МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. С.Л. ГЛАДКИЙ, Л.Н. ЯСНИЦКИЙ

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрены вопросы численной реализации и оценки погрешности метода фиктивных канонических областей. Возможности метода проиллюстрированы на тестовой задаче в сравнении с методом конечных элементов.

1. Введение. Как известно, появление быстродействующих электронно-вычислительных машин, в свое время, оказало влияние на развитие методов прикладной математики. С одной стороны, открылись перспективы решения сложных краевых задач, реально отражающих действительность, а с другой – изменились сами методы решения дифференциальных уравнений. Вместо традиционных аналитических приемов, стали активно развиваться численные методы, возникла новая область математики, называемая дискретной.

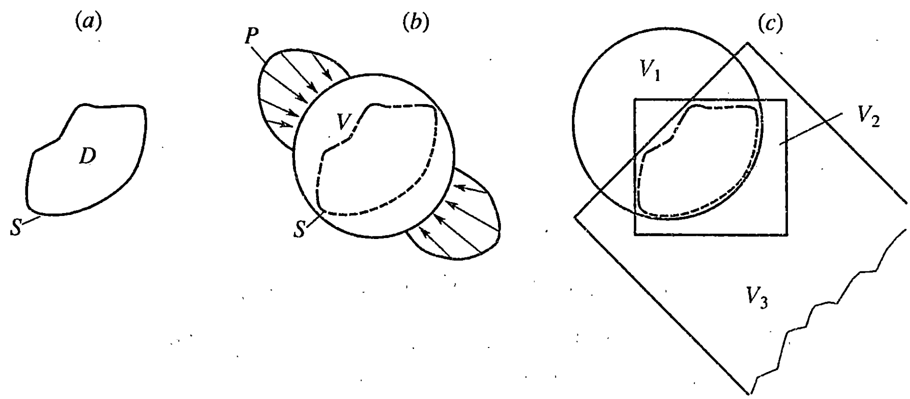
Однако увлечение численными методами в полной мере выявило не только их бесспорные преимущества, но и непреодолимые недостатки. К числу последних относится невозможность надежной оценки погрешности расчетных результатов. Этот недостаток особенно ощущается в последнее время в связи с применением математического моделирования для расчета ответственных объектов и процессов, от которых зависит безопасность людей, государств, цивилизации.

С дальнейшим развитием компьютерной индустрии наблюдается появление нового качества. Компьютеры становятся интеллектуальными. Это качественное изменение аппаратной базы снова приводит к изменению подходов, применяемых математиками при разработке алгоритмов решения краевых задач. Внимание вновь обращается к аналитическим подходам, теперь уже обогащенным методами искусственного интеллекта.

В работе [1] был предложен оригинальный аналитический метод решения краевых задач математической физики, впоследствии названный методом фиктивных канонических областей (ФКО). Метод ФКО успешно применялся для решения ряда задач расчета напряженно-деформированного состояния инженерных конструкций, определения тепловых, магнитных и электрических полей [2]. Однако, имея явные преимущества в экономичности, точности и надежности расчетных результатов, метод ФКО, тем не менее, уступал в универсальности алгоритмам, к которым приводят методы сеток, конечных и граничных элементов. Последнее явилось причиной снижения популярности метода ФКО.

В настоящее время, в связи с успехами в области искусственного интеллекта, возможностями работы с неформализованными и нечеткими знаниями, есть основания надеяться, что указанная проблема метода ФКО будет успешно решена, алгоритмы получат универсальность и станут конкурентно-способными, и метод ФКО, таким образом, приобретет "второе дыхание".

2. Идея метода фиктивных канонических областей. Существуют геометрические области, называемые каноническими, которые допускают применение метода разделения переменных Фурье и получение общего решения краевой задачи теории уп-



Фиг. 1

ругости в виде бесконечных рядов:

$$U_i = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_{in}, \qquad \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma_{ijn} \tag{2.1}$$

где U_i, σ_{ij} – компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, U_{in}, σ_{ihj} – координатные функции, тождественно удовлетворяющие уравнениям теории упругости, c_n – постоянные коэффициенты, определяемые граничными условиями задачи.

Пусть требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого тела D, на поверхности S которого заданы граничные условия в напряжениях и (или) в перемещениях (фиг. 1, a).

Мысленно погрузим заданное тело D в некоторое фиктивное тело V канонической формы (фиг. 1, b), для которого известно общее решение уравнений теории упругости в виде (2.1). Если теперь на поверхности фиктивного тела V создать нагружение P такое, что на поверхности S вписанного тела возникнут напряжения и (или) перемещения, совпадающие с заданными граничными условиями, то решение для V будет также являться решением и для тела D. Согласно методу ФКО фиктивная область V может быть образована пересечением нескольких канонических областей $V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots$ (фиг. 1, c). В этом случае общее решение для V складывается из суммы общих решений для V_1, V_2 и т.д.

Математически задача нагружения фиктивного тела V состоит в определении коэффициентов c_n в (2.1), обеспечивающих выполнение на S заданных граничных условий. Однако добиться требуемых граничных условий на границе заданного тела путем нагружения фиктивной области можно далеко не всегда. Как показано в [1–4], это зависит от выбора канонических областей и их расположения относительно заданного тела.

Таким образом, метод фиктивных канонических областей относится к методам, точно удовлетворяющим дифференциальным уравнениям и приближенно – граничным условиям, и его основная идея состоит в выборе базисных функций, который, по существу, сводится к выбору подходящих канонических областей для заданного тела и заданных граничных условий. Приведенная геометрическая интерпретация позволила сформулировать и доказать соответствующие теоремы сходимости и корректности, предложить критерии, которыми следует руководствоваться при выборе ФКО [2] и методики выбора ФКО [3, 4], обеспечивающие выполнение этих критериев. Не затрагивая теоретических проблем, остановимся на вопросе численной реализации и иллюстрации возможности оценки погрешности метода ФКО.

Постоянные c_n в разложении (2.1) могут быть найдены различными способами – методом граничной коллокации, путем минимизации граничных функционалов Треффтца и Рейсснера и др. Рассмотрим применение для этой цели метода наименьших квадратов.

Пусть надо решить задачу теории упругости в декартовой системе координат x, y, z для тела D, на части поверхности S_1 ($S_1 \in S$) которого заданы граничные условия в напряжениях $\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$. Допустим, удалось подобрать фиктивную каноническую область V (либо пересечение канонических областей $V_1 \cap V_2 \cap \ldots$), удовлетворяющую необходимым критериям [2], для которой имеет место общее решение уравнений теории упругости типа (2.1). Аналогичные разложения могут быть получены для поверхностных напряжений

$$P_x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{xn}, \quad P_y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{yn}, \quad P_z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{zn} \tag{2.2}$$

Ограничившись конечным числом слагаемых N, следуя Л.С. Лейбензону [5], представим суммарную квадратичную погрешность удовлетворения граничным условиям на S_1 в виде интеграла:

$$\varepsilon_1 = \int_{S_1} [(\sum_{n=1}^{N} c_n P_{xn} - \overline{P}_x)^2 + (\sum_{n=1}^{N} c_n P_{yn} - \overline{P}_y)^2 + (\sum_{n=1}^{N} c_n P_{zn} - \overline{P}_z)^2] dS_1 \tag{2.3}$$

Условие минимума этого функционала ($\partial\varepsilon_1 / \partial c_k = 0$ (k = 1, 2,..., N)) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно c_n:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \int_{S_1} (P_{xn} P_{xk} + P_{yn} P_{yk} + P_{zn} P_{zk}) dS_1 = \int_{S_1} (\overline{P}_x P_{xk} + \overline{P}_y P_{yk} + \overline{P}_z P_{zk}) dS_1 \tag{2.4}$$

Если на поверхности S_2 тела D заданы перемещения $\overline{U}_x, \overline{U}_y, \overline{U}_z$, то функционал граничных условий имеет аналогичный вид

$$\varepsilon_2 = \int_{S_2} [(\sum_{n=1}^{N} c_n U_{xn} - \overline{U}_x)^2 + (\sum_{n=1}^{N} c_n U_{yn} - \overline{U}_y)^2 + (\sum_{n=1}^{N} c_n U_{zn} - \overline{U}_z)^2] dS_2 \tag{2.5}$$

а его минимальное значение обеспечивают коэффициенты, найденные из системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \int_{S_2} (U_{xn} U_{xk} + U_{yn} U_{yk} + U_{zn} U_{zk}) dS_2 = \int_{S_1} (\overline{U}_x U_{xn} + \overline{U}_y U_{yn} + \overline{U}_z U_{zn}) dS_2 \tag{2.6}$$

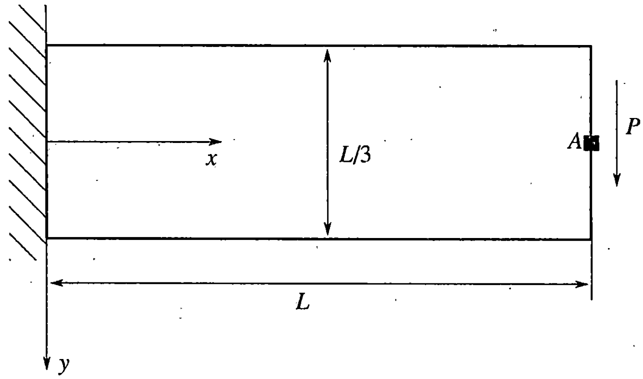
Методику Л.С. Лейбензона можно обобщить на смешанные задачи теории упругости, если ввести обобщенный функционал

$$\varepsilon = (S / S_1) \varepsilon_1 + k (S / S_2) \varepsilon_2 \tag{2.7}$$

где k – весовой множитель, а $S = S_1 + S_2$. Из соображений совпадения размерностей удобно принять $k = (E/L)^2$, E – модуль упругости, L – характерный размер тела. Дифференцируя функционал граничных условий по c_k и приравнивая производные к нулю, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \left[\frac{1}{S_1} \int_{S_1} (P_{xn} P_{xk} + P_{yn} P_{yk} + P_{zn} P_{zk}) dS_1 + \frac{k}{S_2} \int_{S_2} (U_{xn} U_{xk} + U_{yn} U_{yk} + U_{zn} U_{zk}) dS_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{S_1} \int_{S_1} (\overline{P}_x P_{xn} + \overline{P}_y P_{yn} + \overline{P}_z P_{zn}) dS_1 + \frac{k}{S_2} \int_{S_2} (\overline{U}_x U_{xn} + \overline{U}_y U_{yn} + \overline{U}_z U_{zn}) dS_2 \tag{2.8}$$



Фиг. 2

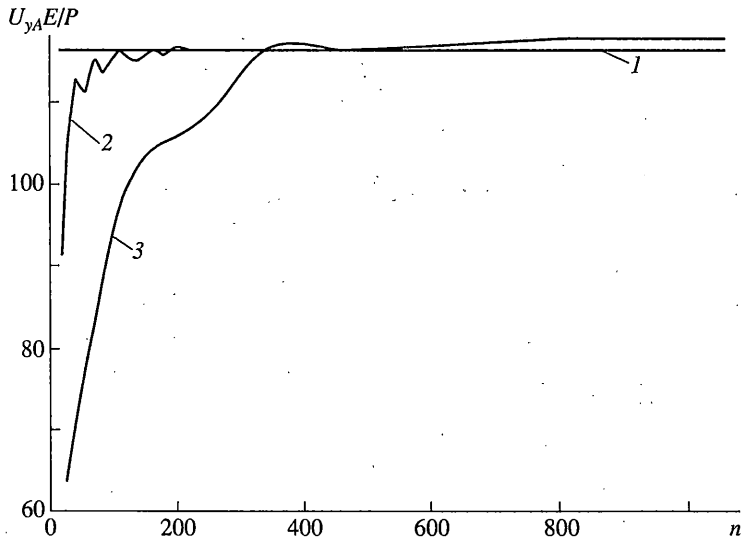
Коэффициентом k можно регулировать погрешность удовлетворения граничным условиям. При увеличении k возрастает точность удовлетворения граничным условиям в перемещениях и снижается в напряжениях. При уменьшении k эффект получается обратным. По существу, коэффициент k представляет собой оценку влияния на результат расчета кинематических и силовых граничных условий соответственно.

3. Иллюстрация возможностей метода. Для иллюстрации возможностей метода ФКО была решена тестовая задача об изгибе консольной балки единичной толщины, изображенной на фиг. 2. К свободному концу балки приложена сила P в виде распределенных по параболическому закону касательных напряжений.

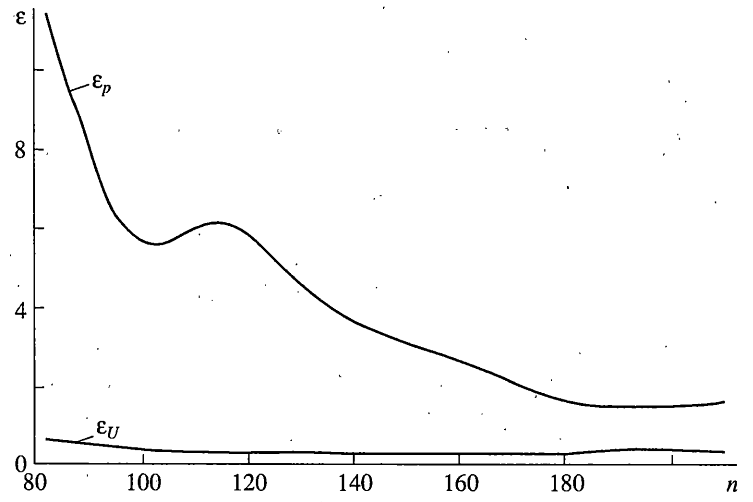
В качестве фиктивной области использовался круг, общее решение уравнений теории упругости для которого получено в [6] и в полярной системе координат имеет вид

$$
\begin{aligned}
U_r &= \frac{1}{E}\left\{2b_0(1-\mu)r + \sum_{n=1}^{N}[-a_n n(1+\mu)r^{n-1} + b_n(2(1-\mu)-n(1+\mu))r^{n+1}]\cos(n\phi)\right\} + \\
&+\frac{1}{E}\left\{\sum_{n=1}^{N}[-c_n n(1+\mu)r^{n-1} + d_n(2(1-\mu)-n(1+\mu))r^{n+1}]\sin(n\phi)\right\} \\
U_\phi &= \frac{1}{E}\left\{-4d_0 r + \sum_{n=1}^{N}[a_n n(1+\mu)r^{n-1} + b_n(4+n(1+\mu))r^{n+1}]\sin(n\phi)\right\} + \\
&+\frac{1}{E}\left\{\sum_{n=1}^{N}[-c_n n(1+\mu)r^{n-1} - d_n(4+n(1+\mu))r^{n+1}]\cos(n\phi)\right\} \\
\sigma_r &= 2b_0 - \sum_{n=1}^{N}[a_n n(n-1)r^{n-2} + b_n(n+1)(n-2)r^n]\cos(n\phi) - \\
&-\sum_{n=1}^{N}[c_n n(n-1)r^{n-2} + d_n(n+1)(n-2)r^n]\sin(n\phi) \qquad (3.1) \\
\sigma_\phi &= 2b_0 + \sum_{n=1}^{N}[a_n n(n-1)r^{n-2} + b_n(n+1)(n+2)r^n]\cos(n\phi) + \\
&+\sum_{n=1}^{N}[c_n n(n-1)r^{n-2} + d_n(n+1)(n+2)r^n]\sin(n\phi) \\
\tau_{r\phi} &= \sum_{n=1}^{N}[a_n n(n-1)r^{n-2} + b_n n(n+1)r^n]\sin(n\phi) - \sum_{n=1}^{N}[c_n n(n-1)r^{n-2} + d_n n(n+1)r^n]\cos(n\phi)
\end{aligned}
$$

где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $N \to \infty$.



Фиг. 3

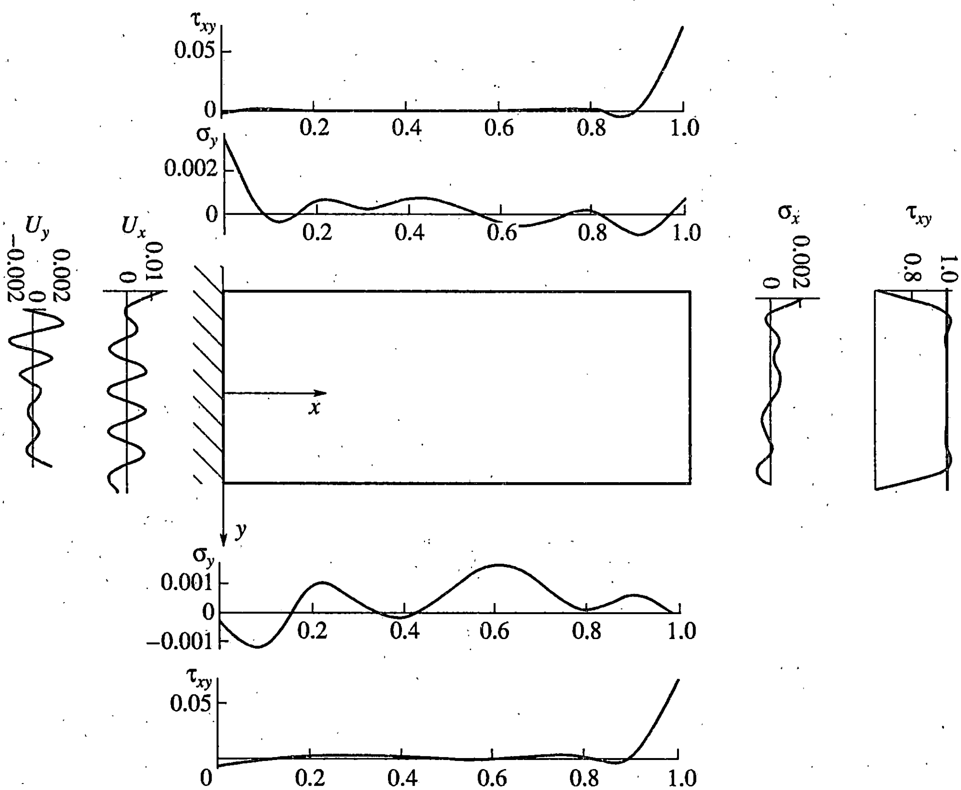


Фиг. 4

Результаты решения задачи приведены на фиг. 3 (кривая *2*) в виде зависимости вертикального перемещения свободного конца балки (точка *A*) от порядка системы разрешающих алгебраических уравнений. Для сравнения на той же фигуре приведена аналогичная кривая сходимости 3, полученная методом конечных элементов с помощью пакета ANSYS 5.5. Здесь же в виде горизонтальной линии *1* изображено известное эталонное решение тестовой задачи, заимствованное из [7].

Как видно из приведенных данных, метод ФКО сходится к эталонному решению быстрее, чем метод конечных элементов.

Остановимся теперь на вопросах оценки погрешности расчетных результатов (фиг. 4). Как известно, в методе конечных элементов дифференциальные уравнения в пределах расчетной области удовлетворяются приближенно. Даже если применять специальные элементы с точным удовлетворением дифференциальных уравнений, их удовлетворение будет нарушаться на границах элементов. Поэтому оценить влияние



Фиг. 5

этих нарушений на результат решения граничной задачи представляет серьезные трудности.

В методе ФКО дифференциальные уравнения задачи удовлетворяются тождественно во всей расчетной области, и о погрешности полученного решения можно судить по точности удовлетворения граничным условиям задачи. Как следует из сопоставления фиг. 3, 4, эти величины коррелируют между собой, т.е. при уменьшении погрешности удовлетворения граничным условиям $\varepsilon(\%)$ приближенное решение стремится к эталонному (ε_p – погрешность по напряжениям, ε_U – по перемещениям).

Метод ФКО предоставляет уникальную возможность воссоздать граничные условия той краевой задачи, которым соответствует полученное этим методом решение. Так, подставив в решение (3.1) координаты границ заданной области и производя вычисления, например, при n = 200, получим некоторые распределения напряжений и перемещений, приведенные на фиг. 5 в относительных величинах: $U_i/U_{\max}$, σ_{ij}/P. Как видно из рисунка, эти распределения отличаются от граничных условий исходной краевой задачи по перемещениям не более чем на $\varepsilon_U = 0.5\%$, и по напряжениям – не более чем на $\varepsilon_p = 2\%$. Поскольку решение (3.1) тождественно удовлетворяет дифференциальным уравнениям задачи при любых n, то можно утверждать, что при n = 200 удалось получить точное решение задачи теории упругости, соответствующее граничным условиям, представленным на фиг. 5. Причем, можно оценить, на сколько граничные условия этой задачи отличаются от заданных.

В практике компьютерного моделирования некоторая корректировка граничных условий как правило бывает возможна. Дело в том, что граничные условия решаемых задач обычно сами по себе являются результатом каких-либо гипотез, либо они представляют данные измерений физических приборов, которые всегда имеют некоторую погрешность. Поэтому предлагается при постановке краевых задач, помимо формулировки граничных условий, задавать допуск на их выполнение. И если ε_p и ε_U укладываются в этот допуск, то вопрос об оценке погрешности расчетных результатов снимается в принципе.

Естественно, такой подход к оценке надежности результатов вызывает вопрос об устойчивости решения задачи по отношению к возмущениям граничных условий. Ответ на этот вопрос дает принцип Сен-Венана, утверждающий, что если локальную систему сил заменить статически эквивалентной, то результат этой замены в упругой среде быстро затухает. Применяемый здесь метод наименьших квадратов приводит именно к статически эквивалентной замене граничных функций.

4. Заключение. Основным достоинством метода ФКО является возможность надежной оценки погрешности расчетных результатов. Так как уравнения теории упругости методом ФКО удовлетворяются тождественно во всей расчетной области, то о точности полученного решения можно судить по погрешности удовлетворения граничным условиям, которую всегда можно вычислить. Таким образом, всегда можно воссоздать краевую задачу, которую методом ФКО удается решить точно. И если граничные условия этой краевой задачи незначительно отличаются от заданных, и это отличие укладывается в заранее определенный допуск, то вопрос о погрешности расчетных результатов снимается в принципе.

Таким образом, метод ФКО можно рекомендовать для решения краевых задач, требующих повышенной точности и надежности расчетных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-01049).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ясницкий Л.Н.* Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь: Изд-во ППИ, 1973. С. 78–83.
2. *Ясницкий Л.Н.* Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред. М.: Наука, 1992. 126 с.
3. *Ясницкий Л.Н.* Суперпозиция базисных решений в методах типа Треффца // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 95–101.
4. *Ясницкий Л.Н.* Композиция расчетной области в методе фиктивных канонических областей // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 168–172.
5. *Лейбензон Л.С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1943. 287 с.
6. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 451 с.
7. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.

Пермь

Поступила в редакцию
31.11.2000