

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В последние годы заметный интерес проявляется к адаптивным упругим конструкциям, таким как космические антенны, радиотелескопы, интерферометры и космические станции, имеющие высокоточное оптическое и навигационное оборудование [1]. К таким конструкциям предъявляются требования сохранения с высокой точностью заданной формы и отсутствия колебаний в определенных частях, например, в местах расположения оптических приборов, при любых, часто неопределенных или случайных возмущениях. В таких случаях обеспечить заданную форму упругих конструкций и гашение их нестационарных колебаний можно с помощью системы управления. В качестве приводов в таких конструкциях могут быть использованы встроенные активные стержни с управляемыми деформациями [2]. Изменения длин активных стержней могут регулироваться системой управления за счет эффектов термоупругости, электроупругости или механически (гидроцилиндрами, винтовыми парами). Изменения длин таких стержней или соответствующих им сил могут рассматриваться в качестве управляющих воздействий. Кроме космических конструкций проблема гашения нестационарных колебаний представляет интерес для авиационных конструкций [3], и, в частности, для подкрыльевых подвесок [4], а также для амортизации кабин операторов машин, подвергающихся интенсивным вибрационным и ударным воздействиям.

В данной работе построена математическая модель и получены решения, позволяющие определять необходимые управляющие воздействия (силы и командные сигналы), для того чтобы часть упругой конструкции при производных нестационарных возмущениях сохраняла заданное движение или оставалась в покое. В качестве частного случая получено решение квазистатической задачи управления деформированной формой конструкции.

1. Численное определение управляющих сил при неполном управлении. Рассмотрим упругую управляемую систему (конструкцию), которая описывается вектором s обобщенных координат, находящуюся под воздействием внешних нагрузок и p управляющих воздействий ($p < s$). Задача состоит в следующем. Требуется, чтобы определенная часть конструкции, движение которой можно описать p обобщенными координатами, при колебаниях системы в целом совершала заданное движение или находилась в покое. Управление по части степеней свободы системы, число которых равно числу управляющих воздействий, будем называть неполным.

Для реализации такого управления необходимо выбрать элементы конструкции, на которые должны действовать управляющие силы, чтобы она была управляемой по заданным степеням свободы (обобщенным координатам). Затем необходимо определить требуемые для управления силы (законы их изменения по времени) при действии некоторых заданных возмущений. Далее по этим управляющим силам необходимо подобрать приводы, способные создавать такие силы и скорости их изменения. После

этого может быть спроектирована система управления с обратными связями и определены законы управления. В целом система должна быть адаптивной, чтобы кинематические условия управления выполнялись при произвольных квазистатических и нестационарных возмущениях, возможно, заранее неопределенных.

Уравнения колебаний упругой в общем случае неконсервативной системы получаются по методу конечных элементов с учетом управляющих сил и записываются в матричном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{Q}^0 + \mathbf{GZ}$$

$$\mathbf{q} = \{q_n\}_s, \quad \mathbf{Q}^0 = \{Q_n^0\}_s, \quad \mathbf{Z} = \{Z_i\}_p \quad (1.1)$$

$$\mathbf{M} = \|m_{mn}\|_{s \times s}, \quad \mathbf{D} = \|d_{mn}\|_{s \times s}, \quad \mathbf{K} = \|k_{mn}\|_{s \times s}, \quad \mathbf{B} = \|b_{mn}\|_{s \times s}, \quad \mathbf{G} = \|g_{mi}\|_{s \times p}$$

Здесь $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{Q}^0(t)$, $\mathbf{Z}(t)$ – векторы обобщенных координат, известных обобщенных сил и неизвестных управляющих сил, соответственно; \mathbf{M} , \mathbf{K} – симметричные матрицы инерции и жесткости упругой конструкции; \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{G} – постоянные действительные матрицы коэффициентов, представляющих неконсервативные и управляющие силы.

Кинематическое условие управления

$$\mathbf{Lq} = \mathbf{l}(t) \quad (1.2)$$

где \mathbf{L} – постоянная прямоугольная матрица порядка $p \times s$; \mathbf{l} – вектор порядка p , представляющий заданное движение (дрейф) части системы. Если необходимо, чтобы рассматриваемая часть системы при ее колебаниях находилась в покое, то следует положить $\mathbf{l} \equiv 0$.

Для удобства численного решения системы (1.1) с учетом кинематического условия (1.2) ее следует преобразовать к новым обобщенным координатам, так чтобы выделить p уравнений для p обобщенных координат, соответствующих управляющим силам. Обозначим вектор этих координат порядка p через $\mathbf{z}(t)$. Обобщенные координаты вектора \mathbf{z} выбираются так, чтобы скалярное произведение $\delta \mathbf{z}^T \mathbf{Z}$ представляло элементарную работу управляющих сил. Тогда (1.1) можно записать в виде системы двух матричных уравнений

$$\mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_x \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_x + \mathbf{B}_x) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_x^0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_z \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_z + \mathbf{B}_z) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_z^0 + \mathbf{Z}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x^0 \\ \mathbf{Q}_z^0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_z \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Здесь векторы \mathbf{z} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q}_z^0 имеют порядок p , а векторы \mathbf{x} и \mathbf{Q}_x^0 – порядок $s - p$; матрицы \mathbf{M}_z , \mathbf{K}_z , \mathbf{D}_z , \mathbf{B}_z имеют порядок $p \times s$, а матрицы \mathbf{M}_x , \mathbf{K}_x , \mathbf{D}_x , \mathbf{B}_x – порядок $(s - p) \times s$.

Если для управления системы используются стержни с регулируемыми длинами (деформациями), то обобщенные координаты $z_i(t)$ будут представлять регулируемые удлинения этих стержней, а $Z_i(t)$ – соответствующие растягивающие управляющие силы ($i = 1, 2, \dots, p$).

Объединим уравнения (1.3) и (1.2):

$$\mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_x \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_x + \mathbf{B}_x) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_x^0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{Lq} = \mathbf{l}(t)$$

Из этой системы можно найти вектор $\mathbf{q}(t)$ и затем из уравнения (1.4) – вектор $\mathbf{Z}(t)$.

Для решения динамической задачи управления нестационарными колебаниями системы, описываемой связанными дифференциальными и алгебраическими уравнениями (1.5), можно использовать два различных подхода.

1. Выбираем какие-либо p обобщенных координат, входящих в вектор \mathbf{q} , и, используя (1.2), выражаем их через остальные $s - p$ обобщенных координат. Затем выбранные p обобщенных координат можно исключить из числа неизвестных в уравнении (1.3). В результате будем иметь систему $s - p$ дифференциальных уравнений. После их интегрирования при заданных начальных условиях затем из уравнения (1.4) можно определить вектор управляющих сил $\mathbf{Z}(t)$.

2. Путем дифференцирования условия (1.2) систему (1.5) можно свести к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x + \mathbf{B}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x^0(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

после интегрирования которых при заданных начальных условиях для $\mathbf{q}(0)$ и $\dot{\mathbf{q}}(0)$ из уравнения (1.4) можно найти

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_z \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_z + \mathbf{B}_z) \mathbf{q} - \mathbf{Q}_z^0 \quad (1.7)$$

Для управления квазистатической деформированной формой при действии медленно меняющихся нагрузок можно положить $\ddot{\mathbf{q}} \approx \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} \approx \mathbf{0}$. Тогда из уравнения (1.1) найдем

$$\mathbf{q} = (\mathbf{K} + \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{Q}^0 + \mathbf{GZ}) \quad (1.8)$$

Уравнение (1.2) с учетом (1.8) записывается в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{K} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{GZ} = \mathbf{1} - \mathbf{L}(\mathbf{K} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}^0 \quad (1.9)$$

Откуда определяется вектор управляющих сил \mathbf{Z} . Из уравнения (1.9) следует, что упругая система при неполном управлении будет статически управляемой при условии

$$\det[\mathbf{L}(\mathbf{K} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{G}] \neq 0 \quad (1.10)$$

В случае, если движение управляемой конструкции описывается уравнениями (1.3), (1.4) с условием (1.2), то для квазистатической задачи из уравнений (1.5) и (1.4) получим

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x + \mathbf{B}_x \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x^0 \\ \mathbf{i} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{K}_z + \mathbf{B}_z) \mathbf{q} - \mathbf{Q}_z^0 \quad (1.11)$$

В данном случае система будет статически управляемой при условии

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x + \mathbf{B}_x \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (1.12)$$

Из уравнений (1.11) определяется деформированная форма конструкции (вектор \mathbf{q}) и вектор необходимых управляющих сил \mathbf{Z} для обеспечения условия $\mathbf{Lq} = \mathbf{1}$.

В случае упругих систем высокого порядка, какими обычно являются конечно-элементные расчетные модели, при численном интегрировании дифференциальных уравнений (1.6), необходимо использовать достаточно малый шаг интегрирования. При этом решение получается весьма трудоемким, а процесс расчета настолько мед-

ленным, что он может отставать от процесса колебаний реальной конструкции. Такое численное решение, если оно получается на бортовом компьютере, не может быть использовано для определения необходимых управляющих воздействий на каждом шаге реального времени, чтобы гасить колебания при действии заранее неизвестных и возможно случайных нестационарных возмущений. Кроме того, для больших упругих систем управляющие силы $Z_i(t)$ получаются быстроизменяющимися (содержат высокочастотные составляющие типа дрожания) и чтобы такие сигналы приближенно воспроизводить, они требуют сглаживания с помощью фильтров. Приближенные решения для управляющих сил можно получить более эффективно (менее трудоемко, более быстро и в сглаженной форме), если уравнения управляемой системы в обобщенных координатах преобразовать к уравнениям в нормальных координатах и ограничиться некоторым небольшим их числом, представляющих низшие собственные формы колебаний.

2. Решение уравнений в комплексных нормальных координатах. Считая в общем случае, что рассматриваемая система является неконсервативной, матричное уравнение (1.1) приведем к системе первого порядка в виде

$$\mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \left\| \begin{matrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{M}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{C}_0 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{D}' & \mathbf{K} + \mathbf{B} \\ -\mathbf{E}' & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

Далее решаются задачи о собственных значениях и векторах основной и сопряженной систем

$$[\lambda \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}_0] \mathbf{V} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda_m, \quad \mathbf{V}_m \quad (m = 1, 2, \dots, 2s)$$

$$[\lambda \mathbf{A}_0^T + \mathbf{C}_0^T] \mathbf{W} = \mathbf{0} \rightarrow \bar{\lambda}_n, \quad \mathbf{W}_n \quad (n = 1, 2, \dots, 2s)$$

Выполняются условия биортогональности

$$\bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_m = 0; \quad \bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{C}_0 \mathbf{V}_m = 0 \quad \text{при } m \neq n \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) ищется в виде

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{m=1}^{2s} f_m(t) \mathbf{V}_m \quad (2.3)$$

Тогда (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) преобразуется к комплексным нормальным координатам

$$\mu_n (\dot{f}_n - \lambda_n f_n) = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, 2s) \quad (2.4)$$

$$\mu_n = \bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_n, \quad F_n = F_n^0(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_{ni} Z_i \quad (2.5)$$

$$F_n^0 = \bar{\mathbf{W}}_n^T \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_n^T \left\| \begin{matrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = [\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{np}, 0 \dots 0]$$

Общее решение уравнения (2.4):

$$f_n = \frac{1}{\mu_n} \int_0^t F_n(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau + f_n(0) e^{\lambda_n t} \quad (2.6)$$

$$f_n(0) = \frac{1}{\mu_n} \bar{W}_n^T A_0 r(0)$$

где вектор $r(0)$ представляет заданные начальные условия для \dot{q} и q ; при нулевых начальных условиях $\dot{q}(0) = 0$, $q(0) = 0$ и $r(0) = 0$.

Условие (1.2) записывается в виде

$$\sum_{n=1}^{2s} \beta_{in} f_n(t) = l_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.7)$$

$$\left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\| V_n = [0 \dots 0 \mid \beta_{1n} \dots \beta_{pn}]^T \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) в (2.7), получим систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{2s} \beta_{in} \left\{ \frac{1}{\mu_n} \int_0^t F_n(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau + f_n(0) e^{\lambda_n t} \right\} = l_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.9)$$

Для решения системы интегральных уравнений (2.9) с учетом (2.5) можно использовать пошаговый метод. Введем постоянные интервалы (шаги) времени Δt , начиная от начала отсчета $t = 0$ до текущего момента $t = t_k = k\Delta t$. Рассмотрим интеграл

$$J_n(t_k) = \int_0^{t_k} F_n(\tau) e^{\lambda_n(t_k-\tau)} d\tau \quad (2.10)$$

Этот интеграл преобразуется к виду

$$J_n(t_k) = e^{\lambda_n \Delta t} J_n(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} F_n(\tau) e^{\lambda_n(t_k-\tau)} d\tau \quad (2.11)$$

На достаточно малом интервале $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ функцию $F_n(t)$ при вычислениях можно осреднять и считать постоянной ($F_n(t) \rightarrow F_n(t_k)$) или принять для нее линейный закон изменения ($F_n(t) = F_n(t_{k-1}) + [F_n(t_k) - F_n(t_{k-1})] (t - t_{k-1}) / \Delta t$). В случае использования постоянного значения $F_n(t) = F_n(t_k)$ на интервале $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ вместо (2.11) будем иметь

$$J_n(t_k) = e^{\lambda_n \Delta t} J_n(t_{k-1}) + F_n(t_k) \lambda_n^{-1} (e^{\lambda_n \Delta t} - 1) \quad (2.12)$$

$$F_n(t_k) = F_n^0(t_k) + \sum_{j=1}^p \alpha_{nj} Z_j(t_k) \quad (2.13)$$

Уравнения (2.9) при $t = t_k$ с учетом (2.12), (2.13) записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных управляющих сил $Z_1(t_k), \dots, Z_p(t_k)$

$$\sum_{j=1}^p c_{ij} Z_j(t_k) = l_i(t_k) - a_i(t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.14)$$

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{2s} \frac{\beta_{in} \alpha_{nj}}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \Delta t} - 1) \quad (2.15)$$

$$a_i(t_k) = \sum_{n=1}^{2s} \beta_{in} \left\{ \frac{1}{\mu_n} \left[e^{\lambda_n \Delta t} J_n(t_{k-1}) + \frac{1}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \Delta t} - 1) F_n^0(t_k) \right] + f_n(0) e^{\lambda_n t_k} \right\}$$

При вычислении коэффициентов (2.15) в суммах по n можно ограничиться небольшим числом членов, соответствующих низшим по модулю собственным значениям λ_n . В этом случае будут получаться "сглаженные" зависимости $Z_j(t)$.

После определения $Z_j(t_k)$ ($j = 1, \dots, p$) по формулам (2.13), (2.12) получаются $F_n(t_k)$ и $J_n(t_k)$, затем вычисляются коэффициенты $a_i(t_{k+1})$ и решается система (2.14) при $t = t_{k+1}$.

Этот алгоритм не требует хранения информации о действующих нагрузках и реакции системы на всех предыдущих от начала отсчета шагах.

Если внешние нагрузки (вектор $Q^0(t)$) являются неопределенными, то для текущего момента времени $t = t_k$ они могут быть вычислены приближенно по конечноразностным формулам через значения на нескольких предыдущих шагах с последующей коррекцией по данным прямых или косвенных измерений.

3. Определение управляющих сил для консервативной системы с малым демпфированием. В случае консервативной системы, находящейся под воздействием заданных и управляющих сил, уравнение (1.1) записывается в виде

$$M\dot{q} + Kq = Q^0 + GZ \quad (3.1)$$

Решается задача о собственных колебаниях

$$[-\omega^2 M + K]Y = 0 \rightarrow \omega_n^0, \quad Y_n \quad (n = 1, 2, \dots, s)$$

При этом выполняются условия ортогональности собственных форм колебаний

$$Y_m^T M Y_n = 0, \quad Y_m^T K Y_n = 0 \quad \text{при } m \neq n$$

Уравнение (3.1) преобразуется к нормальным координатам:

$$q(t) = \sum_{n=1}^s f_n(t) Y_n \quad (3.2)$$

$$m_n(\ddot{f}_n + \varepsilon_n \omega_n^0 \dot{f}_n + \omega_n^0 f_n) = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, s) \quad (3.3)$$

$$m_n = Y_n^T M Y_n, \quad F_n = F_n^0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{ni} Z_i \quad (3.4)$$

$$F_n^0 = Y_n^T Q^0, \quad Y_n^T G = [\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{np}]$$

Здесь в уравнение ((3.3) искусственно введен дополнительный член $\varepsilon_n \omega_n^0 f_n$, представляющий малое вязкое демпфирование n -й формы колебаний.

Решение уравнения (3.3) при заданных начальных условиях $\mathbf{q}(0)$ и $\dot{\mathbf{q}}(0)$ имеет вид

$$f_n = \frac{1}{m_n \omega_n^0} \int_0^t F_n(\tau) U_n(t - \tau) d\tau + D_{1n} U_n(t) + D_{2n} V_n(t)$$

$$U_n(t) = e^{\alpha_n t} \sin \omega_n t, \quad V_n(t) = e^{\alpha_n t} \cos \omega_n t$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{2} \varepsilon_n \omega_n^0, \quad \omega_n = \sqrt{\omega_n^0{}^2 - \alpha_n^2} \tag{3.5}$$

$$D_{1n} = \frac{1}{m_n \omega_n} \mathbf{Y}_n^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{q}}(0) - \alpha_n \mathbf{q}(0)], \quad D_{2n} = \frac{1}{m_n} \mathbf{Y}_n^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0)$$

Условие управления (1.2) с учетом разложения (3.2) записывается в виде

$$\sum_{n=1}^s \beta_{in} f_n = l_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{l} = [l_1 l_2 \dots l_p]^T, \quad \mathbf{L} \mathbf{Y}_n = [\beta_{1n} \beta_{2n} \dots \beta_{pn}]^T$$

Для решения системы интегральных уравнений (3.6) с учетом (3.5), (3.4) как и в предыдущем разделе будем использовать пошаговый метод, рассматривая дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Обозначим

$$S_n(t_k) = \int_0^{t_k} F_n(\tau) U_n(t_k - \tau) d\tau, \quad C_n(t_k) = \int_0^{t_k} F_n(\tau) V_n(t_k - \tau) d\tau \tag{3.7}$$

Эти выражения можно преобразовать к виду

$$S_n(t_k) = V_n(\Delta t) S_n(t_{k-1}) + U_n(\Delta t) C_n(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} F_n(\tau) U_n(t_k - \tau) d\tau$$

$$C_n(t_k) = V_n(\Delta t) C_n(t_{k-1}) - U_n(\Delta t) S_n(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} F_n(\tau) V_n(t_k - \tau) d\tau$$

Далее на достаточно малом интервале $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ функцию $F_n(t)$ будем считать постоянной и равной значению $F_n(t_k)$. Тогда с учетом (3.4):

$$S_n(t_k) = V_n(\Delta t) S_n(t_{k-1}) + U_n(\Delta t) C_n(t_{k-1}) + \nu_n \left[F_n^0(t_k) + \sum_{j=1}^p \alpha_{nj} Z_j(t_k) \right]$$

$$C_n(t_k) = V_n(\Delta t) C_n(t_{k-1}) - U_n(\Delta t) S_n(t_{k-1}) + \kappa_n \left[F_n^0(t_k) + \sum_{j=1}^p \alpha_{nj} Z_j(t_k) \right] \tag{3.8}$$

$$v_n = \frac{1}{\alpha_n^2 + \omega_n^2} [e^{\alpha_n \Delta t} (\alpha_n \sin \omega_n \Delta t - \omega_n \cos \omega_n \Delta t) + 1]$$

$$\kappa_n = \frac{1}{\alpha_n^2 + \omega_n^2} [e^{\alpha_n \Delta t} (\alpha_n \cos \omega_n \Delta t + \omega_n \sin \omega_n \Delta t) - 1]$$

В результате уравнения (3.6) с учетом (3.5) и (3.8) для момента времени $t = t_k$ принимают вид (2.14), где в данном случае

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^s \frac{\beta_{in} \alpha_{nj}}{m_n \omega_n} v_n$$

$$a_i(t_k) = \sum_{n=1}^s \frac{\beta_{in}}{m_n \omega_n} [V_n(\Delta t) S_n(t_{k-1}) + U_n(\Delta t) C_n(t_{k-1}) + v_n F_n^0(t_k)] + \quad (3.9)$$

$$+ \sum_{n=1}^s \beta_{in} [D_{1n} U_n(t_k) + D_{2n} V_n(t_k)]$$

Уравнения (2.14) с учетом (3.9) решаются начиная с момента времени $t = t_1$, учитывая, что $S_n(0) = C_n(0) = 0$. После определения $Z_1(t_1), Z_2(t_1), \dots, Z_p(t_1)$ по формулам (3.8) вычисляются значения $S_n(t_1), C_n(t_1)$ и затем решаются уравнения (2.14) с учетом (3.9) для момента времени $t = t_2$. Аналогичным образом процедура повторяется для последующих моментов времени t_3, t_4, \dots, t_k .

Консервативную систему также можно рассматривать как частный случай неконсервативной системы. При этом $\lambda_n = \alpha_n + i\omega_n, J_n(t_k) = C_n(t_k) + iS_n(t_k), \lambda_n^{-1} (e^{\lambda_n \Delta t} - 1) = \kappa_n + iv_n$.

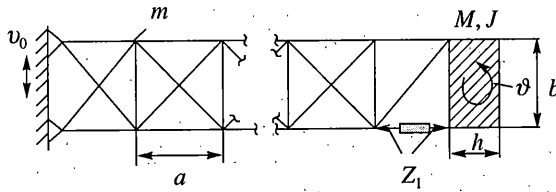
4. Определение командных сигналов для активного гашения нестационарных колебаний части упругой системы. Рассмотрим упругую систему совместно с системой управления. Пусть в данном случае вектор \mathbf{q} размерности N включает в себя обобщенные координаты конструкции и обобщенные координаты (переменные параметры) системы управления. Уравнения движения замкнутой системы в пространстве состояний записываются также как уравнения неконсервативной системы (2.1):

$$A\dot{\mathbf{r}} + C\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \left\| \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{0}} \right\| \mathbf{u} \quad (4.1)$$

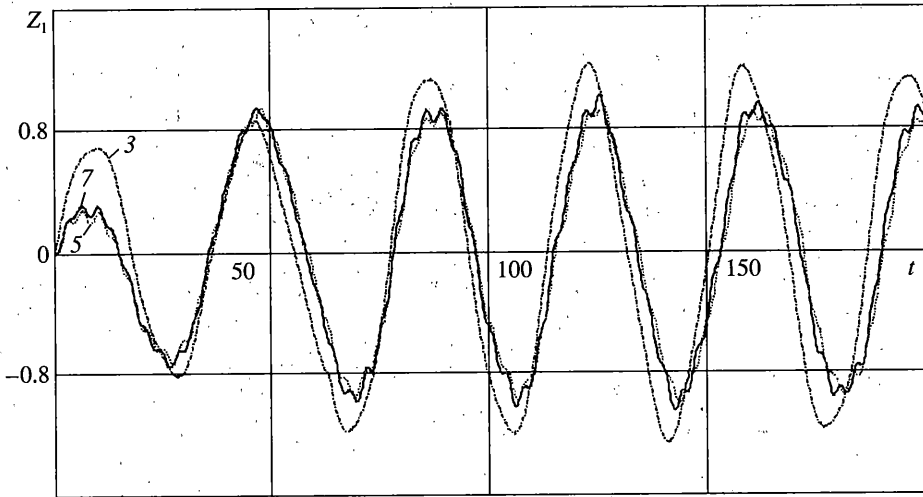
$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}_{2N}, \quad \mathbf{u} = \{u_i\}_p$$

где \mathbf{G} – некоторая постоянная матрица размерности $N \times p$ при $p < N$, характеризующая распределение командных сигналов (вектор $\mathbf{u}(t)$) по обобщенным координатам; вектор $\mathbf{Q}^0(t)$ порядка N представляет действующие на конструкцию внешние силы и возмущения (помехи) в системе управления.

Задача заключается в следующем. Необходимо определить командные сигналы системы управления (вектор \mathbf{u}), чтобы под воздействием произвольных внешних сил и возмущений (вектор $\mathbf{Q}^0(t)$) определенная часть конструкции, описываемая p обобщенными координатами, совершала заданное движение дрейфа или находилась в покое.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кинематическое условие неполного управления (по p обобщенным координатам) задается в виде (1.2).

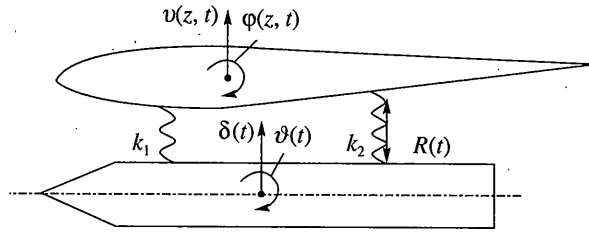
Эта задача для уравнения (4.1) с условием (1.2) идентична рассмотренной в п. 2 задаче для упругой конструкции с неизвестными управляющими силами (вектор \mathbf{Z}), описываемой уравнением (2.1) с условием (1.2). Различие только в размерности и обозначениях.

Решение задачи (4.1), (1.2) строится также как задачи (2.1), (1.2) в комплексных нормальных координатах. В данном случае матрицы \mathbf{A}_0 , \mathbf{C}_0 заменяются на \mathbf{A} , \mathbf{C} , а вектор управляющих сил \mathbf{Z} на вектор командных сигналов \mathbf{u} .

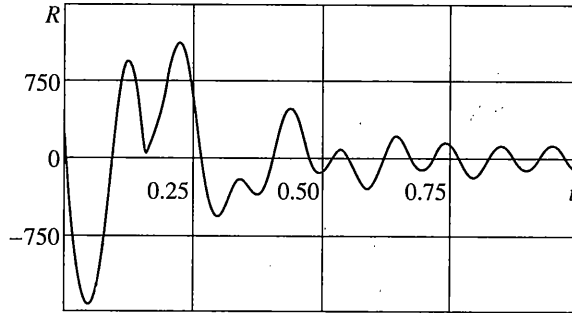
В данном случае на каждом шаге при $t = t_k$ получается система алгебраических уравнений вида (2.14) для определения неизвестных командных сигналов $u_j(t_k)$ ($j = 1, 2, \dots, p$).

Рассмотренный алгоритм управления нестационарными колебаниями требует, чтобы в контуре системы автоматического управления находился цифровой вычислитель, способный производить расчеты в масштабе реального времени, т.е. чтобы за один шаг по полученным формулам, используя имеющуюся информацию на предыдущем шаге, можно было вычислить необходимые управляющие воздействия на следующем шаге.

В этом смысле разработанный алгоритм является весьма эффективным: требует минимальных затрат времени на вычисления; для больших систем позволяет ограничиться небольшим числом нормальных координат; может отфильтровать высокочастотные колебания.



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Примеры расчета. В качестве первого примера рассмотрим плоскую регулярную ферму с грузом на правом краю (фиг. 1), которая подвергается кинематическому возмущению в виде заданного поперечного перемещения левого края $v_0(t)$. Требуется, чтобы при любых возмущениях угол поворота груза оставался равным нулю ($\vartheta(t) = 0$). Это достигается путем создания дополнительного управляющего усилия $Z_1(t)$ в активном стержне, показанном на фиг. 1. Расчет выполнен для двухсекционной фермы, имеющей семь степеней свободы (перемещения в узлах) при действии возмущения в виде волны синуса $v_0(t) = \sin \Omega t$ при $t \leq 2\pi/\Omega$, $v_0(t) = 0$ при $t > 2\pi/\Omega$; $\Omega = 0.1 \text{ с}^{-1}$. Параметры фермы: $a = b = 1 \text{ м}$, $h = 0.5 \text{ м}$; сосредоточенная масса в каждом узле $-m = 1 \text{ кг}$; масса груза $-M = 4 \text{ кг}$; собственный момент инерции груза $-J = 0.75 \text{ мб}^2$; жесткости всех стержней на растяжение (EF/l) равны 1 Н/м . На фиг. 2 показаны результаты расчета необходимого усилия $Z_1(t)$ при условии $\vartheta = 0$, полученного при учете трех, пяти и семи собственных форм колебаний. Результаты расчета с учетом всех семи форм полностью совпадают с результатами численного интегрирования системы при условии $\vartheta = 0$ по методу Рунге–Кутты.

В качестве примера неконсервативной системы рассмотрена модельная задача для консоли упругого однородного крыла большого удлинения с упруго присоединенной подвеской (фиг. 3). Уравнения изгибно-крутильных аэроупругих колебаний крыла составлены по методу Ритца с учетом двух заданных форм (одна – для изгиба и другая – для кручения). Аэродинамические нагрузки определялись на основе квазистационарной теории плоскопараллельного обтекания колеблющегося прямого крыла несжимаемым потоком. С учетом относительного движения подвески в вертикальной плоскости расчетная модель крыла имеет четыре степени свободы. В качестве возмущения рассматривался вертикальный порыв ветра в виде волны синусоиды. Параметры системы не приводятся ввиду их большого числа.

На фиг. 4 показано управляющее усилие в активном стержне $R(t)$, необходимое для того, чтобы при колебаниях крыла под действием порыва ветра подвеска не совершала угловые колебания. Результаты решения задачи в комплексных нормальных координатах совпадают с результатами численного решения.

6. Заключение. Рассмотрена новая задача активного гашения нестационарных колебаний какой-либо части упругой конструкции путем создания управляющих сил в приводах или в встроенных регулируемых элементах конструкции.

Получены решения для определения законов изменения управляющих сил и командных сигналов, при которых заданная часть упругой конструкции остается в покое или совершает заданное движение дрейфа при действии произвольных, измеряемых в процессе управления нестационарных возмущений. Это решение является сравнительно простым и его алгоритм может быть реализован в режиме реального времени на бортовом компьютере или специальном вычислителе, входящем в состав системы автоматического управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wada B.K. Adaptive Structures: An Overview // Journal of Spacecraft and Rockets. 1990. V. 27. No. 3. P. 330–337.
2. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Динамика упругих управляемых конструкций. М.: Изд-во МАИ, 1999. 56 с.
3. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Gade P.V.N., Inman D.J. Active Control of Store-Induced Flutter in Incompressible Flow // J. Aircraft. 1998. V. 35. No. 3. P. 454–461.

Москва

Поступила в редакцию
25.09.2002