МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. В.И. ГОРБАЧЕВ, В.А. СИМАКОВ

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ, НЕОДНОРОДНОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ

Рассматривается плита единичной толщины, ограниченная двумя параллельными лицевыми плоскостями и боковой поверхностью Σ, которая может быть построена при движении отрезка нормального к срединной плоскости Σ_0 вдоль контура Γ, лежащего в этой плоскости. Материал плиты – упругий, анизотропный и неоднородный. Плита находится в равновесии под действием нагрузок, распределенных на лицевых поверхностях, и нагрузок на боковой поверхности. Нагрузки на боковой поверхности сводятся к усилиям и моментам, приложенным к контуру срединного сечения. В предлагаемой работе развит метод решения упругой задачи для плиты (или бесконечного слоя), одинаково пригодный как для изотропной однородной или неоднородной плиты, так и для анизотропной однородной или неоднородной плиты. Метод основан на введении трех функций напряжений таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия и граничные условия на лицевых плоскостях. Сами функции напряжений находятся из решения интегродифференциального операторного уравнения. Ниже, с помощью операторного метода, получены точные (в смысле Сен-Венана) аналитические решения целого класса элементарных задач о равновесии плиты. Решения некоторых задач из этого класса были известны ранее. Кроме этого в работе найдено точное аналитическое решение задачи о сжатии неоднородной по толщине плиты полиномиальной нагрузкой.

1. Постановка задачи. Начало системы координат $Ox_1x_2x_3$ расположим на срединной плоскости плиты, а ось x_3 направим по нормали к ней. Условимся далее, что индексы из малых символов принимают значения 1, 2, 3, а из больших – только 1 и 2. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование в соответствующих пределах. Индекс после запятой обозначает производную по координате соответствующей значению индекса. Пусть $X_i(x_1, x_2, x_3)$ – компоненты вектора объемной нагрузки; $\overset{\pm}{q_i}(x_1, x_2)$ – компоненты вектора распределенных нагрузок на лицевых поверхностях $x_3 = \pm 1/2$.

Внутри области занятой плитой напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} + X_I = 0, \quad \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0 \tag{1.1}$$

точным граничным условиям на лицевых поверхностях

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1/2) = \pm \overset{\pm}{q_i}(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

а на боковой поверхности вместо точных граничных условий $\sigma_{iJ}n_J|_\Sigma = P_i^0$ принимаются интегральные условия вида:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{IJ}dx_3 n_J|_\Gamma = T_I^0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{3J}dx_3 n_J|_\Gamma = Q^0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} x_3\sigma_{IJ}dx_3 n_J|_\Gamma = M_I^0 \tag{1.3}$$

Кроме этого должны быть выполнены уравнения совместимости деформаций

$$\epsilon_{\alpha ik}\epsilon_{\beta jl}\varepsilon_{ij,kl} = 0 \quad \text{или} \quad \epsilon_{\alpha ik}\epsilon_{\beta jl}(J_{ijpq}\sigma_{pq})_{,kl} = 0 \tag{1.4}$$

где $\epsilon_{\alpha is}$ – символы Леви – Чивиты, $\Delta_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ – компоненты единичного тензора четвертого ранга [1], J_{ijkl} – компоненты тензора податливостей материала плиты, имеющего в общем случае анизотропии 21 независимую компоненту. Эти компоненты предполагаются интегрируемыми функциями координат x_1, x_2, x_3.

Пусть T_{IJ}, Q_I, M_{IJ} – внутренние силовые факторы, которые представляют из себя, соответственно, продольные усилия, перерезывающие силы и изгибающие моменты в срединной плоскости слоя, т.е.

$$\begin{gathered} T_{IJ}(x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)dx_3, \quad Q_I(x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{3I}(x_1, x_2, x_3)dx_3 \\ M_{IJ}(x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} x_3\sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)dx_3 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Предполагается, что величины T_{IJ}, Q_I, M_{IJ} являются известными функциями координат x_1, x_2. Однако эти функции не произвольны, а должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям в срединной поверхности Σ_0:

$$T_{IJ,J} + t_I(x) = 0, \quad Q_{J,J} + t_3(x) = 0, \quad M_{IJ,J} - Q_I + m_I(x) = 0 \quad (x(x_1, x_2) \in \Sigma_0) \tag{1.6}$$

и условиям на контуре Г:

$$T_{IJ}n_J|_\Gamma = T_I^0(y), \quad Q_Jn_J|_\Gamma = Q^0(y), \quad M_{IJ}n_J|_\Gamma = M_I^0(y) \; (y(y_1, y_2) \in \Gamma) \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} t_i(x_1, x_2) = q_i^+(x_1, x_2) + q_i^-(x_1, x_2) + \int_{-1/2}^{1/2} X_i(x_1, x_2, x_3)dx_3 \\ m_I(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[q_I^+(x_1, x_2) - q_I^-(x_1, x_2)] + \int_{-1/2}^{1/2} x_3X_I(x_1, x_2, x_3)dx_3 \\ T_I^0 = \int_{-1/2}^{1/2} P_I^0(y, x_3)dx_3, \quad Q^0 = \int_{-1/2}^{1/2} P_3^0(y, x_3)dx_3, \quad M_I^0 = \int_{-1/2}^{1/2} x_3P_I^0(y, x_3)dx_3 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $P_i^0(y_1, y_2, y_3)$ – реальные нагрузки на боковой поверхности плиты. Уравнения (1.6) получаются из уравнений равновесия, если последние умножить на x_3^k $(k = 0, 1)$, проинтегрировать по толщине плиты и воспользоваться граничными условиями (1.2). Условия (1.7) следуют из интегральных условий (1.3) и обозначений (1.5).

Таким образом задача заключается в том, чтобы найти поле напряжений σ_{ij}, удовлетворяющее внутри области занятой плитой уравнениям равновесия (1.1), на лицевых поверхностях – граничным условиям (1.2). Кроме этого напряжения должны удовлетворять интегральным условиям (1.5) при заданных T_{IJ}, Q_I, M_{IJ}, подчиняющихся уравнениям (1.6) и (1.7), а деформации должны удовлетворять уравнениям совместности (1.4).

Ясно, что задача (1.1)–(1.7) имеет не единственное решение. При этом два различных решения могут существенно различаться лишь в районе боковой границы плиты, где реальные нагрузки заменяются результирующими силами и моментами, приложенными к контуру срединной поверхности плиты.

Заметим, что внутренние силовые факторы, достаточно просто, могут быть найдены по теории пластин [2]. Более сложной проблемой является решение задачи теории упругости для плиты при точном удовлетворении граничным условиям на лицевых поверхностях и интегральном удовлетворении условиям на боковой поверхности. Особенно возрастают трудности в тех случаях, когда материал плиты является анизотропным [3], или неоднородным [4], или одновременно анизотропным и неоднородным. В литературе давно известны случаи, когда сведение исходной задачи к решению интегродифференциальных уравнений позволяет находить более быстрые способы решения конкретных задач МТТ [5].

2. Функции напряжений. Из уравнений равновесия выразим напряжения σ_{i3} через напряжения σ_{IJ}:

$$\sigma_{I3} = -\sigma^{(-1)}_{IJ,J} + r_I, \quad \sigma_{33} = \sigma^{(-2)}_{IJ,IJ} + r_3 \tag{2.1}$$

$$r_I = -X^{(-1)}_I - \bar{q}_I, \quad r_3 = X^{(-2)}_{I,I} - X^{(1)}_3 + (x_3 + 1/2)\bar{q}_{I,I} - \bar{q}_3 \tag{2.2}$$

$$\varphi^{(-n)}(x_3) \equiv \int\limits_{-1/2}^{x_3} dy_1 \int\limits_{-1/2}^{y} dy_2 \ldots dy_{n-1} \int\limits_{-1/2}^{y_{n-1}} \varphi(y)dy = \int\limits_{-1/2}^{x_3} \frac{(x_3 - y)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(y)dy \tag{2.3}$$

Напряжения (2.1) удовлетворяют граничным условиям на лицевых плоскостях плиты, если только выполнены уравнения (1.6). Введем три функции напряжений F_{11}, $F_{12} = F_{21}$, F_{22} и положим, что

$$\sigma_{IJ} = F_{IJ}, \quad \sigma_{I3} = -F^{(-1)}_{IJ,J} + r_I, \quad \sigma_{33} = F^{(-2)}_{IJ,IJ} + r_3 \tag{2.4}$$

Таким образом удается выразить шесть компонент тензора напряжений через три функции напряжений, удовлетворив при этом уравнениям равновесия и граничным условиям на лицевых поверхностях плиты. Интегральные граничные условия (1.3) будут выполнены, если внутренние силовые факторы удовлетворяют уравнениям (1.6), (1.7), а функции напряжений F_{IJ} таковы, что

$$\langle F_{IJ}(x_1, x_2, x_3)\rangle = T_{IJ}(x_1, x_2), \quad \langle x_3 F_{IJ}(x_1, x_2, x_3)\rangle = M_{IJ}(x_1, x_2) \tag{2.5}$$

Угловые скобки обозначают среднее значение функции по координате x_3, т.е.

$$\langle f(x_1, x_2, x_3)\rangle \equiv \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

3. Уравнения для функций напряжений. Из закона Гука по напряжениям (2.4) найдем деформации

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijKL}F_{KL} - 2J_{ijK3}F^{(-1)}_{KL,L} + J_{ij33}F^{(-2)}_{KL,KL} + 2J_{ijK3}r_K + J_{ij33}r_3 \tag{3.1}$$

Учитывая, что $\varepsilon_{33} = u_{3,3}$ и $\varepsilon_{I3} = (u_{I,3} + u_{3,I})/2$ из (3.1) найдем перемещения u_3 и u_I:

$$\begin{aligned} u_3 = {} & [J_{33KL}F_{KL} - 2J_{33K3}F^{(-1)}_{KL,L} + J_{3333}F^{(-2)}_{KL,KL}]^{(-1)} + \\ & + [2J_{33K3}r_K + J_{3333}r_3]^{(-1)} + f_3(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$
\begin{aligned}
u_I = {} & 2[J_{I3KL}F_{KL} - 2J_{I3K3}F^{(-1)}_{KL,L} + J_{I333}F^{(-2)}_{KL,KL}]^{(-1)} - \\
& -[J_{33KL}F_{KL} - 2J_{33K3}F^{(-1)}_{KL,L} + J_{3333}F^{(-2)}_{KL,KL}]^{(-2)}_{,I} + \\
& +2[2J_{I3K3}r_K + J_{I333}r_3]^{(-1)} - [2J_{33K3}r_K + J_{3333}r_3]^{(-2)}_{,I} - \\
& -x_3 f_{3,I}(x_1, x_2) + f_I(x_1, x_2)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

По перемещениям u_I из (3.3) найдем компоненты ε_{IJ} тензора деформаций и сравним то, что получилось, с выражениями для ε_{IJ} из (3.1). Далее из найденного соотношения выразим F_{IJ}. В результате для F_{IJ} получится операторное уравнение, в которое входят неизвестные функции $f_i(x_1, x_2)$. Эти функции найдем из условий (2.5), накладываемых на функции напряжений. Получим, что $f_i(x_1, x_2)$ должны быть таковы, чтобы

$$
\begin{aligned}
2\Delta_{IJKL} f_{K,L} = {} & \alpha^{-1}_{IJKL}\{\langle x_3^2 J^{-1}_{KLPQ}\rangle[T_{PQ} - \langle R_{PQ} + \mathbf{L}F_{PQ}\rangle] - \\
& -\langle x_3 J^{-1}_{KLPQ}\rangle[M_{PQ} - \langle x_3(R_{PQ} + \mathbf{L}F_{PQ})\rangle]\}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{3,IJ} = {} & \alpha^{-1}_{IJKL}\{\langle x_3 J^{-1}_{KLPQ}\rangle[T_{PQ} - \langle R_{PQ} + \mathbf{L}F_{PQ}\rangle] - \\
& -\langle J^{-1}_{KLPQ}\rangle[M_{PQ} - \langle x_3(R_{PQ} + \mathbf{L}F_{PQ})\rangle]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Здесь $\mathbf{L}$ – интегродифференциальный оператор

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}F_{IJ} \equiv \mathbf{L}(F_{IJ}) = {} & J^{-1}_{IJKL}\{2J_{KLP3}F^{(-1)}_{PQ,Q} - J_{KL33}F^{(-2)}_{PQ,PQ} + \\
& +2\Delta_{KLST}[J_{S3PQ}F_{PQ} - 2J_{S3P3}F^{(-1)}_{PQ,Q} + J_{S333}F^{(-2)}_{PQ,PQ}]^{(-1)}_{,T} - \\
& -[J_{33PQ}F_{PQ} - 2J_{33P3}F^{(-1)}_{PQ,Q} + J_{3333}F^{(-2)}_{PQ,PQ}]^{(-2)}_{,KL}\}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{IJ} = {} & J^{-1}_{IJKL}\{-(2J_{KLP3}r_P + J_{KL33}r_3) + \\
& +2\Delta_{KLST}(2J_{S3P3}r_P + J_{S333}r_3)^{(-1)}_{,T} - (2J_{33P3}r_P + J_{3333}r_3)^{(-2)}_{,KL}\}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\alpha_{IJKL} = \langle J^{-1}_{IJPQ}\rangle\langle x_3^2 J^{-1}_{PQKL}\rangle - \langle x_3 J^{-1}_{IJPQ}\rangle\langle x_3 J^{-1}_{PQKL}\rangle
\tag{3.8}
$$

Через J^{-1}_{IJKL} обозначены компоненты матрицы обратной к матрице J_{IJKL}, т.е.

$$
(J^{-1}_{IJKL}) = \begin{Vmatrix} J_{1111} & J_{1122} & J_{1112} \\ J_{2211} & J_{2222} & J_{2212} \\ J_{1211} & J_{1222} & J_{1212} \end{Vmatrix}^{-1}
$$

Оператор $\mathbf{L}$ линейный, т.е., если m и n константы, а f_1 и f_2 функции, то $\mathbf{L}(mf_1 + nf_2) = m\mathbf{L}(f_1) + n\mathbf{L}(f_2)$. Применение оператора $\mathbf{L}$ к произведению функций $\varphi_{IJ}(x_1, x_2, x_3)f(x_1, x_2)$ дает

$$
\mathbf{L}[\varphi_{IJ}(x_1, x_2, x_3)f(x_1, x_2)] = \mathbf{L}(\varphi_{IJ})f + \sum_{k=1}^{4} \mathbf{L}_{I_1\ldots I_k}(\varphi_{IJ})f_{,I_1\ldots I_k}
\tag{3.9}
$$

$$\mathbf{L}_{I_1}(\varphi_{IJ}) = 2J^{-1}_{IJKL}\Big\{J_{KLP3}\varphi^{(-1)}_{PI_1} - J_{KL33}\varphi^{(-2)}_{PI_1,P} - 2\Delta_{KLST}[J_{S3P3}\varphi^{(-1)}_{PI_1} - J_{S333}\varphi^{(-2)}_{PI_1,P}]^{(-1)}_{,T} +$$

$$+ [J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{PI_1} - J_{3333}\varphi^{(-2)}_{PI_1,P}]^{(-2)}_{,KL} + \Delta_{KLSI_1}[J_{S3PQ}\varphi_{PQ} - 2J_{S3P3}\varphi^{(-1)}_{PQ,Q} + J_{S333}\varphi^{(-2)}_{PQ,PQ}]^{(-1)} -$$

$$- \Delta_{KLSI_1}[J_{33PQ}\varphi_{PQ} - 2J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{PQ,Q} + J_{3333}\varphi^{(-2)}_{PQ,PQ}]^{(-2)}_{,S}\Big\} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2}(\varphi_{IJ}) = J^{-1}_{IJKL}\Big\{-J_{KL33}\varphi^{(-2)}_{I_1I_2} + 2\Delta_{KLST}[J_{S333}\varphi^{(-2)}_{I_1I_2}]^{(-1)}_{,T} - [J_{3333}\varphi^{(-2)}_{I_1I_2}]^{(-2)}_{,KL} -$$

$$-4\Delta_{KLST}[J_{S3P3}\varphi^{(-1)}_{PQ} + J_{S333}\varphi^{(-2)}_{PQ,P}]^{(-1)}\Delta_{QTI_1I_2} +$$

$$+4\Delta_{KLST}[J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{PQ} + J_{3333}\varphi^{(-2)}_{PQ,P}]^{(-2)}_{,S}\Delta_{QTI_1I_2} - \tag{3.11}$$

$$- \Delta_{KLI_1I_2}[J_{33PQ}\varphi_{PQ} - 2J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{PQ,Q} + J_{3333}\varphi^{(-2)}_{PQ,PQ}]^{(-2)}\Big\}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2I_3}(\varphi_{IJ}) = 2J^{-1}_{IJKL}\Big\{\Delta_{KLS\underline{I_1}}\Big[(J_{S333}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_2I_3}})^{(-1)} - (J_{3333}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_2I_3}})^{(-2)}_{,S}\Big] +$$

$$+ [J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{P\underline{I_1}} - J_{3333}\varphi^{(-2)}_{P\underline{I_1},P}]^{(-2)}\Delta_{KL\underline{I_2I_3}}\Big\} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2I_3I_4}(\varphi_{IJ}) = -J^{-1}_{IJ\underline{I_1I_2}}[J_{3333}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_3I_4}}]^{(-2)} \tag{3.13}$$

По подчеркнутым индексам подразумевается полная симметризация, например

$$f_iF_{\underline{jk}} = 1/3(f_iF_{jk} + f_kF_{ij} + f_jF_{ki}) \quad \text{при} \quad F_{jk} = F_{kj}$$

$$f_{\underline{ij}}F_{\underline{kl}} = 1/4(f_{ij}F_{kl} + f_{li}F_{jk} + f_{kl}F_{ij} + f_{jk}F_{li}) \quad \text{при} \quad f_{ij} = f_{ji}, \quad F_{kl} = F_{lk}$$

Если материал плиты неоднороден только по толщине, т.е. компоненты тензора податливостей являются функциями только координаты x_3 и при этом $\varphi_{IJ} = \varphi_{IJ}(x_3)$, тогда

$$\mathbf{L}(\varphi_{IJ}) = 0 \tag{3.14}$$

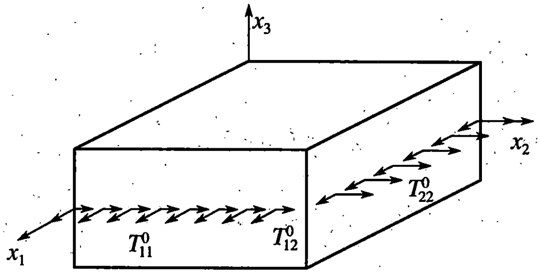
$$\mathbf{L}_{I_1}(\varphi_{IJ}) = 2J^{-1}_{IJKL}\{J_{KLP3}\varphi^{(-1)}_{PL_1} + \Delta_{KLSI_1}(J_{S3PQ}\varphi_{PQ})^{(-1)}\} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2}(\varphi_{IJ}) =$$

$$= J^{(-1)}_{IJKL}\Big\{-J_{KL33}\varphi^{(-2)}_{I_1I_2} - 4\Delta_{KLST}(J_{S3P3}\varphi^{(-1)}_{PQ})^{(-1)}\Delta_{QTI_1I_2} - \Delta_{KLI_1I_2}(J_{33PQ}\varphi_{PQ})^{(-2)}\Big\} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2I_3}(\varphi_{IJ}) = 2J^{-1}_{IJKL}\Big\{\Delta_{KLS\underline{I_1}}(J_{S333}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_2I_3}})^{(-1)} + (J_{33P3}\varphi^{(-1)}_{P\underline{I_1}})^{(-2)}\Delta_{KL\underline{I_2I_3}}\Big\} \tag{3.17}$$

$$\mathbf{L}_{I_1I_2I_3I_4}(\varphi_{IJ}) = -J^{-1}_{IJ\underline{I_1I_2}}(J_{3333}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_3I_4}})^{(-2)} \tag{3.18}$$



Фиг. 1

Окончательно операторное уравнение для функций напряжений F_{IJ} примет вид

$$F_{IJ} = F^0_{IJ} + \mathbf{AL}(F_{IJ}) \tag{3.19}$$

$$F^0_{IJ} = f_{IJKL}T_{KL} + g_{IJKL}M_{KL} + \mathbf{A}(R_{IJ})$$

где F^0_{IJ} – заданные функции координат x_1, x_2, x_3 определяемые функциональными зависимостями внешних нагрузок и внутренних силовых факторов от координат и функциональными зависимостями компонент тензора податливостей от координат, **A** – линейный оператор

$$\mathbf{A}(R_{IJ}) = R_{IJ} - f_{IJKL}\langle R_{KL}\rangle - g_{IJKL}\langle x_2 R_{KL}\rangle \tag{3.20}$$

Функции f_{IJKL} и g_{IJKL} выражаются через компоненты тензора податливостей следующим образом:

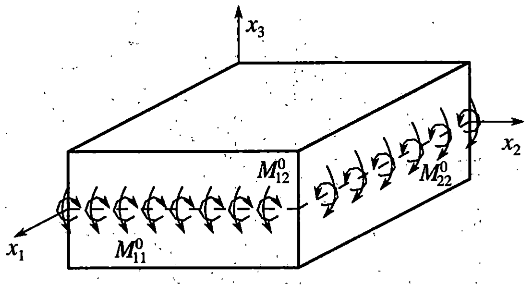
$$f_{IJKL} = \alpha^{-1}_{IJPQ}J^{-1}_{PQMN}[\langle x_3^2 J^{-1}_{MNKL}\rangle - x_3\langle x_3 J^{-1}_{MNKL}\rangle] \Rightarrow \langle f_{IJKL}\rangle = \Delta_{IJKL},\ \ \langle x_3 f_{IJKL}\rangle = 0 \tag{3.21}$$

$$g_{IJKL} = \alpha^{-1}_{IJPQ}J^{-1}_{PQMN}[x_3\langle J^{-1}_{MNKL}\rangle - \langle x_3 J^{-1}_{MNKL}\rangle] \Rightarrow \langle g_{IJKL}\rangle = 0,\ \ \langle x_3 f_{IJKL}\rangle = \Delta_{IJKL} \tag{3.22}$$

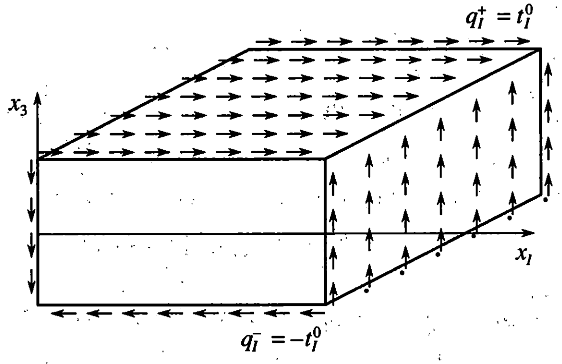
4. Класс элементарных задач о равновесии плиты. Оператор **L** является дифференциальным оператором по координатам x_1, x_2, поэтому для неоднородной по толщине плиты $\mathbf{L}F_{IJ}(x_3) \equiv 0$. Отсюда следует, что если плита неоднородна по толщине и $F^0_{IJ} = F^0_{IJ}(x_3)$, то решением операторного уравнения (3.19) будет функция $F_{IJ} = F^0_{IJ}(x_3)$. Этот случай сразу дает нам точное аналитическое решение целого класса элементарных задач о равновесии неоднородной по толщине анизотропной плиты. Решения четырех задач из этого класса приведены ниже.

4.1. Растяжение и сдвиг плиты силами, лежащими в ее срединной плоскости. Пусть лицевые поверхности прямоугольной плиты свободны от нагрузок, а на торцевых плоскостях действуют нагрузки, приводящиеся к одинаковым по величине и противоположно направленным постоянным усилиям T^0_{IJ}, распределенным вдоль границы срединной плоскости (фиг. 1). Таким образом плита растягивается усилиями T^0_{11} и T^0_{22}. Кроме этого плита сдвигается касательными усилиями $T^0_{12} = T^0_{21}$. В этом случае

$$F_{IJ} = F^0_{IJ} = f_{IJKL}(x_3)T^0_{KL} \Rightarrow \sigma_{IJ} = F_{IJ}, \quad \sigma_{i3} = 0 \tag{4.1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

4.2. Изгиб прямоугольной плиты моментами. Пусть на торцах пластины нагрузки статически эквивалентны постоянным изгибающим моментам M_{IJ}^0, равномерно распределенным вдоль граничного контура срединной плоскости (фиг. 2). В этом случае

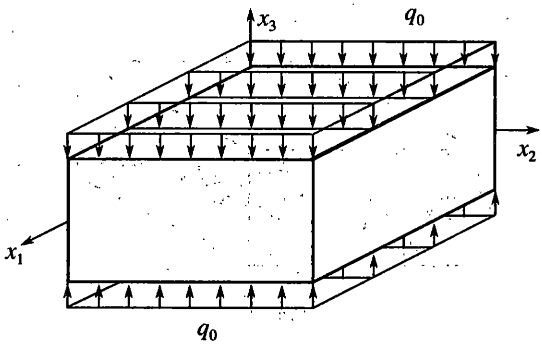
$$F_{IJ} = F_{IJ}^0 = g_{IJKL}(x_3)M_{KL}^0 \Rightarrow \sigma_{IJ} = F_{IJ}, \quad \sigma_{i3} = 0 \tag{4.2}$$

4.3. Сдвиг неоднородного по толщине анизотропного слоя. Прямоугольный слой (плита) деформируется равными по величине и противоположно направленными постоянными касательными нагрузками распределенными по лицевым и торцевым плоскостям (фиг. 3).

В этом случае $q_I^+ = t_I^0 = \text{const}$, $q_I^- = -t_I^0$. Из внутренних силовых факторов отличны от нуля только перерезывающие усилия, т.е. $T_{IJ} = 0$, $M_{IJ} = 0$, $Q_I = t_I^0$. Из (2.2) найдем $r_I = t_I^0$, $r_3 = 0$, а из (3.7) $R_{IJ} = -2J_{IJKL}^{-1}J_{KLP3}t_P^0$, следовательно

$$\begin{aligned} F_{IJ} &= -2[J_{IJKL}^{-1}J_{KLP3} - f_{IJKL}\langle J_{KLMN}^{-1}J_{MNP3}\rangle - g_{IJKL}\langle x_3 J_{KLMN}^{-1}J_{MNP3}\rangle]t_P^0 \\ \sigma_{IJ} &= F_{IJ}, \quad \sigma_{I3} = t_I^0, \quad \sigma_{33} = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.4. Поперечное сжатие (растяжение) неоднородного по толщине анизотропного слоя постоянной нагрузкой. В этой задаче предполагается, что все внешние нагрузки



Фиг. 4

нулевые, кроме равномерной сжимающей нагрузки величины q_0 на лицевых плоскостях, т.е. $q_3^+ = -q_0 = \text{const}$, $q_3^- = q_0$ (фиг. 4).

Очевидно, что все внутренние силовые факторы T, Q, M равны нулю. По формулам (2.2) и (3.7) найдем $r_I = 0$, $r_3 = -q_0$, $R_{IJ} = J^{-1}_{IJKL}J_{KL33}q_0$, следовательно

$$
\begin{aligned}
F_{IJ} &= [J^{-1}_{IJKL}J_{KL33} - f_{IJKL}\langle J^{-1}_{KLMN}J_{MN33}\rangle - g_{IJKL}\langle x_3 J^{-1}_{KLMN}J_{MN33}\rangle]q_0 \\
\sigma_{IJ} &= F_{IJ}, \quad \sigma_{I3} = 0, \quad \sigma_{33} = -q_0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

5. Поперечное сжатие (растяжение) плиты полиномиальной распределенной нагрузкой.

$$
q(x_1, x_2) = q_0 + q_I x_I + q_{IJ}x_I x_J + \ldots = q_0 + \sum_{n=1}^{N} q_{I_1\ldots I_n}x_{I_1}\ldots x_{I_n}
$$

В этом случае $X_i \equiv 0$, $q_1^{\pm} \equiv 0$, $q_2^- = q(x_1, x_2)$, $q_2^+ = -q(x_1, x_2)$. Очевидно, что $T \equiv 0$ и $M \equiv 0$. По формулам (2.2) и (3.7) найдем $r_I = 0$, $r_3 = -q(x_1, x_2)$:

$$
\begin{aligned}
R_{IJ} &= a_{IJ}q + a_{IJK}q_{,K} + a_{IJKL}q_{,KL} \\
a_{IJ} &= J^{-1}_{IJKL}[J_{KL33} - 2\Delta_{KLST}J^{(-1)}_{S333,\,T} + J^{(-2)}_{3333,\,KL}] \\
a_{IJK} &= -2J^{-1}_{IJSK}[J^{(-1)}_{S333} - J^{(-2)}_{3333,\,S}], \quad a_{IJKL} = J^{-1}_{IJKL}J^{(-2)}_{3333}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Отсюда и из (3.20) будем иметь

$$
F^0_{IJ} = \mathbf{A}(a_{IJ})q + \mathbf{A}(a_{IJK})q_{,K} + \mathbf{A}(a_{IJKL})q_{,KL}
\tag{5.2}
$$

Решение операторного уравнения (3.19) будем искать в виде суммы

$$
F_{IJ} = F^0_{IJ} + \sum_{n=0}^{N} \varphi_{IJI_1\ldots I_n}(x_1, x_2, x_3)q_{,I_1\ldots I_n}
\tag{5.3}
$$

Подставим (5.3) в уравнение (3.19) и воспользуемся правилом (3.9). В результате получим рекуррентные уравнения для неизвестных коэффициентов $\varphi_{IJI_1 \ldots I_n}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{IJ} &= \mathbf{AL}[\mathbf{A}(a_{IJ})] + \mathbf{AL}(\varphi_{IJ}) \\ \varphi_{IJI_1 \ldots I_n} &= \mathbf{AL}[\mathbf{A}(a_{IJI_1 \ldots I_n})] + \sum_{k=1}^{4} \mathbf{AL}_{\underline{I_1 \ldots I_k}}[\mathbf{A}(a_{IJ\underline{I_{k+1} \ldots I_n}}) + \varphi_{IJ\underline{I_{k+1} \ldots I_n}}] + \\ &+ \mathbf{AL}(\varphi_{IJI_1 \ldots I_n}) \quad \text{при} \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Если полоса неоднородна по ширине, то $\varphi_{IJI_1 \ldots I_n} = \varphi_{IJI_1 \ldots I_n}(x_3)$. В этом случае результат применения оператора $\mathbf{L}$ к функции, зависящей от x_3, равен нулю, поэтому вместо предыдущих уравнений получим следующие:

$$\begin{aligned} \varphi_{IJ} &= 0 \\ \varphi_{IJI_1 \ldots I_n} &= \sum_{k=1}^{4} \mathbf{AL}_{\underline{I_1 \ldots I_k}}[\mathbf{A}(a_{IJ\underline{I_{k+1} \ldots I_n}}) + \varphi_{IJ\underline{I_{k+1} \ldots I_n}}], \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.1. Случай изотропной плиты и квадратичного полинома $q(x_1, x_2) = q_0 + q_I x_I + q_{IJ} x_I x_J$. В этом случае

$$J_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E}\Delta_{ijkl}, \quad J^{-1}_{IJKL} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}\delta_{IJ}\delta_{KL} + \frac{E}{1+\nu}\Delta_{IJKL}$$

Коэффициенты a_{IJ}, a_{IJK}, a_{IJKL} представляются следующими формулами:

$$a_{IJ} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{IJ}, \quad a_{IJK} = 0$$

$$a_{IJKL} = \left[\frac{E\nu}{1-\nu}\delta_{IJ}\delta_{KL} + \frac{E}{1+\nu}\Delta_{IJKL}\right] \int_{-1/2}^{x_3} \frac{x_3 - y}{E(y)} dy$$

В случае изотропного, неоднородного по ширине материала операторы $\mathbf{L}_{I_1}$ и $\mathbf{L}_{I_1 I_2 I_3}$ – нулевые, а операторы $\mathbf{L}_{I_1 I_2}$ и $\mathbf{L}_{I_1 I_2 I_3 I_4}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{I_1 I_2}(\varphi_{IJ}) &= \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{IJ}\varphi^{(-2)}_{I_1 I_2} - 2J^{-1}_{IJST}\left[\frac{1+\nu}{E}\varphi^{(-1)}_{SQ}\right]^{(-1)}\Delta_{QTI_1 I_2} + J^{-1}_{IJI_1 I_2}\left[\frac{\nu}{E}\varphi_{PP}\right]^{(-2)} \\ \mathbf{L}_{I_1 I_2 I_3 I_4}(\varphi_{IJ}) &= -J^{-1}_{IJ\underline{I_1 I_2}}\left(\frac{1}{E}\varphi^{(-2)}_{\underline{I_3 I_4}}\right)^{(-2)} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из уравнений (5.5) видно, что не только $\varphi_{IJ} \equiv 0$, но и $\varphi_{IJI_1} \equiv 0$, а

$$\begin{aligned} \varphi_{IJI_1 I_2} &= \mathbf{AL}_{I_1 I_2}\mathbf{A}(a_{IJ}) = -\mathbf{AL}_{I_1 I_2}\left[\mathbf{A}\left(\delta_{IJ}\frac{\nu}{1-\nu}\right)\right] = -\mathbf{AL}_{I_1 I_2}(\delta_{IJ}A_1) = \\ &= L_1\delta_{IJ}\delta_{I_1 I_2} + L_2\Delta_{IJI_1 I_2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$L_1 = \frac{\nu}{1-\nu}\int_{-1/2}^{x_3}(x_3 - y)A_1(y)dy - \frac{2E\nu}{1-\nu^2}\left\{\int_{-1/2}^{x_3}\frac{1+\nu}{E}\int_{-1/2}^{y}A_1(z)dz - \int_{-1/2}^{x_3}\frac{\nu}{E}A_1(y)dy\right\}$$

$$L_2 = -\frac{2E}{1+\nu}\left\{\int\limits_{-1/2}^{x_3}\frac{1+\nu}{E}\int\limits_{-1/2}^{y}A_1(z)dz - \int\limits_{-1/2}^{x_3}\frac{\nu}{E}A_1(y)dy\right\}$$

$$A_1 = \frac{\nu}{1-\nu} - f_1(x_3)\left\langle\frac{\nu}{1-\nu}\right\rangle - g_1(x_3)\left\langle x_3\frac{\nu}{1-\nu}\right\rangle$$

$$f_1(x_3) = \frac{1}{\alpha_1}\frac{E(x_3)}{1-\nu(x_3)}\left[\left\langle\frac{x_3^2E}{1-\nu}\right\rangle - x_3\left\langle\frac{x_3E}{1-\nu}\right\rangle\right]$$

$$g_1(x_3) = \frac{1}{\alpha_1}\frac{E(x_3)}{1-\nu(x_3)}\left[x_3\left\langle\frac{E}{1-\nu}\right\rangle - \left\langle\frac{x_3E}{1-\nu}\right\rangle\right]$$

$$\alpha_1 = \left\langle\frac{E}{1-\nu}\right\rangle\left\langle\frac{x_3^2E}{1-\nu}\right\rangle - \left\langle\frac{x_3E}{1-\nu}\right\rangle^2$$

Функция напряжений в этой задаче примет вид

$$\begin{aligned} F_{IJ} &= F_{IJ}^0 + \varphi_{IJKL}q_{,KL} = \mathbf{A}(a_{IJ})q(x_1,x_2) + 2\mathbf{A}(a_{IJKL})q_{KL} + 2\varphi_{IJKL}q_{KL} = \\ &= \mathbf{A}(a_{IJ})q_0 + \mathbf{A}(a_{IJ})x_Kq_K + [\mathbf{A}(a_{IJ})x_Kx_L + 2\mathbf{A}(a_{IJKL}) + 2\varphi_{IJKL}]q_{KL} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Напряжения при сжатии плиты квадратичной нагрузкой будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} &\sigma_{IJ} = F_{IJ}, \quad \sigma_{I3} = -\int\limits_{-1/2}^{x_3}\mathbf{A}(a_{IJ})(y)dy\,(q_J + q_{JL}x_L) \\ &\sigma_{33} = -q_0 - q_Ix_I - q_{IJ}\left[x_Ix_J + \int\limits_{-1/2}^{x_3}(x_3-y)\mathbf{A}(a_{IJ})(y)dy\right] \end{aligned} \tag{5.9}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 223 с.
2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
3. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
4. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
5. *Ишлинский А.Ю.* Об одном интегродифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины // Укр. мат. ж. 1953. Т. 5. № 4. С. 370–374.

Москва

Поступила в редакцию
14.12.2002