

УДК 539.3

© 2003 г. А.Ю. ВИНОГРАДОВ, Ю.И. ВИНОГРАДОВ,
Ю.А. ГУСЕВ, Ю.И. КЛЮЕВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ КОШИ–КРЫЛОВА

Проблема переноса краевых условий для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений теории оболочек, связанная с потерей устойчивости счета на ЭВМ, решалась различными способами в методах Абрамова, Гельфанда–Локуциевского и Годунова. Общим, объединяющим эти методы, существенным признаком является численное интегрирование дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутты различных степеней с захватом известных краевых условий. Последовательное или встречное численное интегрирование дифференциальных уравнений с краев позволяет построить систему алгебраических уравнений в произвольной точке интервала интегрирования и, таким образом, решить задачу. Существенными отличительными признаками построенного метода являются вычисление по формулам значений функций Крылова для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений независимо от краевых условий задачи и перенос этих условий с помощью рекуррентных соотношений, построенных на основе свойств функций Коши–Крылова.

1. Постановка задачи. После разделения переменных в системе дифференциальных уравнений с частными производными полученную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений всегда можно представить в виде системы, каждое уравнение которой первого порядка, и записать в матричной форме

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x), \quad (*)' = \frac{d(*)'}{dx}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

где $Y(x) = \|y_1(x), \dots, y_m(x)\|^T$ – вектор-функция состояния нормального сечения оболочки размерности m , состоящая из кинематических и силовых параметров, $A(x) = \|a_{ij}\|$ – матрица размерности $m \times m$, элементами $a_{ij} = a_{ij}(x)$ которой являются коэффициенты разрешающей системы дифференциальных уравнений краевой задачи, $F(x) = \|f_1(x), \dots, f_m(x)\|^T$ – вектор-функция внешнего воздействия на оболочку размерности m .

Условия на краях интервала $0 \leq x \leq 1$ интегрирования также всегда можно представить в матричной форме, используя вектор-функцию $Y(x)$ состояния сечения оболочки

$$H_l(0)Y(0) = R_l(0), \quad H_r(1)Y(1) = R_r(1) \quad (1.2)$$

где H_l и H_r – матрицы условий на левом $x = 0$ и правом $x = 1$ краях интервала интегрирования размерностей $(m - r) \times m$ и $r \times m$ соответственно, рангов $(m - r)$ и r ; R_l и R_r – векторы-столбцы размерностей $(m - r)$ и r соответственно, которые в качестве элементов содержат элементы вектор-функции $Y(x)$ состояния сечения оболочки.

2. Интегрирование дифференциального уравнения. Численное решение матрично-го дифференциального уравнения (1.1), которое позволяет связать значения вектор-функций $Y(x_{i-1})$ и $Y(x_i)$ состояния произвольно выбранных $i - 1$ и i сечений оболочки, будем искать в виде $Y(x_{i-1}) = K(x_{i-1})Y(x_i) + Y^*(x_{i-1})$, где $K(x_{i-1})$ – матрица значе-

ний функций Коши–Крылова однородного дифференциального уравнения для (1.1) и $Y^*(x_{i,i-1})$ – его частное решение для произвольного участка $\Delta x = x_{i-1} - x_i$. С помощью метода последовательных приближений Пикара [1] для однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $A(x) = A = \text{const}$ можно получить матричный ряд Тейлора для вычисления его интеграла

$$K(x_{i,i-1}) = \sum_{m=0}^{m=k} \frac{(A\Delta x)^m}{m!}, \quad \Delta x = x_{i-1} - x_i = \text{const} \quad (2.1)$$

где Δx – длина участка, на которые может делиться интервал $0 \leq x \leq 1$ интегрирования, k – число удерживаемых членов матричного ряда Тейлора, которое определяется задаваемой погрешностью численного интегрирования.

Доказано, что матричный ряд Тейлора сходится и, следовательно, погрешность вычисления интеграла легко контролируется сравнением его частичных сумм.

Если использовать определение интеграла по Вольтерра [1], то можно показать, что решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вычисляется с помощью матричного бинома Ньютона

$$K(x_{i,i-1}) = (E + A\Delta x_k)^k, \quad \Delta x_k = \Delta x/k = \text{const} \quad (2.2)$$

где E – единичная матрица, k – число частей, на которые делится длина участка Δx .

Заданная погрешность вычисления интеграла с помощью матричного бинома Ньютона достигается ограничением значения его показателя k . Если обратить внимание на рост числа основных машинных операций с увеличением степени аппроксимации интеграла однородного дифференциального уравнения с помощью формул (2.1) и (2.2), то становится очевидным преимущество бинома Ньютона при вычислении интеграла. Для того, чтобы на участке Δx вычислить интеграл, например, с аппроксимацией до 64 степени с помощью бинома Ньютона, необходимо выполнить перемножение матриц шесть раз, а с помощью ряда Тейлора потребуются перемножить матрицы той же размерности 63 раза. С увеличением степени аппроксимации различие в числе основных машинных операций при вычислении интеграла резко возрастает и преимущество матричного бинома Ньютона в сокращении затрат машинного времени становится более многократным.

Для дифференциального уравнения (1.1) с переменными коэффициентами $A(x) = \text{var}$ численное интегрирование однородного дифференциального уравнения также можно выполнять без учета краевых условий по формуле, которая следует из определения интеграла по Вольтерра [1]

$$K(x_{i,i-1}) = \prod_{j=k}^1 (E + A(x_j)\Delta x_j), \quad \Delta x_j = \frac{\Delta x}{k} \quad (2.3)$$

где k – число частей, на которые делится длина участка Δx .

Величина Δx_j части длины участка Δx выбирается из условия допустимой величины погрешностей, которые возникают при осреднении на этой части переменных элементов $a_{ij}(x)$ матрицы $A(x)$.

В результате объединения метода последовательных приближений Пикара и определения интеграла по Вольтерра получим наиболее общую формулу для вычисления интеграла однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$K(x_{i,i-1}) = \prod_{j=km=0}^1 \sum_{m=l} \frac{(A_j\Delta x_j)^m}{m!}, \quad \Delta x_j = \frac{\Delta x}{k} = \text{const} \quad (2.4)$$

Интеграл вычисляется путем перемножения рядов Тейлора. Ряды Тейлора вычисляются на частях Δx_j , где переменные элементы $a_{ij}(x)$ матрицы $\mathbf{A}(x)$ усредняются.

Контроль за погрешностями вычисления интеграла при использовании формулы (2.3) может выполняться путем сравнения произведений, полученных для различного числа сомножителей. При использовании формулы (2.4) необходим двойной контроль, контроль за сходимостью матричного ряда Тейлора и за числом матричных сомножителей для получения произведения.

Очевидно, что при нулевом значении аргумента $x = 0$ формулы (2.1)–(2.4) вырождаются в единичную матрицу \mathbf{E} . Это свойство формул позволяет вычислять интеграл однородных дифференциальных уравнений без учета краевых условий задачи. Впервые в аналитической форме решение однородного дифференциального уравнения с таким свойством было получено А.Н. Крыловым для расчета балок, лежащих на упругом основании [2]. Замечательное свойство функций Крылова, которые вычисляются по формулам (2.1)–(2.4), используется для построения эффективного метода переноса краевых условий в заданную точку интервала $0 \leq x \leq 1$ интегрирования.

Частное решение $\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1})$ уравнения (1.1) на произвольном участке $\Delta x = x_{i-1} - x_i$ определяется интегралом от так называемой матрицы Коши [1] и может быть представлено в виде

$$\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1}) = \mathbf{K}(x_{i,i-1}) \int_{x_i}^{x_{i-1}} [\mathbf{K}(x_i, \tau)]^{-1} \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad \tau \in \Delta x$$

Воспользуемся свойством функций Крылова

$$\mathbf{K}(x_{i,i-1}) = \prod_{j=k}^1 \mathbf{K}(x_{j,j-1}), \quad \Delta x_j = x_{j-1} - x_j = \frac{\Delta x}{k}$$

где k – число частей, на которые делится участок Δx , а также правилом обращения произведения матриц. В результате получим

$$\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1}) = [\mathbf{K}(x_{i,1})\mathbf{T}_1\mathbf{F}(x_1) + \mathbf{K}(x_{i,2})\mathbf{T}_2\mathbf{F}(x_2) + \dots + \mathbf{K}(x_{i,k-1})\mathbf{T}_{k-1}\mathbf{F}(x_{k-1}) + \mathbf{T}_k\mathbf{F}(x_k)]\Delta x_j$$

или

$$\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1}) = \Delta x_j \sum_{j=1}^k \mathbf{K}(x_{i,j})\mathbf{T}_j\mathbf{F}(x_j), \quad x_{j=0} = x_i, \quad x_{j=k} = x_{i-1} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}_j\Delta x_j}{2!} + \frac{\mathbf{A}_j^2(\Delta x_j)^2}{3!} + \dots \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

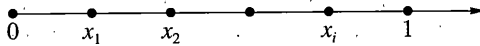
Таким образом, вычисление частного решения сводится к последовательному вычислению матриц $\mathbf{K}(x_{i,1}), \mathbf{K}(x_{i,2}), \dots, \mathbf{K}(x_{i,k-2}), \mathbf{K}(x_{i,k-1})$, их умножению на соответствующие матрицы \mathbf{T}_j и векторы нагрузки $\mathbf{F}(x_j)$ в соответствующих точках $x_j \in \Delta x$. Следует иметь в виду, что матрицы $\mathbf{K}(x_{i,j})$ вычисляются при решении однородного уравнения и могут использоваться при вычислении частного решения.

Для уравнений с постоянными коэффициентами формула (2.5) упрощается, так как $\mathbf{K}(x_{i,j})$ и \mathbf{T}_j на интервалах Δx одинаковы. Обозначив $\mathbf{K}(x_{i,j}) = \mathbf{K}$ и $\mathbf{T}_j = \mathbf{T}$, на основании (2.5) придем к следующему выражению

$$\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1}) = [\mathbf{K}^{k-1}\mathbf{T}\mathbf{F}(x_1) + \mathbf{K}^{k-2}\mathbf{T}\mathbf{F}(x_2) + \dots + \mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{F}(x_{k-1}) + \mathbf{T}\mathbf{F}(x_k)]\Delta x_j$$

Верхний индекс у матриц \mathbf{K} является их степенью. Таким образом, перемножение матриц заменяется возведением матрицы в степень, показатель которой равен числу множителей.

3. Алгоритм переноса краевых условий. Общее численное решение $\mathbf{Y}(x_{i-1}) = \mathbf{K}(x_i, i-1)\mathbf{Y}(x_i) + \mathbf{Y}^*(x_i, i-1)$ дифференциального уравнения (1.1) с помощью значений функций Крылова позволяет построить простой алгоритм переноса краевых условий в произвольно выбранную точку $x = x^*$ интервала $0 \leq x \leq 1$ [3]. Перенос краевых условий, например, с левого края в точку x^* состоит в следующей последовательности выполнения элементарных матричных процедур. С помощью одной из формул (2.1),



Фиг. 1

(2.2), (2.3), (2.4) и (2.5) вычисляется интеграл $\mathbf{K}(x_{1,0})$ и частное решение $\mathbf{Y}^*(x_{1,0})$ уравнения (1.1) для участка $[0, x_1]$, фиг. 1. Тогда $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{K}(x_{1,0})\mathbf{Y}(x_1) + \mathbf{Y}^*(x_{1,0})$. Исключая $\mathbf{Y}(0)$ в условии (1.2) на краю $x = 0$, получаем

$$\mathbf{H}_l(x_1)\mathbf{Y}(x_1) = \mathbf{R}_l(x_1) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{H}_l(x_1) = \mathbf{H}_l(x_0)\mathbf{K}(x_{1,0}), \quad \mathbf{R}_l(x_1) = \mathbf{R}_l(x_0) - \mathbf{H}_l(x_0)\mathbf{Y}^*(x_{1,0})$$

Из точки $x = x_1$ (фиг. 1) в точку $x = x_2$ краевые условия (3.1) переносятся аналогично. Вычисляются интеграл $\mathbf{K}(x_{2,1})$ и частное решение $\mathbf{Y}^*(x_{2,1})$ для участка $[x_1, x_2]$. Тогда

$$\mathbf{H}_l(x_2)\mathbf{Y}(x_2) = \mathbf{R}_l(x_2)$$

$$\mathbf{H}_l(x_2) = \mathbf{H}_l(x_1)\mathbf{K}(x_{2,1}), \quad \mathbf{R}_l(x_2) = \mathbf{R}_l(x_1) - \mathbf{H}_l(x_1)\mathbf{Y}^*(x_{2,1})$$

В общем виде будем иметь

$$\mathbf{H}_l(x_i)\mathbf{Y}(x_i) = \mathbf{R}_l(x_i)$$

$$\mathbf{H}_l(x_i) = \mathbf{H}_l(x_{i-1})\mathbf{K}(x_{i,i-1}), \quad \mathbf{R}_l(x_i) = \mathbf{R}_l(x_{i-1}) - \mathbf{H}_l(x_{i-1})\mathbf{Y}^*(x_{i,i-1})$$

Повторяя предложенную последовательность вычислений и учитывая направление движения, переносим краевые условия с левого края в точку $x = x^*$ интервала $0 \leq x \leq 1$:

$$\mathbf{H}_l(x^*)\mathbf{Y}(x^*) = \mathbf{R}_l(x^*) \tag{3.2}$$

Аналогично условия (1.2) с правого края $x = 1$ интервала $0 \leq x \leq 1$ интегрирования переносятся в точку $x = x^*$:

$$\mathbf{H}_r(x^*)\mathbf{Y}(x^*) = \mathbf{R}_r(x^*) \tag{3.3}$$

Объединяя краевые условия (3.2) и (3.3), перенесенные с краев в точку $x = x^*$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{D}(x^*)\mathbf{Y}(x^*) = \mathbf{R}(x^*), \quad \mathbf{D}(x^*) = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_l(x^*) \\ \mathbf{H}_r(x^*) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}(x^*) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_l(x^*) \\ \mathbf{R}_r(x^*) \end{Bmatrix}$$

Решая систему алгебраических уравнений, определяем искомый вектор-столбец $\mathbf{Y}(x^*)$ состояния сечения оболочки при $x = x^*$: $\mathbf{Y}(x^*) = \mathbf{D}^{-1}(x^*)\mathbf{R}(x^*)$.

Алгоритм переноса краевых условий для однородного дифференциального уравнения значительно упрощается и сводится, главным образом, к перемножению значений функций Крылова, вычисленных для участков $\Delta x = x_{i-1} - x_i$ интервала $0 \leq x \leq 1$:

$$\mathbf{H}_l(x^*) = \mathbf{H}_l(x_0)\mathbf{K}(x_{1,0})\mathbf{K}(x_{2,1}) \times \dots \times \mathbf{K}(x_{i,i-1}) \times \dots \times \mathbf{K}(x_{*,* - 1})$$

При этом вектор-столбец \mathbf{R} не изменяется.

Скорость переноса краевых условий для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно многократно увеличить, так как при $\Delta x = \text{const}$ матрицы $\mathbf{K}(x_{i,i-1})$ оказываются одинаковыми. Для увеличения скорости переноса краевых условий процедуру перемножения матриц \mathbf{K} следует заменить возведением ее в степень $\mathbf{H}_l(x^*) = \mathbf{H}_l(x_0)\mathbf{K}^k$, где k – число участков до $x = x^*$, на которые разбивается интервал $0 \leq x \leq 1$.

4. Ортонормирование краевых условий. Дифференциальные уравнения механики деформирования оболочек относятся к жестким, и для устойчивого решения краевых задач на ЭВМ необходимо выполнять специальные вычислительные процедуры. Для устойчивости счета С.К. Годунов, например, предложил при численном интегрировании дифференциальных уравнений периодически выполнять процедуры ортонормирования [4]. Воспользуемся этим, с той лишь разницей, что ортонормированию будут подвергаться краевые условия при их переносе, и выполняться эти процедуры будут построчно, так как матрицы краевых условий имеют прямоугольную форму.

Для краткости и общности краевые условия запишем в виде

$$\mathbf{H}\mathbf{Y} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \dots \\ \mathbf{H}_{m-r} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \dots \\ \mathbf{R}_{m-r} \end{Bmatrix}$$

Здесь \mathbf{H}_i – строки матрицы \mathbf{H} размерности m , R_i – элементы вектора-столбца \mathbf{R} .

Векторы, прошедшие процедуру ортонормирования, будем обозначать строчными буквами. Также строчными буквами будем обозначать их элементы и составленные из этих векторов матрицы.

Формулы ортонормирования имеют вид: $\omega_{11} = \sqrt{\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1}$, где $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1$ – скалярное произведение векторов, вычисляемое по координатной формуле

$$\bar{\mathbf{a}} = (\overline{a_1, a_2, \dots, a_n}), \quad \bar{\mathbf{b}} = (\overline{b_1, b_2, \dots, b_n}), \quad \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{H}_1/\omega_{11}, \quad \omega_{12} = \sqrt{\mathbf{h}_1\mathbf{H}_2}, \quad \omega_{22} = \sqrt{\mathbf{H}_2\mathbf{H}_2 + \omega_{12}^2}$$

$$\mathbf{h}_2 = (\mathbf{H}_2 - \omega_{12}\mathbf{h}_1)/\omega_{22}, \quad \omega_{13} = \sqrt{\mathbf{h}_1\mathbf{H}_3}, \quad \omega_{23} = \sqrt{\mathbf{h}_2\mathbf{H}_3}, \quad \omega_{33} = \sqrt{\mathbf{H}_3\mathbf{H}_3 - \omega_{13}^2 - \omega_{23}^2}$$

$$\mathbf{h}_3 = (\mathbf{H}_3 - \omega_{13}\mathbf{h}_1 - \omega_{23}\mathbf{h}_2)/\omega_{33}$$

и так далее. В публикуемом методе требуется также соответствующим образом изменять и компоненты вектора правых частей \mathbf{R} :

$$r_1 = R_1/\omega_{11}, \quad r_2 = (R_2 - \omega_{12}r_1)/\omega_{22}, \quad r_3 = (R_3 - \omega_{13}r_1 - \omega_{23}r_2)/\omega_{33}$$

и так далее. В результате ортонормирования получаем следующее уравнение для краевых условий $h\mathbf{Y} = \mathbf{r}$. В отличие от метода Годунова, в предлагаемом методе не требуется запоминать полученную в ходе вычислений треугольную матрицу преобразования $\mathbf{\Omega}$, что существенно экономит оперативную память ЭВМ.

5. Осесимметричное деформирование оболочек. Эффективность построенного метода определялась в сравнении с методом Годунова. Для этого обоими методами решались задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической, конической и сферической оболочек. Один край оболочек зашпелен, а свободный нагружен кольцевой равномерно распределенной по окружности нагрузкой, направленной по нормали к оси оболочки.

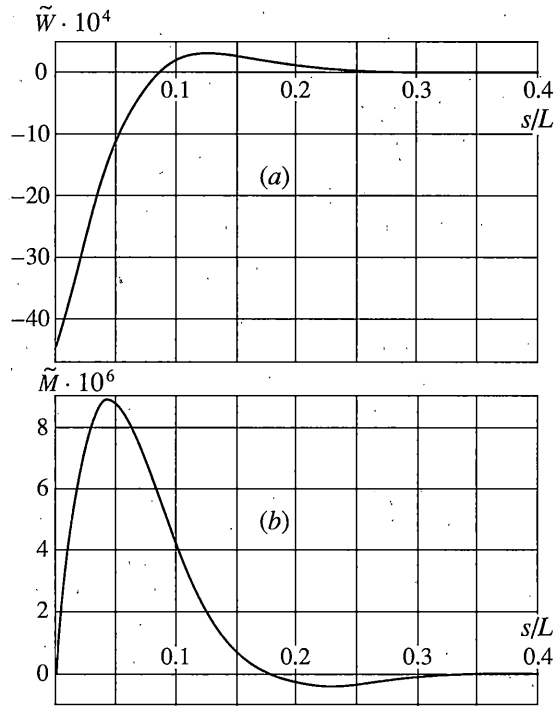
Модуль Юнга материала оболочек $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Относительная толщина R/h , R_2/h оболочек изменялась в пределах от 50 до 300. Удлинение L/R цилиндрической оболочки изменялось от 1 до 10. Угол между образующей конической оболочки и ее осью составлял 10° . Удлинение L/R_2 образующей конической и меридиана сферической оболочек составляло соответственно 1.0, 2.0, 3.0, 3.5, 4.0 и 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.3, 1.4.

При решении двумя методами определялось максимальное значение продольного изгибающего момента M в оболочках. Уточнение значения прекращалось, когда относительная погрешность в результатах не превышала 3%. Методом Годунова результаты получались с использованием метода Рунге–Кутты четвертой степени интегрирования дифференциального уравнения. При этом минимизировалось количество шагов при параллельном счете. Определялась максимальная длина участка устойчивого счета. Таким образом минимизировались затраты машинного времени при решении краевых задач. По затратам машинного времени построенный метод оказался эффективнее метода Годунова более чем на два порядка. Он не требовал ортонормирования переносимых краевых условий при произвольных параметрах оболочек.

На фиг. 2 показано изменение безразмерных радиального перемещения $\tilde{W} = W/h$ (a) и изгибающего момента $\tilde{M} = M/(Eh^2)$ (b) для цилиндрической оболочки с параметрами $L/R = 2$, $R/h = 50$. Результаты контролировались аналитическим решением и сравнивались с решением методом Годунова. При совпадении результатов до трех значащих цифр для выбранной контрольной точки затраты машинного времени предложенным методом оказались приблизительно в 300 раз меньшими.

6. Деформирование оболочек сосредоточенными силами. Один край оболочек считался зашпеленным. На другом краю оболочки нагружались двумя уравновешенными сосредоточенными силами, направленными по нормали к их оси. В расчетах удерживалось 100 номеров гармоник разложения искомым величин и нагрузки при разделении переменных методом Фурье. Задачи решались методом Годунова и построенным в публикуемой работе. Определялось максимальное значение продольного изгибающего момента M для оболочек. Результаты сравнивались, когда относительная погрешность не превышала 3%. Эталонными считались результаты, полученные методом Годунова при максимально возможном числе шагов интегрирования.

Наиболее эффективным по затратам машинного времени при решении краевой задачи оказался бином Ньютона (2.2) для интегрирования дифференциальных уравнений изгиба цилиндрической оболочки. Для такой оболочки с параметрами $L/R = 1$ и $R/h = 50$ ортонормирования при использовании предложенного метода не потребовалось, и он оказался эффективнее метода Годунова по затратам машинного времени более чем в 40 раз. Для оболочки с параметрами $L/R = 10$ и $R/h = 300$ пришлось ортонормировать матрицы краевых условий. Однако эффективность построенного метода по затратам машинного времени оказалась выше более чем в 200 раз. Критическая длина для устойчивости счета построенным методом оказалась в несколько раз больше, чем при использовании метода Годунова.



Фиг. 2

Эффективность построенного метода в сравнении с методом Годунова при решении краевых задач для конуса и сферы оценивалась, как и для цилиндра. При этом использовалась формула (2.4) для вычисления интеграла. Производилась минимизация времени счета по параметрам l и k . Оказалось, что затраты времени не зависят от параметра l . Поэтому для расчета таких оболочек можно рекомендовать формулу (2.3). Эффективность построенного метода по затратам машинного времени для конической и сферической оболочек для всего диапазона указанных выше параметров оказалась больше чем на полтора порядка, а критическая длина участка устойчивого счета оказалась много большей, чем для метода Годунова.

Отметим, что построенный метод по сравнению с известными проще в реализации и эффективнее по затратам машинного времени и требуемого объема оперативной памяти. Он позволяет получать результаты с априорно оцениваемой погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. 154 с.
3. Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Метод переноса краевых условий функциями Коши-Крылова для жестких линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 4. С. 474-476.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171-174.