МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. И.А. БРИГАДНОВ

ДВОЙСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

Исследуется вариационная задача предельного анализа нелинейно упругих тел, потенциалы которых имеет линейный рост по модулю тензора дисторсии. Формулируется двойственная задача предельного анализа, в рамках которой находится практически важная оценка снизу для предельной нагрузки – величины внешних сил, выше которой не существует никакой статически определенной деформированной конфигурации, устойчивой к конечным вариациям перемещения.

При помощи конечно-элементной аппроксимации двойственная задача предельного анализа сводится к задаче выпуклого программирования с линейными ограничениями-равенствами, которая решается стандартным методом условного градиента. Приводятся численные примеры, показывающие эффективность предлагаемого подхода.

1. Задача предельного анализа в нелинейной теории упругости. Пусть твердое тело в отсчетной (недеформированной) конфигурации занимает область $\Omega \subset R^3$. В актуальной (деформированной) конфигурации каждая точка $x = \{x_i\} \in \overline{\Omega}$ переходит в положение $X(x) = x + u(x) \in R^3$, где $u = \{u^\alpha\}$ – перемещение. Здесь и далее нижние латинские и верхние греческие индексы i, $\alpha = 1, 2, 3$ отвечают отсчетной и актуальной конфигурациям, соответственно, а также используется правило суммирования по повторяющимся индексам и обозначение $|Q| = (Q_i^\alpha Q_i^\alpha)^{1/2}$.

Рассматриваются обратимые и сохраняющие ориентацию отображения с градиентом (тензором дисторсии) $Q(X) = \nabla X : \Omega \to M^3$ такие, что $\det(Q) > 0$ в Ω, где ∇ – дифференциальный оператор набла в отсчетных координатах, $\det(Q)$ – определитель матрицы $Q \in M^3$, а M^3 – пространство вещественных матриц 3×3.

Конечная деформация твердого тела характеризуется энергетической парой (Q, Σ), где Σ – первый (несимметричный) тензор номинальных напряжений Пиола – Кирхгоффа [1–3]. Для абсолютного большинства упругих материалов существует скалярный потенциал Φ: $\Omega \times M^3 \to [0, +\infty)$ такой, что $\Phi(x, I) = 0$ и $\partial\Phi(x, Q)/\partial Q_i^\alpha = \Sigma_i^\alpha$ для любой $Q \in M^3$ и почти всех $x \in \Omega$, где I – единичная матрица. Для несжимаемых материалов $\det(Q) = 1$ и для сжимаемых $\Phi(x, Q) \to +\infty$, если $\det(Q) \to +0$, т.е. для сжатия объема в точку необходима бесконечная энергия [1, 3]. Далее рассматриваются однородные материалы с $\Phi = \mathrm{const}(x)$.

Пусть к телу прикладываются внешние воздействия: в Ω – массовая сила с плотностью f, на части границы Γ^2 – поверхностная сила с плотностью F, а оставшаяся часть границы $\Gamma^1 = \partial\Omega/\Gamma^2$ жестко закреплена, причем $\mathrm{area}(\Gamma^1) > 0$. Тогда под слабым решением краевой задачи эластостатики понимается перемещение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы [3, 4]:

$$
\begin{gathered}
u^* = \arg\inf\{J(u) : u \in V\}, \quad J(u) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\nabla u(x) + I)dx - A(u) \\
A(u) = \int\limits_{\Omega} \langle f, u\rangle dx + \int\limits_{\Gamma^2} \langle F, u\rangle d\gamma, \quad \langle g, u\rangle(x) = \int\limits_{0}^{u(x)} g^{\alpha}(x, v)dv^{\alpha}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $V = \{u\colon \overline{\Omega} \to R^3;\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых перемещений, $\langle *, u\rangle$ – удельная, а $A(u)$ – полная работа внешних сил на перемещении u.

Определение 1.1. Упругий материал обладает идеальным насыщением, если существуют постоянные $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что $\Phi(Q) \le C_0|Q|$ для любой матрицы $Q \in M^3$ с $\det(Q) = 1$ и $|\mathrm{Cof}\,Q| \le C_1$, где $\mathrm{Cof}\,Q \in M^3$ – матрица алгебраических дополнений матрицы Q.

В работах [5–12] доказано, что для упругих материалов с идеальным насыщением краевая задача (1.1) является математически некорректной, поскольку в ней может отсутствовать решение, устойчивое к конечным вариациям перемещения. С физической точки зрения этот эффект связан с существованием предельной нагрузки, т.е. с ограниченностью множества внешних сил, которым способно сопротивляться данное тело.

Существование предельной нагрузки является свойством самого материала[1] и связано с появлением поверхностей, вдоль которых происходит необратимое проскальзывание одних частей тела относительно других без образования полостей [8, 12]. Этот эффект характерен для многих практических задач нелинейной теории упругости, поскольку некоторые пористые резиноподобные материалы, работающие в жидкой среде, обладают свойством идеального насыщения [9–11]. Например, для заглушки из материала Бартенева – Хазановича [13], закрывающей отверстие в баке с жидкостью, всегда существует уровень давления, выше которого часть заглушки начинает выдавливаться наружу с ускорением, т.е. она перестает статически сопротивляться внешней нагрузке [5].

Оценка несущей способности нелинейно упругого тела из материала с идеальным насыщением сводится к нахождению предельного параметра нагружения $t_* > 0$ [5, 9–11] такого, что для любого $t \in (0, t_*)$ функционал

$$
J_t(u) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\nabla u(x) + I)dx - tA(u)
$$

ограничен снизу на множестве

$$
V = \{u \in W^{1,1}(\Omega, R^3) : u(x) = 0,\ x \in \Gamma^1\}
$$

Если $t_* < 1$, тогда при самых общих ограничениях на область и внешние мертвые силы $f \not\equiv 0$ или $F \not\equiv 0$ любая конфигурация тела, в том числе и отсчетная, будет неустойчива к конечным вариациям перемещения [5].

На практике достаточно знать оценку снизу для предельного параметра нагружения, поскольку именно по ней можно определить запас прочности отсчетной конфигурации нелинейно упругого тела [11].

[1] *Бригаднов И.А.* Математические методы исследования краевых задач теорий пластичности и нелинейности упругости. Диссертация на соискание доктора физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 1997. 224 с.

Утверждения 1.2. Для предельного параметра нагружения справедлива оценка снизу $t_* \geq t_- = \sqrt{3}\,\mu l_-$, где $\mu > 0$ – модуль малых сдвиговых деформаций, а параметр l_- находится в результате решения вариационной задачи предельного анализа

$$l_- = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u(x)|dx:\ u \in V_d,\ A(u) = 1\right\} \tag{1.2}$$

на множестве допустимых соленоидальных полей

$V_d = \{u \in V: \nabla \cdot u = 0$ почти всюду в $\Omega\}$

Доказательство. Упругие материалы с идеальным насыщением характеризуются потенциалами, для которых верна оценка снизу $\Phi(Q) \geq \sqrt{3}\,\mu|Q| + \text{const}$ [5–12]. Поэтому верна цепочка неравенств

$$\int_\Omega \Phi(\nabla u(x) + I)dx \geq \sqrt{3}\mu\int_\Omega |\nabla u(x)|dx + \text{const} \geq \sqrt{3}\mu l_{\inf} + \text{const}$$

для любой $u \in V$ с $A(u) = 1$, где $l_{\inf}$ – нижняя грань функционала (1.2) на множестве V [9–11]. Тогда для любого положительного $t \leq \sqrt{3}\,\mu l_{\inf}$ функционал $J_t(u)$ будет ограничен снизу на V.

В [6–9, 12] показано, что потеря глобальной устойчивости твердого тела из упругого материала с идеальным насыщением связана со сдвиговыми процессами, которые можно учесть в условии несжимаемости. В силу равенства $\det(C + I) = \text{tr}(C) + \text{tr}(\text{Cof}C) + 1$, где $\text{tr}(C)$ – след матрицы $C = Q - I$, условие несжимаемости $\det(Q) = 1$ выполняется с точностью до величин второго порядка малости при $\text{tr}(C) = 0$.

Нас интересует глобальная устойчивость отсчетной конфигурации, поэтому учет выпуклого условия соленоидальности $\text{tr}(\nabla u) = \nabla \cdot u = 0$ п.в. в Ω позволяет существенно улучшить оценку снизу для предельного параметра нагружения, предложенную в работах [9–11], качественно не усложняя задачу предельного анализа (1.2). Действительно, поскольку V_d является подмножеством V, предлагаемый параметр $l_- \geq l_{\inf}$. Утверждение доказано.

В [9–12] показано, что точная нижняя грань в задаче (1.2) достигается на векторном поле с разрывами типа проскальзывания, т.е. на более широком пространстве функций ограниченной вариации [14]. Поэтому была предложена частичная релаксация проблемы предельного анализа (1.2), основанная на специальной конечно-элементной аппроксимации, допускающей поля с разрывами типа проскальзывания. Однако негладкость релаксированного функционала существенно усложняет применение стандартных численных методов.

2. Двойственная задача предельного анализа. Построим задачу, двойственную к задаче предельного анализа (1.2), используя аппарат выпуклого анализа и теории двойственности [15, 16]. Для этого исходную минимизационную проблему (1.2) сформулируем как задачу поиска седловой точки в проблеме минимакса. Воспользовавшись соотношением $|Q| = \sup\{Q_i^\alpha \Sigma_i^\alpha : |\Sigma| \leq 1\}$, которое справедливо для любых матриц $Q, \Sigma \in M^3$, приходим к задаче

$$l_- = \inf\{\sup(L(u, \Sigma) : \Sigma \in V^*) : u \in V_d,\ A(u) = 1\}$$

$$L(u, \Sigma) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\cdot\Sigma(x)dx, \quad V^* = \{\Sigma \in W^{1,\infty}(\Omega, M^3) : |\Sigma| \leq 1\}$$

Здесь используется обозначение $Q\cdot\cdot\Sigma = Q_i^\alpha \Sigma_i^\alpha$ [1].

В силу выпуклости вариационной задачи (1.2) справедливо классическое равенство теории двойственности $\inf_u \sup_\Sigma L(u, \Sigma) = \sup_\Sigma \inf_u L(u, \Sigma)$ [15]:

$$l_- = \sup\{K(\Sigma) : \Sigma \in V^*\} \tag{2.1}$$

Двойственный функционал $K(\Sigma)$ легко вычисляется при помощи метода множителей Лагранжа [17] и интегрирования по частям

$$K(\Sigma) = \inf\{L(u, \Sigma) : u \in V_d,\ A(u) = 1\} =$$

$$= \lambda + \inf\left\{ \int_{\Gamma^2} [n \cdot (\Sigma + pI) - \lambda F] \cdot u d\gamma - \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\Sigma + pI) + \lambda f] \cdot u dx : u \in V \right\}$$

где n – вектор единичной нормали к границе Γ^2, а скалярная функция $p \in L^\infty(\Omega)$ и число $\lambda > 0$ – множители Лагранжа при условиях $\nabla \cdot u = 0$ в Ω и $A(u) = 1$, соответственно.

Для того, чтобы двойственный функционал $K(\Sigma)$ был собственным на V^* (т.е. $K \not\equiv -\infty$ [15]) необходимо, чтобы $p \equiv 0$ и $\Sigma = \lambda s$, где s принадлежит множеству допустимых тензоров [17]:

$$G = \{s \in W^{1,\infty}(\Omega, M^3) : \nabla \cdot s + f = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, n \cdot s = F \quad \text{на} \quad \Gamma^2\} \tag{2.2}$$

Тогда задача (2.1) принимает вид

$$l_- = \sup\{\lambda > 0 : \lambda \le |s|^{-1}, s \in G\}$$

Для допустимых тензоров можно корректно определить норму в пространстве непрерывных функций $\|s\|_0 = \max\{|s(x)| : x \in \Omega\} < \infty$ [18]. Поэтому верна формула $t_- = \sqrt{3}\,\mu/\tau$, где параметр τ находится в результате решения двойственной задачи предельного анализа

$$\tau = \inf\{\|s\|_0 : s \in G\} \tag{2.3}$$

Таким образом, оценка глобальной устойчивости отсчетной конфигурации твердого тела из упругого материала с идеальным насыщением сводится к нахождению минимального тензорного поля, уравновешивающего заданные внешние силы. Эта задача является вполне корректной, поскольку допустимые тензоры имеют девять независимых компонент, удовлетворяющих трем уравнениям равновесия, т.е. возможна минимизация по оставшимся независимым компонентам.

Известен аналогичный результат предельного анализа жестко-идеальнопластических тел [19], где нижняя оценка коэффициента запаса пластической прочности (статический коэффициент) находится в результате решения задачи, близкой (2.3). Принципиальное отличие задачи (2.3) состоит в том, что она решается на несимметричных тензорах номинальных напряжений Пиола – Кирхгоффа, тогда как расчет статического коэффициента производится на девиаторах истинных напряжений Коши [19, стр. 96].

Пример 2.1. Рассмотрим деформирование круглого стержня на испытательной машине жесткого типа в соответствии с классическими опытами Ривлина – Сондерса [20]. Осесимметричное деформирование стержня описывается следующими соотношениями в отсчетных приведенных (безразмерных) цилиндрических координатах (для четверти осевого сечения):

$$X(a\rho, \varphi, lz) = x(a\rho + ar(\rho, z), \varphi + \psi(\rho, z), lz + lw(\rho, z))$$

$$C(r, \psi, w) = \nabla u = \begin{pmatrix} \partial r/\partial\rho & (\rho + r)\partial\psi/\partial\rho & \eta^{-1}\partial w/\partial\rho \\ 0 & r/\rho & 0 \\ \eta\partial r/\partial z & \eta(\rho + r)\partial\psi/\partial z & \partial w/\partial z \end{pmatrix}$$

где $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in [0, 1]$, a и l – радиус сечения и полудлина стержня, соответственно, а параметр $\eta = a/l$. Использование такого описания исключает неоднозначность отображения при кинематическом кручении стержня [3, стр. 275].

Пусть стержень изготовлен из однородного изотропного сжимаемого материала с идеальным насыщением, описываемого потенциалом $\Phi(Q) = \sqrt{3}\,\mu(|Q| - |I|) + q(\det(Q))$, где неотрицательная функция сжимаемости q является непрерывной и сильно выпуклой, причем $\min\{q(s): s \in (0, +\infty)\} = q(1) = 0$ и $q(s) \to +\infty$ при $s \to +0$ или $s \to +\infty$ [1, 2].

На несжимаемых отображениях задача (1.1) принимает вид

$$(r^*, \psi^*, w^*) = \arg\inf\{J(r, \psi, w) : (r, \psi, w) \in V\} \tag{2.4}$$

$$J(r, \psi, w) = \frac{1}{\mu}\int_0^1\int_0^1 \Phi(C(r, \psi, w) + I)\rho d\rho dz - D_\varphi \psi(0, 1) - D_z w(0, 1)$$

$$V = \{(r, \psi, w) \in (W^{1,1}((0, 1) \times (0, 1)))^3 : r(0, z) = 0, \psi(\rho, 0) = 0$$
$$w(\rho, 0) = 0, \quad r(\rho, 1) = 0, \quad \psi(\rho, 1) = \psi(0, 1), \quad w(\rho, 1) = w(0, 1)\}$$

$$D_\varphi = M_z/(2\mu\pi a^2 l), \quad D_z = P_z/(2\mu\pi a^2)$$

где M_z и P_z – крутящий момент и продольная сила, приложенные к торцам стержня. Жесткое закрепление стержня в испытательной машине учтено в краевых условиях на торцах (в множестве V при $z = 1$).

Тогда на несжимаемых отображениях для функционала энергии очевидно верна оценка сверху

$$J(r, \psi, w) \le \sqrt{3}\int_0^1\int_0^1 |C(r, \psi, w)|\rho d\rho dz - D_\varphi \psi(0, 1) - D_z w(0, 1) \tag{2.5}$$

Возьмем $D_z = 0$ и последовательность допустимых перемещений, описывающих несжимаемое кручение стержня в рамках классической модели плоских сечений Сен-Венана [21]: $r_m \equiv 0$, $\psi_m \equiv mz$ и $w_m \equiv 0$, где m – угол кручения на единицу длины (крутка). Тогда из оценки (2.5), принимающей вид

$$J_m \le m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\eta - D_\varphi\right)$$

где $J_m = J(r_m, \psi_m, w_m)$, следует, что для $D_\varphi > D_\varphi^+ = \sqrt{3}\,\eta/2$ функционал энергии неограничен снизу на V, поскольку $J_m \to -\infty$ при $m \to +\infty$. Таким образом, величина D_φ^+ является оценкой сверху для предельного приведенного крутящегося момента. Она получена без учета осевых и радиальных деформаций, т.е. изменения длины стержня при $D_z = 0$ (эффекта Кельвина – Пойнтинга) [1, 20].

Теперь найдем оценку снизу для предельного приведенного крутящего момента, используя двойственную задачу предельного анализа (2.3).

Можно убедиться, что минимальную норму на множестве G имеет тензор с одной ненулевой компонентной $s_{z\varphi} = \text{const}$. Из соотношения на торцах стержня $M_z = aF_\varphi$, где $F_\varphi = \pi a^2 s_{z\varphi}$, находим $\tau = \|s\|_0 = 2\mu D_\varphi/\eta$. Из условия $t_- = 1$ получаем требуемую оценку $D_\varphi^- = \sqrt{3}\,\eta/2$. Сопоставляя полученные оценки, находим точное значение предельного приведенного крутящегося момента $D_\varphi^* = \sqrt{3}\,\eta/2$.

Проводя аналогичные рассуждения для случая $D_\varphi = 0$ и последовательности допустимых перемещений вида: $r_m \equiv \rho([1 + 2m(1 - z)]^{-1/2} - 1)$, $\psi_m \equiv 0$ и $w_m \equiv mz(1 - z)$, описывающих несжимаемое растяжение стержня, легко найти оценку сверху для предельной приведенной продольной силы $D_z^+ = \sqrt{3}/2$. Анализируя соответствующую двойственную задачу предельного анализа (2.3), находим оценку снизу $D_z^- = \sqrt{3}/2$. Таким образом, точное значение предельной приведенной продольной силы $D_z^* = \sqrt{3}/2$.

В [12] вариационная задача (2.4) исследована численно. Экспериментально установлено, что потеря глобальной устойчивости при растяжении связана с проскальзыванием материала вдоль торцов стержня наподобие мыльной пленки, при этом значение предельной приведенной продольной силы совпадает с полученным выше.

Для сложной области Ω и произвольных внешних сил (f, F) задачу (2.3) приходится решать численно.

3. Конечно-элементная аппроксимация двойственной задачи предельного анализа. Для области $\Omega \subset R^n$ ($n = 1, 2, 3$) строятся множества $\Omega_h = \cup T_h$ и $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ такие, что $|\Omega\backslash\Omega_h| \to 0$ и $|\Gamma\backslash\Gamma_h| \to 0$ для $h \to +0$ регулярным образом, где h – характерный шаг аппроксимации, а T_h – простейшие симплексы (отрезки, треугольники и тетраэдры для $n = 1, 2$, и 3, соответственно) [22]. Здесь и далее все множества открытые, а через $|U|$ обозначена соответствующая мера Лебега множества U. Каждая конечно-элементная аппроксимация характеризуется множеством узлов $\{x^k\}_{k=1}^m$.

Для допустимых тензоров используется стандартная кусочно-линейная непрерывная аппроксимация

$$s_h(x) = S^k \Psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

где $S_k = \{S_{ij}^k\} \in M^3$ – значение тензора $s = \{s_{ij}\}$ в узле x^k, $\Psi_k : \Omega_h \to R$ – линейная на каждом симплексе непрерывная скалярная функция формы такая, что $\Psi_k(x^r) = \delta_{kr}$ ($k, r = 1, 2, \dots, m$). Носитель базисной функции Ψ_k состоит из соседних симплексов с общей вершиной x^k.

Используются стандартные кусочно-линейные непрерывные аппроксимации внешних сил (f_h, F_h) и нормали n_h к границе Γ^2 [22]. Множество допустимых тензоров G аппроксимируется множеством

$$\begin{aligned} G_h = \{S^k \in M^3 : S^k \cdot \nabla\Psi_k(x) + f_h(x) &= 0,\ x \in \forall T_h \subset \Omega_h; \\ n_h(x^r) \cdot S^k\Psi_k(x^r) = F_h(x^r), &\quad x^r \in \Gamma_h^2\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

которое является симплексом, т.е. выпуклым множеством с линейными границами в пространстве глобальных переменных R^{9m}.

В результате двойственная задача предельного анализа (2.3) аппроксимируется задачей выпуклого программирования [23] с линейными ограничениями-равенствами, описывающими множество G_h,

$$\tau_h = \min\{\max(|S^k| : k = 1, 2, \dots, m) : S^k \in G_h\} \tag{3.2}$$

Если число конечных элементов равно m_1, а число узлов на Γ_h^2 равно m_2, тогда число свободных переменных в задаче (3.2) равно $9m - (3m_1 + m_2)$.

Целевая функция в задаче (3.2) представляет собой гиперконус в пространстве R^{9m}. Поэтому, в силу линейности ограничений в G_h эта задача эффективно решается методом условного градиента [23, 24].

4. Вычислительные эксперименты. Численно решалась двойственная задача предельного анализа (2.3) для случая чистого растяжения стержня из примера 2.1. В силу осевой симметрии область $\Omega \subset R^2$ представляет собой квадрат $(0, 1) \times (0, 1)$ в приведенных (безразмерных) цилиндрических координатах (ρ, z), а участок границы Γ^2 – правую сторону этого квадрата.

Предельная приведенная продольная сила оценивается снизу значением $D_z^- = \sqrt{3}/(2\tau)$, где параметр τ находится в результате решения двойственной задачи предельного анализа (2.3) на приведенном множестве допустимых тензоров

$$G = \{s \in W^{1,\infty}(\Omega, M^3) : \nabla \cdot s = 0, \ s_{\varphi\varphi} \equiv 0 \text{ в } \Omega, \ s_{zz} \equiv 1 \text{ на } \Gamma^2\} \tag{4.1}$$

с дифференциальным оператором ∇ в безразмерных цилиндрических координатах (ρ, φ, z).

В вычислительных экспериментах использовалась равномерная триангуляция единичного квадрата, стороны которого разбивались на N одинаковых отрезков. В результате задача выпуклого программирования (3.2) решалась для $9(N + 1)^2$ переменных, удовлетворяющих $2N^2 + N + 1$ ограничениям-равенствам.

Таблица

N	5	10	20	40	80
τ_h	2.56	2.02	1.76	1.04	1.01

В таблице приведены значения параметра τ_h для различных значений числа дроблений N. Видно, что с увеличением числа дроблений параметр τ_h монотонно стремится сверху к единице. Полученное значение полностью совпадает с аналитическим результатом, приведенным в примере 2.1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-15-99273-м).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
3. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
4. *Ball J.M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. № 4. P. 337–403.
5. *Бригаднов И.А.* О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 46–51.
6. *Бригаднов И.А.* О математической корректности краевых задач эластостатики для гиперупругих материалов // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 37–46.
7. *Brigadnov I.A.* Numerical methods in non-linear elasticity // Numerical Methods in Engineering. Chichester: Wiley, 1996. P. 158–163.
8. *Brigadnov I.A.* Discontinuous solutions and their finite element approximation in non-linear elasticity // Advanced Computational Methods in Engineering. Maastricht: Shaker Publishing B.V., 1998. P. 141–148.
9. *Brigadnov I.A.* The limited analysis in finite elasticity // Finite Volumes for Complex Applications II. Paris: Hermes Science Publ., 1999. P. 197–204.
10. *Brigadnov I.A.* The limited static load in finite elasticity // Constitutive Models for Rubber. Rotterdam: Balkema, 1999. P. 37–43.

11. *Бригаднов И.А.* Оценка несущей способности нелинейно упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 6–15.
12. *Бригаднов И.А.* Разрывные отображения и их аппроксимации в нелинейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 42–53.
13. *Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолек. соединения. 1960. Т. 2. № 1. С. 20–28.
14. *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
15. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
16. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
17. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 304 с.
18. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
19. *Каменярж Я.А.* Предельный анализ пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1997. 512 с.
20. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
21. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк. 1983. 352 с.
22. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
23. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 286 с.
24. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
20.07.2001