

**О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА,
НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ,
ПОСРЕДСТВОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ**

В [1] на примере двойного маятника с линейными упруговязкими шарнирами, на который действует следящая сила показано, что воздействие на систему параметрического возбуждения позволяет при определенных условиях стабилизировать неустойчивое положение равновесия, возникающее при наличии в системе малой диссипации.

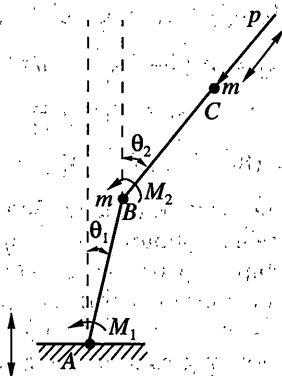
Воздействие на динамическую систему двух параметрических возбуждений приводит к резкому увеличению числа возможных параметрических резонансов и, в частности, возникновению резонансов кратности два [2].

В работе рассмотрены две задачи стабилизации равновесия маятника Циглера с помощью двух независимых параметрических возбуждений. В первой задаче частоты параметрических возбуждений соизмеримы с собственными частотами маятника. Рассмотрен случай комбинационного резонанса кратности равной двум. Показана возможность стабилизации равновесия маятника Циглера, а также найдены условия асимптотической устойчивости. Приводятся результаты численного моделирования. Во второй задаче стабилизация осуществляется с помощью двух высокочастотных возбуждений. Для решения этой задачи применяются результаты работы [3]. Показана возможность расширения области асимптотической устойчивости как при наличии одного из двух возбуждений, так и при их одновременном действии.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается двойной маятник, представляющий собой систему двух невесомых стержней AB и BC , каждый из которых имеет длину l (фиг. 1). Шарниры A , B обладают вязкоупругими свойствами, так что восстанавливающие моменты в них равны: $M_1 = -(a\theta_1 + b\dot{\theta}_1)$, $M_2 = -a(\theta_2 - \theta_1) - b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$. В шарнире B и на свободном конце C расположены две одинаковые массы m . На свободный конец C действует следящая сила P , имеющая как постоянную, так и малую переменную составляющую, изменяющуюся по гармоническому закону с частотой s : $P = P_0 + P_1 \cos st$.

Предположим, что конец A совершает гармоническое колебание вдоль оси y по закону $y = e \cos qt$. Уравнения движения маятника можно привести к виду

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}_1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \beta(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + r(2\theta_1 - \theta_2) - \\ - (p_0 + p_1 \cos \xi) \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\varepsilon \cos \tau \sin \theta_1 = 0 \\ 2\ddot{\theta}_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \beta(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + r(\theta_2 - \theta_1) + \varepsilon \cos \tau \sin \theta_2 = 0 \quad (1.1) \\ r = \frac{a}{ml^2 q^2}, \quad p_0 = \frac{P_0}{ml^2 q^2}, \quad \beta = \frac{b}{ml^2 q}, \quad p_1 = \frac{P_1}{ml^2 q^2}, \quad \varepsilon = e\Gamma^{-1} \ll 1, \quad \tau = qt, \quad \xi = st \end{aligned}$$



Фиг. 1

Уравнения движения допускают решение

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \quad (1.2)$$

устойчивость которого в дальнейшем и исследуется.

Как показано в [1] при отсутствии диссипации в шарнирах ($p_1 = 0, \varepsilon = 0, \beta = 0$) и при выполнении неравенства

$$p_0 < 2r \quad (1.3)$$

имеет место устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. Учет влияния диссипации в шарнирах ($\beta > 0$) дает условие асимптотической устойчивости

$$p_0 < 4/3r + 1/2\beta^2 \quad (1.4)$$

Если малая диссипация такова, что

$$4/3r + 1/2\beta^2 < p_0 < 2r \quad (1.5)$$

то возникающая в системе неустойчивость, как показано в [3], может быть стабилизирована введением параметрического возбуждения. В настоящей работе исследуется возможность стабилизации равновесия (1.2) при помощи двойного параметрического возбуждения: помимо вибрации основания учитывается изменение следящей силы. В дальнейшем предполагается, что параметры β, P_1 малы и имеют порядок $\varepsilon: \beta \sim \varepsilon, P_1 \sim \varepsilon$.

2. Параметрический резонанс. Для решения поставленной задачи линеаризуем уравнения (1.1) и перейдем к нормальным координатам $\theta_i, \dot{\theta}_i \rightarrow x_i, \dot{x}_i$ ($i = 1, 2$):

$$\theta_i = x_1 + x_2, \quad \theta_2 = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2, \quad \sigma_i = (3r - p_0 - \omega_i^2)/(2r - p_0) \quad (i = 1, 2)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= (\gamma_{11} \cos qt + \lambda_{11} \cos st)x_1 + (\gamma_{12} \cos qt + \lambda_{12} \cos st)x_2 + \delta_{11} \dot{x}_1 + \delta_{12} \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= (\gamma_{21} \cos qt + \lambda_{21} \cos st)x_1 + (\gamma_{22} \cos qt + \lambda_{22} \cos st)x_2 + \delta_{21} \dot{x}_1 + \delta_{22} \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{2}\varepsilon(g-4), \quad \gamma_{22} = -\frac{1}{2}\varepsilon(g+4), \quad \gamma_{21} = \frac{1}{2}\varepsilon p_0/h = -\gamma_{12} \\
\lambda_{11} &= p_1[1+(p_0-3r)/h], \quad \lambda_{22} = p_1[1-(p_0-3r)/h], \quad \lambda_{21} = p_1 r/h = -\lambda_{12} \\
\delta_{11} &= \beta(g-3), \quad \delta_{22} = -\beta(g+3), \quad \delta_{21} = p_0\beta/h = -\delta_{12} \\
h^2 &= (2r-p_0)(4r-p_0); \quad g = (8r-3p_0)/h, \quad \omega_{1,2}^2 = 3r-p_0 \mp h
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В исследуемой системе возможно возникновение большого количества параметрических резонансов, как однократных, например, $q = 2\omega_1$, $s = 2\omega_2$, $q = \omega_2 + \omega_1$, $s = \omega_2 - \omega_1$, так и имеющих кратность два, например, $(q = 2\omega_1, s = \omega_2 + \omega_1)$, $(q = \omega_2 + \omega_1, s = \omega_2 + \omega_1)$, $(q = 2\omega_1, s = 2\omega_2)$. Наибольший интерес представляет рассмотрение двукратных комбинационных резонансов $(q = \omega_2 - \omega_1, s = \omega_2 + \omega_1)$ и $(q = \omega_2 + \omega_1, s = \omega_2 - \omega_1)$, поскольку наличие следящей силы приводит к взаимодействию между нормальными координатами.

Для построения границ устойчивости приведем систему (2.1) к стандартному виду многочастотной системы, с последующим применением метода осреднения [4]. Сделаем замену переменных x_i , $\dot{x}_i \rightarrow z_i$, φ_i ($i = 1, 2$) по формулам $x_i = z_i \sin \varphi_i$, $\dot{x}_i = \omega_i z_i \cos \varphi_i$. Тогда система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \omega_1 - \delta_{11} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} \cos \psi_1 \sin^2 \varphi_1 + \frac{\lambda_{11}}{\omega_1} \cos \psi_2 \sin^2 \varphi_1 + \\
&+ \frac{\omega_2 \delta_{12} z_2}{\omega_1 z_1} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \frac{\gamma_{12} z_2}{\omega_1 z_1} \cos \psi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \frac{\lambda_{12} z_2}{\omega_1 z_1} \cos \psi_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \\
\dot{\varphi}_2 &= \omega_2 - \delta_{22} \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \frac{\gamma_{22}}{\omega_2} \cos \psi_1 \sin^2 \varphi_2 + \frac{\lambda_{22}}{\omega_2} \cos \psi_2 \sin^2 \varphi_2 + \\
&+ \frac{\omega_1 \delta_{21} z_1}{\omega_2 z_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{\gamma_{21} z_1}{\omega_2 z_2} \cos \psi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \frac{\lambda_{21} z_1}{\omega_2 z_2} \cos \psi_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \\
\dot{z}_1 &= \delta_{11} z_1 \cos^2 \varphi_1 + \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} z_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \frac{\lambda_{11}}{\omega_1} z_1 \cos \psi_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \\
&+ \frac{\omega_2}{\omega_1} \delta_{12} z_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \frac{\gamma_{12}}{\omega_1} z_2 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{\lambda_{12}}{\omega_1} z_2 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
\dot{z}_2 &= \delta_{22} z_2 \cos^2 \varphi_2 + \frac{\gamma_{22}}{\omega_2} z_2 \cos \psi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \frac{\lambda_{22}}{\omega_2} z_2 \cos \psi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \\
&+ \frac{\omega_1}{\omega_2} \delta_{21} z_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \frac{\gamma_{21}}{\omega_2} z_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \frac{\lambda_{21}}{\omega_2} z_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \\
\Psi_1 &= q, \quad \Psi_2 = s
\end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Комбинационный резонанс ($q = \omega_2 - \omega_1$, $s = \omega_2 + \omega_1$). Пусть частота параметрического возбуждения основания маятника $q = 1$. Тогда, с учетом выражений (2.2) для квадратов собственных частот получаем зависимость параметров p_0 , r от частоты параметрического возбуждения следящей силы s :

$$p_0 = \frac{1}{2}(s^2 - 2), \quad r = \frac{1}{4}(s^2 - 1) \tag{3.1}$$

Для положения равновесия (1.2) условие устойчивости (1.3) выполняется при всех s^2 , а условие (1.4) при $s^2 < 4 + 3\beta^2$. Исследуем возможность стабилизации равновесия

двойным параметрическим возбуждением в области (1.5) при $s^2 > 4 + 3\beta^2$. Введя расстройки $\Delta_1 = \omega_2 - \omega_1 - 1$, $\Delta_2 = \omega_2 + \omega_1 - s$ и делая замену переменных $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \rightarrow \theta_1, \theta_2$ по формулам $\theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - \psi_1$, $\theta_2 = \varphi_2 + \varphi_1 - \psi_2$, приведем систему уравнений (2.3) к виду, в котором резонансы устранены за счет увеличения числа медленных переменных. Не выписывая эту систему, отметим лишь, что быстрыми переменными являются θ_1, θ_2 . После осреднения по этим переменным, система уравнений для медленных переменных примет вид (обозначения для осредненных переменных остаются прежними):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \Delta_1 - \left(\frac{1}{\omega_2 z_2} + \frac{1}{\omega_1 z_1} \right) \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \cos \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \cos \theta_2 \right] \\ \dot{\theta}_2 &= \Delta_2 - \left(\frac{1}{\omega_2 z_2} - \frac{1}{\omega_1 z_1} \right) \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \cos \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \cos \theta_2 \right] \\ \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2} \beta (3 - g) z_1 + \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \sin \theta_1 - \frac{p_1 r}{4h} \sin \theta_2 \right] z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{2} \beta (3 + g) z_2 + \frac{1}{\omega_2} \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \sin \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \sin \theta_2 \right] z_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условием существования отличного от нуля стационарного решения для амплитуд z_1, z_2 служит равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при z_1, z_2 в третьем и четвертом уравнениях системы

$$16(g^2 - 9)r h^2 \beta^2 + (p_0 \varepsilon \sin \theta_1)^2 - (2p_1 r \sin \theta_2)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Для нахождения стационарного решения приравняем правые части системы (3.2) нулю

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \left(\frac{1}{\omega_2 z_2} + \frac{1}{\omega_1 z_1} \right) \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \cos \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \cos \theta_2 \right] &= 0 \\ \Delta_2 - \left(\frac{1}{\omega_2 z_2} - \frac{1}{\omega_1 z_1} \right) \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \cos \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \cos \theta_2 \right] &= 0 \\ -\frac{1}{2} \beta (3 - g) z_1 + \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \sin \theta_1 - \frac{p_1 r}{4h} \sin \theta_2 \right] z_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2} \beta (3 + g) z_2 + \frac{1}{\omega_2} \left[\frac{p_0 \varepsilon}{8h} \sin \theta_1 + \frac{p_1 r}{4h} \sin \theta_2 \right] z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из первого и второго уравнений системы (3.4) получим

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{\omega_1 (\Delta_1 + \Delta_2)}{\omega_2 (\Delta_1 - \Delta_2)} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) во второе и третье уравнения системы (3.4), приходим к системе уравнений (с учетом уравнения (3.3)):

$$\begin{aligned} 2p_1 r \sqrt{1 - u^2} + p_0 \varepsilon \sqrt{1 - v^2} - 4h \sqrt{r(\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2)} &= 0 \\ 2p_1 r u + p_0 \varepsilon v + 4(g - 3)\beta h \sqrt{r(\Delta_1 + \Delta_2)/(\Delta_1 - \Delta_2)} &= 0 \\ -(2p_1 r u)^2 + (p_0 \varepsilon v)^2 + 16r(g^2 - 9)h^2 \beta^2 &= 0 \\ v = \sin \theta_1, \quad u = \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Исключая из системы (3.6) переменные u и v , получим уравнение границы области устойчивости

$$\Delta_1^4 k_{14} + \Delta_2^4 k_{24} + \Delta_1^2 k_{12} + \Delta_2^2 k_{22} + \Delta_1^2 \Delta_2^2 k_{122} + \Delta_1 \Delta_2 k_{121} + k_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} k_{14} &= k_{24} = -256h^4 r^2, \quad k_{12} = 32h^2 r [p_0^2 \epsilon^2 + 4r(p_1^2 r - 4(g^2 + 9)h^2 \beta^2)] \\ k_{22} &= -32h^2 r [p_0^2 \epsilon^2 + 4r(p_1^2 r + 4(g^2 + 9)h^2 \beta^2)], \quad k_{122} = 512h^4 r^2 \\ k_{121} &= 6144g\beta^2 h^4 r^2, \quad k_0 = -[p_0^2 \epsilon^2 - 4r(p_1^2 r - 4(g^2 - 9)h^2 \beta^2)]^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.7), с учетом (2.2) и (3.1) будем иметь

$$\begin{aligned} &(\Delta_1^4 + \Delta_2^4)[-s^8 + 2s^6 - s^4] + \Delta_1^2[-2\beta^2 s^{10} + s^8 b_4 + s^6 b_3 + s^4 b_2 + s^2 b_1] + \\ &+ \Delta_2^2[-2\beta^2 s^{10} + s^8 c_4 + s^6 c_3 + s^4 c_2 + s^2 c_1] + \Delta_1 \Delta_2 \beta^2 [24s^9 - 72s^5 + 48s^3] + \\ &+ 2\Delta_1^2 \Delta_2^2 [s^8 - 2s^6 + s^4] + [-s^{12} \beta^4 + s^{10} a_5 + s^8 a_4 + s^6 a_3 + s^4 a_2 + s^2 a_1] + d = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$d = -1/16(p_1^2 + 16\beta^2 - 4\epsilon^2)^2$$

$$a_5 = 1/2 \beta^2 (p_1^2 + 24\beta^2 - \epsilon^2)$$

$$a_4 = -1/16 (p_1^4 + 64\beta^2 p_1^2 + 864\beta^4 - 2(p_1^2 + 40\beta^2)\epsilon^2 + \epsilon^4)$$

$$a_3 = 1/4 (p_1^4 + p_1^2(44\beta^2 - 3\epsilon^2) + 2(232\beta^4 - 37\beta^2\epsilon^2 + \epsilon^4))$$

$$a_2 = -1/8 (3p_1^4 + 112\beta^2 p_1^2 + 1032\beta^4 - (13p_1^2 + 256\beta^2)\epsilon^2 + 12\epsilon^4)$$

$$a_1 = 1/4 (p_1^2 + 16\beta^2 - 4\epsilon^2)(p_1^2 + 18\beta^2 - 2\epsilon^2)$$

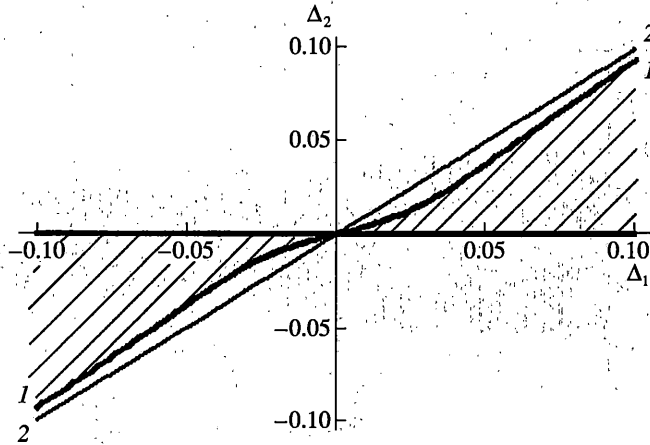
$$b_4 = 1/2 (p_1^2 - 44\beta^2 + \epsilon^2), \quad c_4 = -1/2 (p_1^2 + 44\beta^2 + \epsilon^2)$$

$$b_3 = -1/2 (3p_1^2 - 84\beta^2 + 5\epsilon^2), \quad c_3 = 1/2 (3p_1^2 + 84\beta^2 + 5\epsilon^2)$$

$$b_2 = 1/2 (2p_1^2 - 20\beta^2 + 8\epsilon^2), \quad c_2 = -1/2 (3p_1^2 + 20\beta^2 + 8\epsilon^2)$$

$$b_1 = -1/2 (p_1^2 + 16\beta^2 + 4\epsilon^2), \quad c_1 = 1/2 (p_1^2 - 16\beta^2 + 4\epsilon^2)$$

Исследуем эффект стабилизации положения равновесия. Область устойчивости данного двукратного комбинационного резонанса определяется тремя параметрами: s , $\Delta_1 \sim \epsilon$, $\Delta_2 \sim \epsilon$. Как показано выше, эффект стабилизации возможен при $s^2 > 4 + 3\beta^2$. В качестве примера выберем значения параметров ϵ , β , p_1 : $\epsilon = p_1 = 0.05$, $\beta = 0.01$, $s^2 = 6$. Тогда зависимость расстройки Δ_2 от расстройки Δ_1 для границы области устойчивости, задаваемая уравнением (3.9), изображена на фиг. 2. Зависимость имеет две ветви. Область асимптотической устойчивости в первом приближении определяется ветвью 1 (область асимптотической устойчивости заштрихована). Численное решение линеаризованной системы (2.1) с выбранными выше параметрами, а также с учетом формул (3.1) для параметров p_0 , r подтверждает результаты, полученные аналитиче-



Фиг. 2

ски. Например, при расстройках $\Delta_1 = 0.02$, $\Delta_2 = 0$ внутри области асимптотической устойчивости решение системы (2.1) при начальных условиях

$$x_1(0) = x_2(0) = 0.1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \tag{3.10}$$

асимптотически стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ (фиг. 3). В случае отсутствия параметрических возбуждений ($\epsilon = p_1 = 0$) и начальных условиях (3.10) решение является неустойчивым (фиг. 4), что подтверждает наличие эффекта стабилизации.

Вне области устойчивости, при расстройках $\Delta_1 = 0.02$, $\Delta_2 = 0.02$ и начальных условиях (3.10) численное интегрирование дает расходящееся решение при $t \rightarrow \infty$ (фиг. 5). Значение расстройки $\Delta_2 = 0.00975$ на границе области устойчивости при $\Delta_1 = 0.02$, полученное в численном эксперименте с высокой точностью совпало со значением, полученным аналитически.

4. Редукция к системе с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} + \epsilon D \dot{y} + \epsilon \Lambda_0 y + \epsilon \tilde{\Lambda}_1(\tau) y = 0 \tag{4.1}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, D, Λ_0 – постоянные матрицы, $\epsilon \ll 1$, $\tilde{\Lambda}_1(\tau)$ – матрица с дважды непрерывно дифференцируемыми и ограниченными при $\tau \geq 0$ элементами и с нулевым средним значением

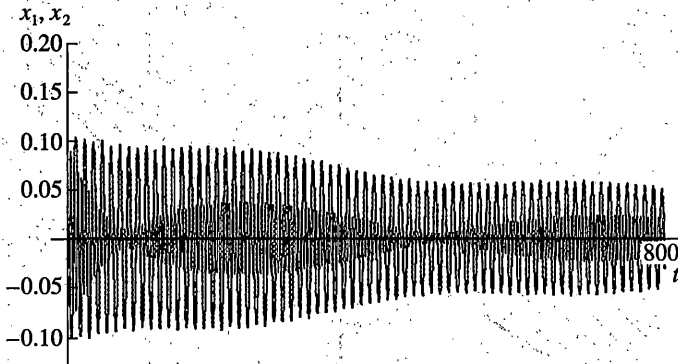
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\Lambda}_1(\tau) d\tau = 0$$

Введем переменную $\alpha = (y, \epsilon^{-1/2} \dot{y})^T \in \mathbb{R}^{2n}$ систему запишем в виде

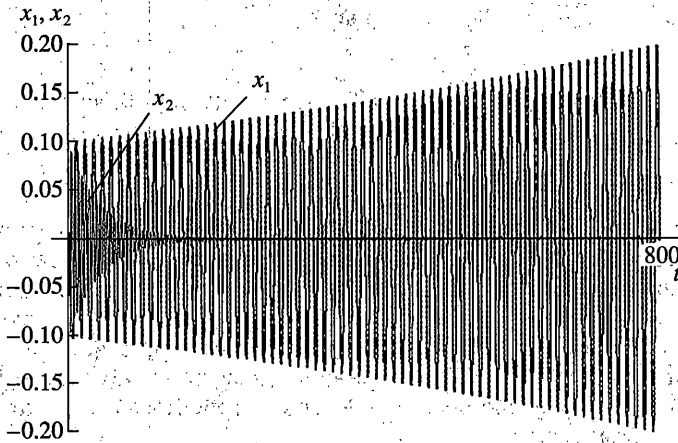
$$\dot{\alpha} = (\epsilon^{1/2} A + \epsilon A_0) \alpha$$

$$A = \begin{Bmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -D \end{Bmatrix}, \quad A_0 = \begin{Bmatrix} O_n & E_n \\ -\Lambda_0 - \tilde{\Lambda}_1(\tau) & O_n \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

где O_n, E_n – нулевая и единичная матрицы соответственно.



Фиг. 3



Фиг. 4

В системе (4.2) сделаем замену переменных $\alpha \rightarrow \beta \in \mathbb{R}^{2n}$, $\beta = (u, v)^T$, $u, v \in \mathbb{R}^n$:

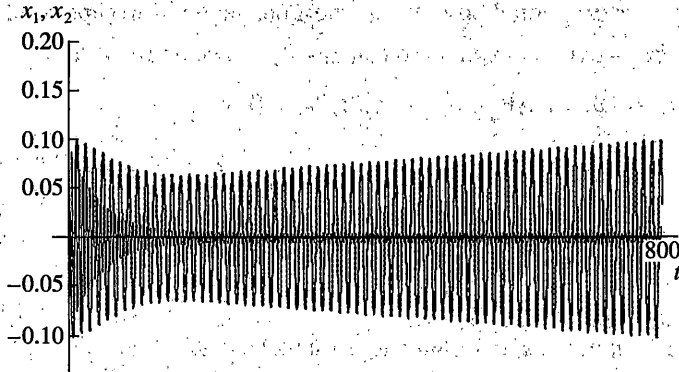
$$\alpha = (E_{2n} + \varepsilon^{1/2} X_1 + \varepsilon X_2 + \varepsilon^{3/2} X_3) \beta + O(\varepsilon^2) \quad (4.3)$$

чтобы преобразовать ее к виду

$$\dot{\beta} = (\varepsilon^{1/2} M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2} M_3) \beta + O(\varepsilon^2) \quad (4.4)$$

Матрицы в (4.3) и (4.4) неизвестные и подлежат определению, причем M_1, M_2, M_3 – постоянные. Подставляя (4.3) в (4.2), получим уравнение для переменной β . Приравняв матрицы при $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$ в этом уравнении и уравнении (4.4), получим систему матричных уравнений для X_1, X_2, X_3 :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A - M_1 \\ \dot{X}_2 &= A_0 + AX_1 - X_1A + X_1\dot{X}_1 - M_2 \\ \dot{X}_3 &= A_0X_1 - X_1A_0 + AX_2 - X_1AX_1 + X_1\dot{X}_2 + (X_1^2 - X_2)M_1 - M_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$



Фиг. 5

Матрицы M_1, M_2, M_3 находятся из условия отсутствия секулярных членов в X_1, X_2, X_3 . Опуская вычисления, приведем выражения для M_1, M_2, M_3 :

$$M_1 = \begin{vmatrix} O_n & E_n \\ -\Lambda_0 & O_n \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -D \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} O_n & O_n \\ -S & O_n \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\Lambda_1(\tau))^2 d\tau \quad (4.7)$$

Предполагается, что предел (4.7) существует и конечен. Подставляя выражения для матриц M_1, M_2, M_3 (4.6) в (4.4) и исключая переменную v , получим уравнение для $u \in \mathcal{R}^n$:

$$\ddot{u} + \varepsilon D \dot{u} + \varepsilon \Lambda_0 u + \varepsilon^2 S u = 0 \quad (4.8)$$

В (4.8) члены порядка $O(\varepsilon^3)$ отброшены. Наличие последнего слагаемого может расширить область устойчивости системы (4.1) при отсутствии возбуждения $\Lambda_1(\tau) \equiv 0$.

5. Стабилизация равновесия маятника Циглера двумя высокочастотными вибрациями. Применим изложенный в п. 4 подход к анализу стабилизации равновесия маятника Циглера. Вибрация основания описывается функцией $y = e \xi_0(\omega_1 t)$, а величина следящей силы изменяется по закону $p(t) = P_0 + \varepsilon_0 P_1(\omega_2 t)$, $P_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Уравнения движения маятника с учетом вязкоупругих свойств шарниров имеют вид

$$\begin{aligned} 2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + ml^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + 2a\theta_1 - a\theta_2 - \\ - (p_0 + \varepsilon_0 \dot{p}_1(\omega_2 t)) l \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mle \ddot{\xi}_0(\omega_1 t) \sin \theta_1 + 2b\theta_1 - b\theta_2 = 0 \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 + ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - ml^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \\ + a(\theta_2 - \theta_1) - mle \ddot{\xi}_0(\omega_1 t) \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Линеаризуя систему (5.1) в окрестности равновесия

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \quad (5.2)$$

приведем ее к безразмерной форме введением безразмерного времени $\tau = \omega_1 t$:

$$2\theta_1'' + \theta_2'' + 2\epsilon k\theta_1 - \epsilon k\theta_2 - \epsilon(p_0 + p_1''(\sigma\tau))(\theta_1 - \theta_2) - 2\epsilon\xi_0''(\tau)\theta_1 + 2\epsilon d\theta_1' - \epsilon d\theta_2' = 0$$

$$\theta_2'' + \theta_1' + \epsilon k\theta_2 - \epsilon k\theta_1 + \epsilon d(\theta_2' - \theta_1') - \epsilon\xi_0''(\tau)\theta_2 = 0$$

$$\epsilon = e\Gamma^{-1} \ll 1, \quad k = \frac{a}{mle\omega_1^2}, \quad d = \frac{b}{mle\omega_1}, \quad \sigma = \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx O(1), \quad p_0 = \frac{P_0}{me\omega_1^2}, \quad (5.3)$$

$$p_1''(\sigma\tau) = \frac{\epsilon_0 P_1''(\sigma\tau)}{me}$$

штрих обозначает производную по τ .

Уравнения (5.3) запишем в форме системы (4.1), где

$$D = d \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{vmatrix} 3k - p_0 & p_0 - 2k \\ p_0 - 4k & 3k - p_0 \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{vmatrix} -(2\xi_0(\tau) + p_1(\sigma\tau)) & \xi_0(\tau) + p_1(\sigma\tau) \\ 2\xi_0(\tau) + p_1(\sigma\tau) & -(2\xi_0(\tau) + p_1(\sigma\tau)) \end{vmatrix}, \quad y = (\theta_1, \theta_2)^T$$

Применяя процедуру редукции к системе с постоянными коэффициентами с заданной точностью, изложенную в п. 4, приведем уравнения (5.3) к системе (4.8), в которой матрица S имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} 6s_1 + \frac{7}{\sigma}s_3 + \frac{2}{\sigma^2}s_2 & -4s_1 - \frac{6}{\sigma}s_3 - \frac{2}{\sigma^2}s_2 \\ -8s_1 - \frac{8}{\sigma}s_3 - \frac{2}{\sigma^2}s_2 & 6s_1 + \frac{7}{\sigma}s_3 + \frac{2}{\sigma^2}s_2 \end{vmatrix}$$

$$s_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi_0^2(\tau) d\tau > 0, \quad s_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_1^2(\sigma\tau) d\tau > 0 \quad (5.5)$$

$$s_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi_0'(\tau) p_1(\sigma\tau) d\tau$$

Характеристическое уравнение системы (4.8), в котором матрицы D, Λ_0, S задаются выражениями (5.4), (5.5), имеет вид

$$\lambda^4 + \epsilon d \lambda^3 + \left[\epsilon^2 d^2 + 2\epsilon \left(3k - p_0 + \epsilon \left(6s_1 + \frac{7}{\sigma}s_3 + \frac{2}{\sigma^2}s_2 \right) \right) \right] \lambda^2 + 2\epsilon^2 d \left[k + \epsilon \left(2s_1 + \frac{1}{\sigma}s_3 \right) \right] \lambda + \epsilon^2 \left[k^2 + 2k\epsilon \left(2s_1 + \frac{1}{\sigma}s_3 \right) + \epsilon^2 \left(4s_1^2 + \frac{7}{\sigma^2}s_3^2 + \frac{4}{\sigma}s_1s_3 \right) \right] = 0 \quad (5.6)$$

Применяя к уравнению (5.6) критерий Рауса-Гурвица, получим условие асимптотической устойчивости

$$3\epsilon k d^2 + 8k^2 - 6k p_0 + 3\epsilon^2 d^2 \left(2s_1 + \frac{1}{\sigma}s_3 \right) + \epsilon k \left(32s_1 + \frac{40}{\sigma}s_3 + \frac{12}{\sigma^2}s_2 \right) + \epsilon^2 \left(32s_1^2 + \frac{32}{\sigma^2}s_3^2 + \frac{24}{\sigma^2}s_1s_2 + \frac{12}{\sigma^3}s_2s_3 + \frac{80}{\sigma}s_1s_3 \right) - 6\epsilon p_0 \left(2s_1 + \frac{1}{\sigma}s_3 \right) > 0 \quad (5.7)$$

Из неравенства (5.7) следует, что наличие двух параметрических возбуждений может стабилизировать положение равновесия (5.2), т.е. расширить область асимптотической устойчивости.

Рассмотрим два характерных частных случая. При отсутствии возмущения следящей силы параметры $s_1 > 0$, $s_2 = s_3 = 0$, а неравенство (5.7) принимает вид [3]: $p_0 < 4/3k + 1/2\epsilon d^2 + 1/2\epsilon s_1$, из которого следует, что вибрация основания расширяет область устойчивости. Аналогичный вывод можно сделать и при наличии только возмущения следящей силы. В этом случае $s_1 = s_3 = 0$, $s_2 > 0$. Неравенство (5.7) принимает вид $p_0 < 4/3k + 1/2\epsilon d^2 + 2\epsilon s_2 \sigma^{-2}$.

6. Выводы. Показано, что обнаруженный ранее в [1] эффект стабилизации неустойчивого положения равновесия маятника Циглера имеет место не только в случае однократного комбинационного резонанса, но и при комбинационном резонансе кратности равной двум. При одновременном действии двух высокочастотных параметрических возбуждений выявлена возможность стабилизации равновесия маятника Циглера, и получено ее условие.

Работа поддержана программой NATO Science Fellowship.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов С.А. Эффект стабилизации равновесия маятника Циглера параметрическим возбуждением // Изв. АН. МТТ. 1997. № 6. С. 36–40.
2. Челомей С.В., Щеглов Г.А. О динамической устойчивости прямого трубопровода нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости // Изв. АН. МТТ. 1998. № 6. С. 175–184.
3. Агафонов С.А. Стабилизация движения неконсервативных систем с помощью параметрического возбуждения // Изв. АН. МТТ. 1998. № 2. С. 199–202.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.04.2002