов деформирования полосы с использованием конечноэлементного комплекса NE/Nastran.

Как видно из этих зависимостей, в начале процесса деформирования при небольших значениях нагрузки и, соответственно, перемещений, кривые 1 и 2 практически совпадают. Затем, когда нагрузка достигает значения  $P_{\max}$  (при этом деформация  $\epsilon_x$  составляет  $\approx 30\%$ ), кривые 1 достигают предельной точки. При дальнейшем увеличении нагрузки деформирование развивается “в обратную сторону”. Этот факт объясняется тем, что находящиеся в состоянии сжатия элементы могут воспринимать поперечную нагрузку лишь до определенного значения; при ее дальнейшем увеличении, после прохождения кривой деформирования предельной точки, такие элементы “выворачиваются наизнанку”. На фиг. 6, с показаны несколько последовательных конфигураций элемента, выделенного штриховкой на фиг. 6, а, в состоянии сжатия. Как видно, после прохождения предельной точки, кривые 1 резко меняют свое направление относительно координатных осей графика, в то время как для кривых 2 нагрузка продолжает монотонно возрастать.

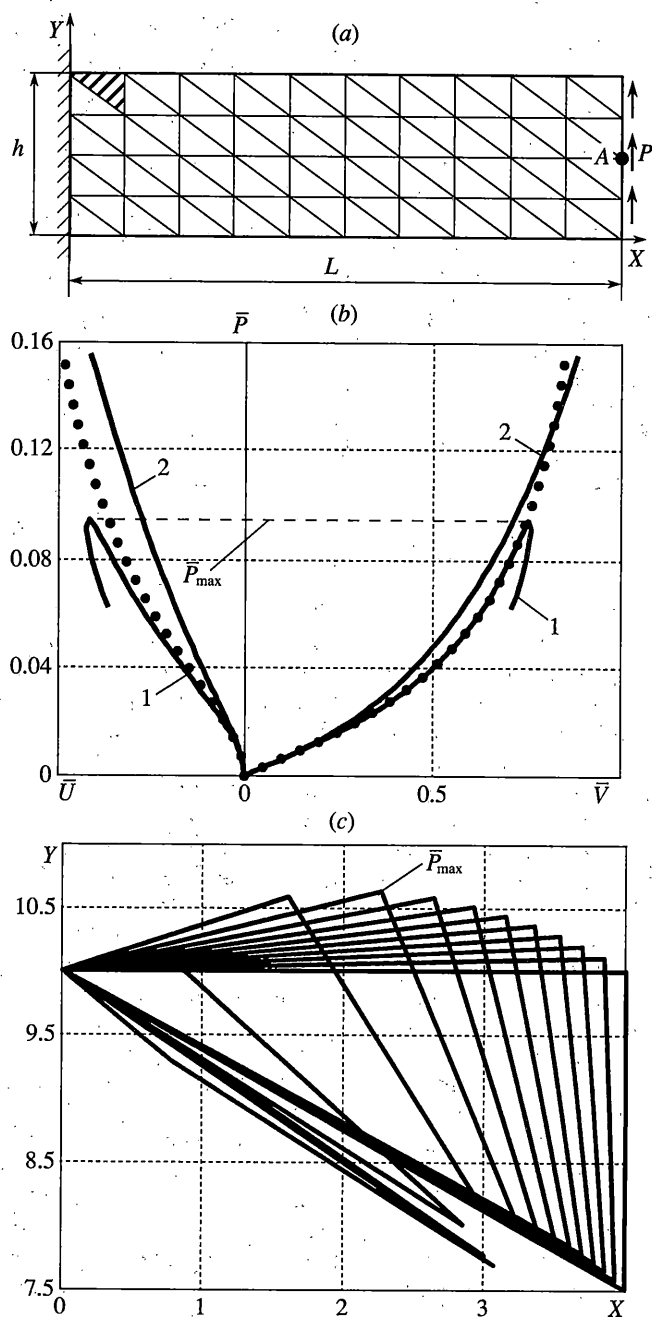
Отметим, что в случае действия силы, направленной в обратную сторону (вниз), эффект “обратного развития деформаций” для полного квадратичного варианта сохраняется при том же значении  $P_{\max}$ . При этом “выворачивается” левый нижний элемент.

На основании изложенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы.

В конечноэлементных расчетах деформирования гибких элементов конструкций необходимо учитывать перемещения элементов как жестких тел, причем эти перемещения (поступательные и вращательные) невозможно учесть за счет выбора функций формы, так как они определяются зависимостями “перемещения–деформации”;

Использование приближенных вариантов геометрически нелинейной теории может вносить в расчет значительную погрешность и сопровождаться такими явлениями, как появление “искусственных” точек бифуркации и расходимостью решения, причем это обусловлено не особенностью алгоритма поиска решения, а является методической погрешностью (погрешностью, заложенной в теорию).

При малых деформациях оба квадратичных варианта дают одинаковые результаты, однако при больших деформациях неполный квадратичный вариант дает значи-



Фиг. 6

тельную погрешность, в то время как полный квадратичный вариант позволяет получать сравнительно точные результаты, но до определенного предела.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Минобразования РФ (код проекта Т02-06.2-1937) и РФФИ (код проекта 03-01-000-71).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. *Донелл Л.Г.* Балки, пластины, оболочки. М.: Наука, 1982. 367 с.
4. *Шклярчук Ф.Н.* К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 140–146.
5. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.
6. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: “Эдиториал УРСС”, 1999. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.09.2003