МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 531.36

© 2003 г. А.П. ИВАНОВ

О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ ПОКОЯ

Рассматривается плоское тело, покоящееся на шероховатой плоскости. Под действием внешних воздействий тело может начать скользить по плоскости или сохранить равновесие благодаря трению. Задача состоит в определении ускорений для заданной системы сил. Показано, что данная задача имеет единственное решение. Рассмотрен пример стержня с массами на концах.

Динамика систем с сухим трением рассматривалась ранее [1–5]. Были получены условия неподвижности тела для некоторых частных случаев [6–8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим тяжелое твердое тело, соприкасающееся с шероховатой горизонтальной плоскостью в точках некоторого множества D. Вид этого множества зависит от геометрии тела: в случае тонкой пластины оно имеет ту же форму, что и пластина, в случае шара D – круг, радиус которого можно определить по формулам контактной теории Герца, для "гантели" множество D состоит из двух точек и т.п. Во всех случаях будем считать, что множество D лежит на опорной плоскости, пренебрегая нормальными деформациями.

Сила сухого трения, действующая на элемент $dS \in D$, пропорциональна давлению p и направлена против вектора скорости $\mathbf{v}$ элемента, если этот элемент движется

$$d\mathbf{F} = -\mu p \frac{\mathbf{v}}{|v|} dS \quad \text{при} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \tag{1.1}$$

где μ – коэффициент трения.

Формула (1.1) неприменима, если скорость скольжения v равна нулю. Как показано в [4], данное обстоятельство не является серьезным препятствием для анализа, если точка, в которой $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, единственна. В частности, если тело представляет собой пластину без сосредоточенных масс, то главный вектор и главный момент сил трения относительно центра масс вычисляются по формулам

$$\mathbf{F} = -\mu \iint_D p \frac{\mathbf{v}}{|v|} dS, \quad M_F = -\mu \iint_D p \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|v|} dS \tag{1.2}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор текущей точки с началом в центре масс. Подынтегральная функция в формуле (1.2) ограничена и имеет разрыв в точке, где $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Поэтому интеграл (1.2) определен корректно.

В данной работе будем предполагать, что в начальный момент времени скольжение отсутствует во всех точках области контакта D. Задача состоит в определении движения под действием некоторой системы внешних сил: начнет ли тело скользить по плоскости и каким образом, или останется неподвижным. Очевидно, что в этом случае выражение (1.2) теряет смысл, поэтому для решения поставленной задачи требуется обобщить закон трения (1.1). Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{w}\Delta t$, получим

$$d\mathbf{F} = -\mu p \frac{\mathbf{w}}{|w|_t} dS \quad \text{при} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq \mathbf{0} \tag{1.3}$$

Соответственно изменяются и формулы (1.2):

$$\mathbf{F} = -\mu\iint_D p\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}dS, \quad M_F = -\mu\iint_D p\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}dS \tag{1.4}$$

В случае, если во всех точках области контакта выполнены равенства $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, для описания трения покоя используется неравенство

$$|d\mathbf{F}| \leq \mu p dS \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) недостаточно для определения распределения сил трения в области контакта в случае отсутствия скольжения, однако с его помощью можно получить условия неподвижности тела [6–8].

2. Уравнения движения и их анализ. Будем считать тело тонкой пластиной. Тогда форма и размеры области контакта D, а также распределение нормального давления в этой области неизменны. Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом на опорной плоскости с осью OZ, направленной по нормали в сторону тела. Уравнения движения под действием некоторой системы сил, параллельных опорной плоскости, имеют вид

$$m\ddot{x} = X + F_X, \quad m\ddot{y} = Y + F_Y, \quad I\ddot{\varphi} = M + M_F \tag{2.1}$$

где x, y, φ – координаты центра масс пластины и угла ее поворота, m, I – масса и центральный момент инерции, X, Y, M – компоненты главного вектора и главный центральный момент приложенных сил.

Пусть в начальный момент времени координаты x, y, φ и их производные по времени равны нулю. Выясним, при каких условиях пластина начнет движение, и какими будут при этом начальные ускорения.

Рассмотрим вначале частный случай $\ddot{\varphi}_0 = 0$, $\ddot{x}_0^2 + \ddot{y}_0^2 \neq 0$. Тогда в формулах (1.4) $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = (\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0)$, откуда

$$\begin{gathered} \mathbf{F} = -\mu\mathbf{e}_0\iint_D p dS = -\mu m g\mathbf{e}_0 \\ M_F = \mu\mathbf{e}_0\times\iint_D p dS = 0, \quad \mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{w}_0}{|\mathbf{w}_0|} \end{gathered} \tag{2.2}$$

где g – ускорение свободного падения.

Следовательно, в системе (2.1) получаем

$$(X, Y) = m(\mathbf{w}_0 + \mu g\mathbf{e}_0), \quad M = 0 \tag{2.3}$$

Данные соотношения показывают, что тело начинает скользить без вращения, если центральный момент внешних сил равен нулю, а их главный вектор по абсолютной величине не менее, чем произведение веса тела на коэффициент трения. Такая ситуация вполне аналогична задаче о начале скольжения материальной точки по шероховатой плоскости.

Перейдем к рассмотрению более сложного случая $\ddot{\varphi}_0 \neq 0$. Поскольку в начальный момент тело покоится, то осестремительное ускорение равно нулю, и ускорение произвольной точки тела складывается из ускорения полюса и вращательного ускорения:

$$\mathbf{w} = (\ddot{x}_0, \ddot{y}_0) + \ddot{\varphi}_0(-y, x) \tag{2.4}$$

Следовательно, в формулах (1.4):

$$(F_X, F_Y, M_F) = -\mu\iint\limits_D p\frac{(\ddot{x}-y\ddot{\varphi},\ \ddot{y}+x\ddot{\varphi},\ x\ddot{y}-y\ddot{x}+(x^2+y^2)\ddot{\varphi})}{((\ddot{x}-y\ddot{\varphi})^2+(\ddot{y}+x\ddot{\varphi})^2)^{1/2}}dS \tag{2.5}$$

Подставляя формулы (2.5) в уравнения (2.1), получаем довольно сложную нелинейную систему относительно $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и $\ddot{\varphi}$. С другой стороны, эта система задает в явном виде отображение Ф: ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$) $\to$ (X, Y, M):

$$\Phi(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}) = (m\ddot{x}, m\ddot{y}, I\ddot{\varphi}) - (F_X, F_Y, M_F) \tag{2.6}$$

Обращение отображения (2.6) возможно, если его матрица Якоби J невырождена. В этом случае для нахождения ускорений можно воспользоваться, например, итерационной процедурой ньютоновского типа.

Для проверки соотношения $|J| \neq 0$ удобно перейти к переменным $x_1 = -\ddot{y}/\ddot{\varphi}$, $y_1 = \ddot{x}/\ddot{\varphi}$, которые вследствие (2.4) представляют собой координаты мгновенного центра ускорений. Тогда

$$(X, Y, M) = (my_1, -mx_1, I)\ddot{\varphi} + \mu\,\mathrm{sign}\ddot{\varphi}\iint\limits_D \frac{(y_1-y,\ x_1-x,\ x(x-x_1)+y(y-y_1))}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{1/2}}pdS \tag{2.7}$$

В результате несложных, но громоздких расчетов получаем

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial(X, Y, M)}{\partial(x_1, y_1, \ddot{\varphi})}\right) &= m^2I((|\ddot{\varphi}| + \mu\langle(x-x_1)^2\rangle)(|\ddot{\varphi}| + \mu\langle(y-y_1)^2\rangle)) - \\ &- m^2I\mu^2\langle(x-x_1)(y-y_1)\rangle^2 + m^3\mu|\ddot{\varphi}|\langle(xy_1-yx_1)^2\rangle + \\ &+ m^3\mu^2((x_1^2+y_1^2)\langle(x-x_1)^2\rangle\langle(y-y_1)^2\rangle - 2x_1y_1\langle(x-x_1)(y-y_1)\rangle)\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\langle f(x, y)\rangle = \frac{1}{m}\iint\limits_D \frac{f(x, y)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{3/2}}pdS$$

Вследствие неравенства Коши – Буняковского, правая часть в выражении (2.8) всегда положительна, откуда и следует невырожденность отображения Ф в каждой из двух областей $\ddot{\varphi} > 0$ и $\ddot{\varphi} < 0$. Остается проверить, что образы этих областей не пересекаются. Для этого достаточно показать, что вследствие формул (2.5) момент сил трения по знаку противоположен $\ddot{\varphi}$. Переходя к переменным x_1, y_1, получим

$$M_F = -\mu\,\mathrm{sign}\ddot{\varphi}\iint\limits_D \frac{x(x-x_1)+y(y-y_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{1/2}}pdS \tag{2.9}$$

Не ограничивая общности, можно считать $x_1 > 0$, $y_1 = 0$, т.е. ось абсцисс проходит через мгновенный центр ускорений, а $\ddot{\varphi} > 0$. Дифференцируя формулу (2.9) по x_1, получаем

$$\frac{dM_F}{dx_1} = \mu\iint\limits_D \frac{x_1y^2}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{3/2}}pdS \tag{2.10}$$

Интеграл в правой части формулы (2.10) имеет тот же знак, что x_1, поэтому функция M_F достигает минимума (отрицательного) в точке $x_1 = 0$ и монотонно возрастает при $x_1 > 0$. При $x_1 \to +\infty$ подынтегральная функция в (2.9) допускает асимптотическое разложение

$$\frac{x(x-x_1)+y^2}{((x-x_1)^2+y^2)^{1/2}} = -x + \frac{y^2}{x_1} + O\left(\frac{1}{x_1^2}\right)$$

Так как начало координат совпадает с центром масс, то

$$\iint\limits_D xpdS = 0$$

откуда и получаем, что $M_F < 0$. Следовательно, величина $\ddot{\varphi}$ имеет тот же знак, что и момент M, т.е. образы двух регулярных ветвей отображения Φ не пересекаются. Таким образом, в области $\mathbb{R}^3\backslash(0, 0, 0)$ это отображение взаимно однозначно.

В точке $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$ (сцепление с опорой сохраняется) формулы (2.5) вырождаются, и отображение (2.6) не определено. Этой точке соответствует множество Ω таких комбинаций внешних сил (X, Y, M), которые недостаточны для сталкивания тела с места. Внешняя граница области Ω является внутренней границей для образа отображения (2.6). Для ее построения положим в формулах (2.6) ускорения бесконечно малыми, тогда

$$\partial\Omega\colon (X, Y, M) = -(F_X, F_Y, M_F) \tag{2.11}$$

где правые части определены в (2.5).

В формулах (2.10) переменные $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$ следует рассматривать не как ускорения (последние в граничном случае равны нулю), а как отвлеченные параметры, используемые для описания поверхности $\partial\Omega$. Если $\ddot{\varphi} = 0$, то $|w| = \mathrm{const}$, откуда $M = 0$, $X^2 + Y^2 = (\mu mg)^2$, что соответствует окружности трения. Если $\ddot{\varphi} \neq 0$, то можно вновь воспользоваться переменными x_1, y_1 в качестве координат на поверхности $\partial\Omega$, получая уравнения (2.7), в правой части которых сохранено только интегральное слагаемое.

Установим некоторые общие свойства множества Ω.

1. Множество Ω выпукло (данное свойство было установлено для частного случая в [8]). Действительно, если имеется два распределения F_1 и F_2, удовлетворяющих в каждой точке неравенству (1.5), то их выпуклая комбинация

$$\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2, \quad \lambda \in (0, 1)$$

также удовлетворяет этому неравенству. Остается воспользоваться линейностью формул (2.11).

2. Множество Ω симметрично относительно начала координат. Это видно из формулы (2.7): при изменении знака $\ddot{\varphi}$ без изменения x_1, y_1 левая часть изменяет значение на противоположное.

3. Если рассматриваемое тело обладает симметрией относительно плоскости XOZ, то Ω симметрична относительно YOZ. Действительно, полагая в формуле (2.7) $y \to -y$, $y_1 \to -y_1$, получим в левой части вектор ($-X$, Y, M). Заметим, что при наличии у тела двух плоскостей симметрии область Ω симметрична относительно всех координатных плоскостей, что было показано в [8].

4. В точках области Ω выполнены соотношения

$$X^2+Y^2 \le (\mu mg)^2, \quad M^2 \le r(X^2+Y^2), \quad r = \max_D(x^2+y^2)$$

Подытожим проведенный анализ.

Предложение. Задача об определении ускорений тяжелой тонкой пластины, покоящейся на плоскости с сухим трением, имеет единственное решение для любой плоской системы внешних сил. Точкам области Ω соответствует сохранение равновесия, а точкам вне этой области – начало скольжения. Во втором случае ускорения можно определить, обращая отображение (2.6).

3. Динамика стержня с массами на концах. В качестве примера рассмотрим двухмассовую систему, движение которой исследовалась ранее [4]. Две материальные точки массы m_1, m_2 соединены невесомым стержнем длины l. Пусть в начальный момент система покоится. Поместим начало координат в центр масс и направим ось абсцисс вдоль стержня, так что масса m_2 окажется в правой полуплоскости. Систему (2.1) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&(m_1+m_2)\ddot{x} = X-\mu g\ddot{x}(m_1/w_1+m_2/w_2)\\
&(m_1+m_2)\ddot{y} = Y-\mu g(m_1\ddot{y}_1/w_1+m_2\ddot{y}_2/w_2)\\
&I\ddot{\varphi} = M+\mu g(m_1\ddot{y}_1r_1/w_1-m_2\ddot{y}_2r_2/w_2), \quad w_j = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}_j^2}\\
&I = m_1r_1^2+m_2r_2^2, \quad r_1 = \frac{lm_2}{m_1+m_2}, \quad r_2 = \frac{lm_1}{m_1+m_2} \quad (j=1,2)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В формулах (3.1) $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_2$ обозначают соответствующие проекции ускорений каждой из масс, следовательно,

$$\ddot{y} = (r_2\ddot{y}_1+r_1\ddot{y}_2)/l, \quad \ddot{\varphi} = (\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)/l \tag{3.2}$$

Отображение (2.6) получим, выражая внешние силы из уравнений (3.1):

$$\begin{aligned}
&X = \ddot{x}(m_1+m_2+\mu g(m_1/w_1+m_2/w_2))\\
&Y = \mu g(m_1\ddot{y}_1/w_1+m_2\ddot{y}_2/w_2)+(m_1+m_2)\ddot{y}\\
&M = I\ddot{\varphi}-\mu g(m_1\ddot{y}_1r_1/w_1-m_2\ddot{y}_2r_2/w_2)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$ выражаются формулами (3.2).

Для определения области неподвижности Ω надо в формулах (3.3) считать ускорения бесконечно малыми:

$$\begin{aligned}
&X = \ddot{x}\mu g(m_1/w_1+m_2/w_2)\\
&Y = \mu g(m_1\ddot{y}_1/w_1+m_2\ddot{y}_2/w_2)\\
&M = -\mu g(m_1\ddot{y}_1r_1/w_1-m_2\ddot{y}_2r_2/w_2)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Отсюда при учете равенств $w_j^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}_j^2$ $(j = 1, 2)$ получаем уравнение граничной поверхности $\partial\Omega$ в виде

$$\begin{aligned}
&\pm X' = (m_1^2-((r_2Y'-M')/l)^2)^{1/2}+(m_2^2-((r_1Y'+M')/l)^2)^{1/2}\\
&X' = X/(\mu g), \quad Y' = Y/(\mu g), \quad M' = M/(\mu g)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для значений (X, Y, M) вне замкнутой поверхности (3.5) нелинейная относительно ускорений система (3.3) может быть решена итерационными методами. Например, для достаточно малых значений μ можно воспользоваться формулами

$$\ddot{x}^0 = X/(m_1 + m_2), \quad \ddot{y}_1^0 = Y/(m_1 + m_2) - r_1 M/I(m_1 + m_2)$$

$$\ddot{y}_2^0 = Y/(m_1 + m_2) + r_2 M/I$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}^{k+1} = X - \mu g \dot{x}^k (m_1/w_1 + m_2/w_2)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}^{k+1} = Y - \mu g (m_1 \dot{y}_1^k/w_1 + m_2 \dot{y}_2^k/w_2)$$

$$I\ddot{\varphi}^{k+1} = M + \mu g (m_1 \dot{y}_1^k r_1/w_1 + m_2 \dot{y}_2^k r_2/w_2) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00520).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Пожарицкий Г.К.* Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 558–563.
3. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
4. *Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. РАН. МТТ. 1980. № 4. С. 17–28.
5. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
6. *Жуковский Н.Е.* Условия равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. Т. 1. С. 339–354.
7. *Черноусько Ф.Л.* Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.
8. *Смышляев А.С., Черноусько Ф.Л.* Условия равновесия стержня на шероховатой плоскости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 177–182.

Москва

Поступила в редакцию
21.04.2003