

УДК 531.391

© 2002 г. В.Г. ВЕРЕТЕННИКОВ, В.А. СИНИЦЫН

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ: ЖЕСТКОЕ КОЛЕСО – ДЕФОРМИРУЕМЫЙ РЕЛЬС

Изучается качение жесткого колеса по деформируемому упругому рельсу, лежащему на вязкоупругом основании. Ранее [1, 2] при составлении модели системы использовалась приближенная теория Бернулли – Эйлера. Здесь применяется уточненная теория изгиба стержней С.П. Тимошенко. В функционале кинетической энергии дополнительно учтены инерционные свойства поперечных сечений балки; диссипативные силы приняты в соответствии с теорией Рэлея. Проведен анализ граничных условий, которые рассматриваются как идеальные связи. С помощью принципа Гамильтона – Остроградского составлены уравнения движения. Найденные реакции дают количественное описание физических свойств процесса: возникновение дополнительных перерезывающих сил в сечениях балки, реакцию в месте контакта, в том числе момент сопротивления качению. Обнаружено явление псевдоскольжения (*creep*) при поперечных деформациях. Найдены новые критические скорости и уравнения формы нейтральной оси рельса при стационарном качении колеса.

1. Механическая схема. Рассматривается плоское движение системы: жесткое колесо – деформируемый рельс. Ось колеса является осью динамической симметрии, рельс моделируется однородной балкой, испытывающей поперечный изгиб в условиях гипотезы плоских сечений. В недеформированном состоянии рельс расположен горизонтально на вязкоупругом основании. Внешние по отношению к системе активные силы, приложенные к колесу, приведены к его центру и включают силу (представленную в виде двух составляющих F и P) и пару с моментом M (фиг. 1).

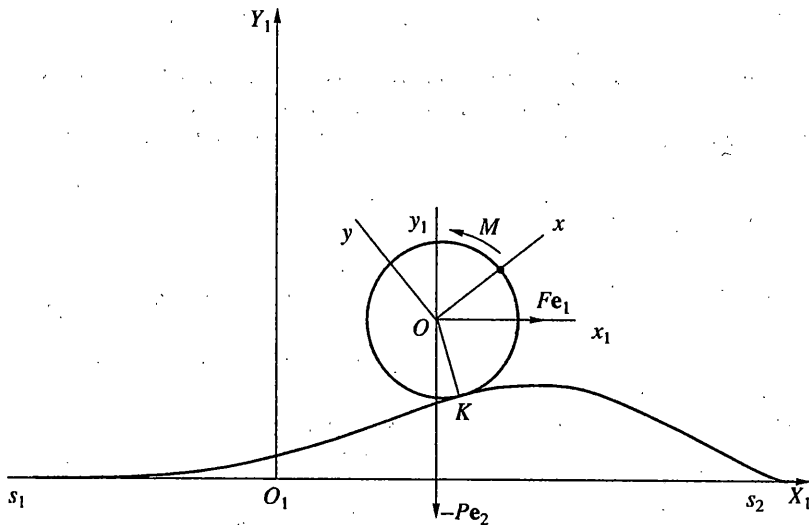
На фиг. 2 приняты следующие обозначения: $w(s, t)$ – поперечное перемещение точки нейтральной линии рельса с горизонтальной координатой s ($s \in [s_1, s_2]$), параллельное оси O_1Y_1 инерциальной системы координат в момент времени t ; $s_0 \in [s_1, s_2]$ – координата той точки нейтральной линии рельса l_0 , которой соответствует точка K на линии контакта l_1 ; $\psi(s, t)$ – угол поворота плоского сечения балки; x_1, y_1, θ – координаты центра масс O колеса и угол его поворота (Ox_1y_1 – оси координат, связанные с колесом).

Модель динамики системы составляется с помощью метода переменного действия, состоящего в распространении принципа Гамильтона – Остроградского на системы с распределенными параметрами. Для применения этого принципа требуются: функционал действия по Гамильтону и изменение действия за счет активных непотенциальных сил и сил реакций связей, не учтенных выбором определяющих параметров.

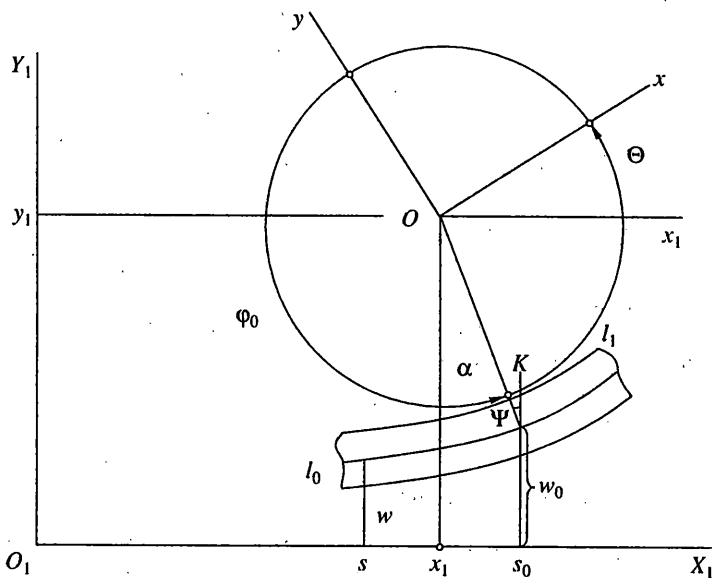
2. Действие. Действие по Гамильтону S строится на основе функции Лагранжа $L = T - \Pi$ (T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.1)$$

где $[t_1, t_2]$ – фиксированный отрезок времени.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии круглого колеса при плоском качении и кинетической энергии рельса

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{J_0 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} (\rho w^2 + J \dot{\psi}^2) ds \quad (2.2)$$

где m и J_0 – масса и момент инерции колеса относительно оси симметрии соответственно; ρ и $J ds$ – линейная массовая плотность и момент инерции элементарной массы рельса относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через соответствующую точку нейтральной линии; точка означает дифференци-

рование по времени t . С помощью параметра J характеризуются продольные силы инерции.

Составим функционал потенциальной энергии. Потенциальными считаем внутренние упругие силы изгиба балки и линейные упругие силы основания.

Используем уточненную теорию С.П. Тимошенко, в которой функционал потенциальной энергии имеет вид [3]:

$$\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} [k_1 \psi'^2 + k_3 (\psi - w')^2] ds \quad (2.3)$$

где k_1 – коэффициент, зависящий от модуля упругости и геометрии поперечного сечения рельса (пропорциональный h^4 : h – характерный размер поперечного сечения); k_3 – коэффициент, определяемый по модулю сдвига и геометрии поперечного сечения (пропорциональный h^2) и учитывающий также неравномерность касательных напряжений по сечению; штрихом обозначено дифференцирование по s .

Слагаемые в (2.3) имеют следующий механический смысл: первое слагаемое – потенциальная энергия упругих изгибающих моментов и зависящих от них перерезывающих сил, а второе – потенциальная энергия дополнительных упругих перерезывающих сил.

Примечание 1. В теории Бернулли – Эйлера потенциальная энергия имеет вид интеграла $\frac{1}{2} \int (k w''^2) ds$ ($s_1 \leq s \leq s_2$), где k – изгибная жесткость рельса. Этот функционал можно получить из (2.3) подстановкой равенства $\psi = w'$ (далее это условие будет рассматриваться как связь) и равенства, получаемого из него дифференцированием по s .

С учетом линейных упругих сил деформации основания, на котором лежит рельс, потенциальная энергия системы представляется функционалом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} [k_1 \psi'^2 + k_2 w^2 + k_3 (\psi - w')^2] ds \quad (2.4)$$

где k_2 – жесткость основания.

При кинетической энергии (2.2) и потенциальной энергии (2.4) функция Лагранжа представляется в виде двух слагаемых:

$$L = L_0 + \int_{s_1}^{s_2} \Lambda ds, \quad L_0 = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{J_0 \dot{\theta}^2}{2} \quad (2.5)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} [\rho \dot{w}^2 + J \dot{\psi}^2 - k_1 \psi'^2 - k_2 w^2 - k_3 (\psi - w')^2]$$

Изменение действия по Гамильтону (2.1) при варьировании определяющих координат и их производных (с учетом перестановочных соотношений) находится по правилам вариационного исчисления [4]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \dots \quad (2.6)$$

$$q_1 = x_1(t), \quad q_2 = y_1(t), \quad q_3 = \theta(t)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \Lambda ds dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \sum_{j=1}^2 E_j(\Lambda) \delta u_j ds dt + \dots \quad (2.7)$$

$$u_1(s, t) = w(s, t), \quad u_2(s, t) = \psi(s, t)$$

$$E_j = \frac{\partial}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{u}_j} \right\} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j'} \right\}$$

В операторе Эйлера – Остроградского E_J операция над выражением в фигурных скобках является полной частной производной [4]. В выражениях (2.6), (2.7) не выписаны слагаемые, относящиеся к моментам времени t_1, t_2 и в точках с координатами $s = s_1, s = s_2$.

Структура функционала диссипативных сил вязкого трения часто принимается [2] аналогичной структуре функционала потенциальной энергии. Однако, вопрос об экспериментальном подтверждении существования материалов, в которых внутренняя диссипация энергии пропорциональна скорости деформирования (материал Кельвина – Фойхта), остается открытым [5]. Учтем только малые силы внешнего вязкого трения, действующие на рельс, с диссипативным функционалом следующего вида

$$D = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \varepsilon (d_1 \dot{\psi}^2 + d_2 \dot{w}^2) ds \quad (2.8)$$

Здесь d_1, d_2 – коэффициенты вязкого трения; ε – малый параметр.

Изменение действия за счет виртуальной работы сил вязкого трения, заданных функционалом (2.8), имеет вид

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \varepsilon (d_1 \dot{\psi} \delta \psi + d_2 \dot{w} \delta w) ds dt \quad (2.9)$$

Изменение действия за счет виртуальной работы внешних активных (заданных) сил, приложенных к жесткому колесу, находится как обычно в аналитической механике.

3. Анализ связей. Упомянувшееся в примечании 1 условие

$$f = \psi - w' = 0 \quad (3.1)$$

будем рассматривать как идеальную связь. Реакция идеальной связи задается с помощью уравнения для виртуальных вариаций, получаемого из уравнения связи.

Примечание 2. Термин "виртуальные вариации" использовался и ранее (см., например, [6]) для тех вариаций определяющих координат дискретной системы, которые обладают свойствами виртуальных перемещений. Проблема формирования правил составления уравнений для виртуальных вариаций и использования этих уравнений в интегральных и дифференциальных принципах механики имеет известную историю, начиная с классической ошибки Лагранжа в задаче об определении натяжения гибкой нити [7]. Исключение из рассмотрения уравнения для виртуальных вариаций приводит к ошибке в определении реакции соответствующей связи.

Из (3.1) получаем уравнение для виртуальных вариаций

$$\delta f = \delta \psi - \delta w' = 0 \quad (3.2)$$

Положим, что при качении колеса в месте контакта отсутствует проскальзывание, тогда имеем равенство скоростей материальных точек колеса и рельса, находящихся в точке K (фиг. 2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + r\dot{\theta} \cos \alpha &= -h\dot{w}'_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_1 + r\dot{\theta} \sin \alpha &= -h\dot{w}'_0 \sin \alpha + \dot{w}_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь нижний индекс (0) указывает на то, что параметр принимается при $s = s_0$, где s_0 – координата точки нейтральной линии l_0 , которой соответствует точка K на линии касания l_1 (в недеформированном состоянии нейтральная линия совпадает с осью O_1X_1 , а линия касания l_1 задается уравнением $Y_1 = h; 2h$ – высота рельса); $w_0 = w(s_0, t)$, $\psi_0 = \psi(s_0, t)$; α – угол между вертикалью и радиусом OK ; φ – угловая координата точек обода колеса (φ_0 соответствует точке K в месте контакта). Соответственно имеется

равенство [2]:

$$\alpha = \theta + \varphi_0 - \frac{3}{2}\pi \quad (3.4)$$

Отдельно взятое равенство (3.4) представляет собой чисто кинематическое соотношение. Однако, учитывая в точке контакта равенство

$$\operatorname{tg} \alpha = w'_0 \quad (3.5)$$

после исключения α из (3.4) и (3.5) получаем связь между физическими параметрами. Ограничив область исследования неравенствами $|\alpha| \ll 1$, $|w'_0| \ll 1$, из (3.3) и (3.4), (3.5), получаем уравнения для виртуальных вариаций (r – радиус колеса):

$$\begin{aligned} \delta x_1 + r\delta\theta &= -h\delta w'_0 \\ \delta y_1 + rw'_0\delta\theta &= -hw'_0\delta w'_0 + \delta w_0, \quad \delta\theta = \delta w'_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения связей и уравнения для виртуальных вариаций вместе с функционалами (п. 2) определяют модель движения системы.

4. Интегральный принцип. Уравнения движения системы. Уравнения движения системы получим с помощью интегрального принципа для интервала изменения s , состоящего из двух равных частей: $[s_1, s_0]$ и $(s_0, s_2]$, при $s_1 = -b$, $s_2 = b$ и достаточно большом значении b [2].

Составим интегральное равенство принципа Гамильтона – Остроградского

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} [-\varepsilon(d_1\dot{\psi}\delta\psi + d_2\dot{w}\delta w) + \lambda(\delta\psi - \delta w')] ds dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (F\delta x_1 - P\delta y_1 + M\delta\theta) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mu_1(\delta x_1 + r\delta\theta + h\delta w'_0) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [\mu_2(\delta y_1 + rw'_0\delta\theta + hw'_0\delta w'_0 - \delta w_0) + v(\delta\theta - \delta w'_0)] dt = 0 \\ & \delta u_j(s, t_1) = \delta u_j(s, t_2) = 0 \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\lambda(s, t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $v(t)$ – неопределенные множители Лагранжа, задающие реакции связей. В подынтегральном выражении (4.1) раскрываем по формулам (2.6), (2.7) с учетом перестановочных соотношений ($\delta\psi' = (\delta\psi)'$, $\delta w' = (\delta w)'$). После интегрирования по частям, приравнявая нулю коэффициенты при вариациях δx_1 , δy_1 , $\delta\theta$, δw , $\delta\psi$, получаем дифференциальные уравнения

$$m\ddot{x}_1 = F + \mu_1 \quad (4.2)$$

$$m\ddot{y}_1 = -P + \mu_2 \quad (4.3)$$

$$J_0\ddot{\theta} = M + \mu_1 r + \mu_2 r w'_0 + v \quad (4.4)$$

$$J\ddot{\psi} - k_1\psi'' + k_3(\psi - w') + \varepsilon d_1\dot{\psi} - \lambda = 0 \quad (4.5)$$

$$\rho\ddot{w} + k_2 w + k_3(\psi' - w'') + \varepsilon d_2\dot{w} - \lambda' = 0 \quad (4.6)$$

и условия сопряжения в точке $s = s_0$:

$$-v + \mu_1 h + \mu_2 h w'_0 = 0 \quad (4.7)$$

$$-\lambda(s_0 - 0, t) + \lambda(s_0 + 0, t) - \mu_2(t) = 0 \quad (4.8)$$

Полученные уравнения дополняются условиями непрерывности определяющих координат и их производных по s до второго порядка в месте контакта, граничными условиями $u_j(s_1, t) = u_j(s_2, t) = 0$, уравнениями связей и начальными условиями.

Вид правых частей уравнений (4.2)–(4.4) показывает, что реакция рельса на колесо состоит из силы, приложенной в точке K , и пары, момент которой направлен по оси колеса. Момент реакции v можно трактовать как момент трения качения. Равенство (4.7) означает, что главный момент этой реакции относительно центра, лежащего на нейтральной оси равен нулю, т.е. реакция рельса на колесо эквивалентна равнодействующей, проходящей через этот центр. Таким образом, получило свое обоснование предложение [2]: "считать, что реакция, возникающая в точке K , переносится в соответствующую точку нейтральной линии с координатой $s_0 \dots$ ". Неравенство нулю момента реакции относительно точки контакта указывает на то, что порядок касания, в реальности, выше первого.

Неопределенный множитель $\lambda(s, t)$ (4.5) имеет смысл перерезывающей силы (см. [8]) в сечениях рельса. Перерезывающая сила в сечении рельса с координатой $s = s_0$ (см. (4.8)) претерпевает разрыв, равный по величине вертикальной составляющей реакции колеса на рельс.

Уравнения (4.5), (4.6), в отсутствие связи (3.1) и диссипации, совпадают с уравнениями, полученными в работе [8].

Подставив уравнение связи (3.1) в уравнения (4.5), (4.6), имеем

$$J\ddot{\psi} - k_1\psi'' + \varepsilon d_1\dot{\psi} - \lambda = 0 \quad (4.9)$$

$$\rho\ddot{w} + k_2w + \varepsilon d_2\dot{w} - \lambda' = 0 \quad (4.10)$$

Сопоставление (4.9), (4.10) с уравнениями, полученными в отсутствие связи (3.1), приводит к выводу о том, что идеальная связь (3.1) может быть реализована бесконечным увеличением жесткости балки при сдвиге ($k_3 \rightarrow \infty$) (переход от теории Тимошенко к теории Бернулли – Эйлера).

Исключив множитель λ и координату ψ (с учетом уравнения связи (3.1)) из уравнений (4.9), (4.10), получим уравнение для определения прогиба рельса

$$k_1w^{IV} - J\ddot{w}'' + \rho\ddot{w} - \varepsilon d_1\dot{w}'' + \varepsilon d_2\dot{w} + k_2w = 0, \quad s \neq s_0 \quad (4.11)$$

Если закон изменения прогиба $w(s, t)$ получен, то из (4.9), (4.10) (с учетом уравнения связи (3.1)) находится дополнительная перерезывающая сила, обусловленная реакцией. В частности, это может быть сделано в стационарном режиме движения.

5. Стационарный режим движения системы. Стационарный режим движения системы характеризуется постоянной скоростью оси колеса, постоянной угловой скоростью и неизменным положением точки контакта в системе координат, поступательно перемещающейся с осью, а также постоянным значением мощности диссипативных сил, т.е. когда

$$\dot{x}_1 = c, \quad y_1 = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}, \quad D = \text{const} \quad (5.1)$$

где c – скорость оси колеса, D – значение функционала (2.8).

Подстановка (5.1) в уравнения связей и в уравнении движения (4.3)–(4.5) приводит к равенствам

$$c + r\dot{\theta} \cos \alpha = -h\dot{w}'_0 \cos \alpha, \quad r\dot{\theta} \sin \alpha = -h\dot{w}'_0 \sin \alpha + \dot{w}_0 \quad (5.2)$$

$$F + \mu_1 = 0, \quad -P + \mu_2 = 0, \quad M + \mu_1 r + \mu_2 r\dot{w}'_0 + v = 0 \quad (5.3)$$

Из (5.1) и (5.2) с учетом сделанных выше предположений о малых величинах имеем

$$\dot{w}_0 = \text{const} = -c\dot{w}'_0, \quad c + r_1\dot{\theta} = 0, \quad (\dot{w}'_0 = \dot{\theta}, \quad r_1 = r + h) \quad (5.4)$$

Мгновенный центр вращения колеса смещен на величину $r_1\alpha$ по горизонтали относительно точки нейтральной линии рельса, имеющей координату s_0 . Поэтому (см. (5.4)) на пройденном пути действительное число оборотов колеса ($x_1/(2\pi r_1 \cos \alpha)$) в общем случае отличается от геометрического числа оборотов ($x_1/(2\pi r_1)$), т.е. проявляется своего рода псевдоскольжение. Известное [9] явление крипа (*creep*) обусловлено продольными деформациями основания и (или) периферии колеса, здесь же причиной псевдоскольжения является поперечная деформация:

При стационарном движении выполняется равенство (см. (4.4), (5.3)):

$$M - r_1 F + P r_1 \alpha = 0 \quad (5.5)$$

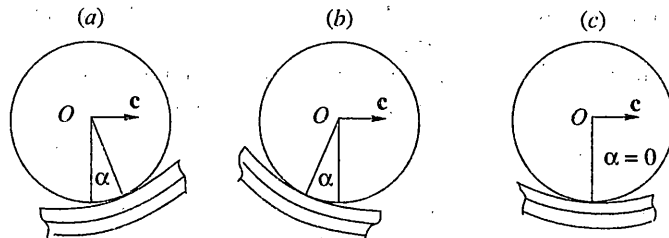
Из (5.4), (5.5) получаем кинематическое и динамическое выражения для угла α (при $c > 0$):

$$\alpha = -\frac{\dot{w}_0}{c} = \frac{r_1 F - M}{r_1 P} \quad (5.6)$$

которым соответствует три варианта относительного расположения колеса и рельса (фиг. 3):

- (a) $\alpha > 0$, $\dot{w}_0 < 0$ при $r_1 F - M > 0$
- (b) $\alpha < 0$, $\dot{w}_0 > 0$ при $r_1 F - M < 0$
- (c) $\alpha = 0$, $\dot{w}_0 = 0$ при $r_1 F = M$ (5.7)

Сравнение мощности активных сил ($N^{(a)} = M\dot{\theta} + Fc$) и мощности всех внешних сил ($N = M\dot{\theta} + Fc + P\dot{w}_0 = 0$), приложенных к колесу, приводит к равенству $-2D = P\dot{w}_0$, где



Фиг. 3

D – значение функционала (2.8) диссипативных сил. Из последнего равенства следуют два вывода: сила P в стационарном движении постоянна, из трех вариантов (5.7) возможны лишь варианты (a) и (c). Причем варианту (c) соответствует модель без диссипации энергии ($\epsilon = 0$ в (2.8)). Для консервативной системы при $c \neq 0$ имеем $\alpha = 0$; касательная к нейтральной линии горизонтальна ($w'_0 = 0$) и $\dot{w}_0 = 0$. В этом случае пригодна кинематическая интерпретация [2] движения оси колеса: гипотетическое колесо радиуса r_1 с центром в точке O катится без скольжения по горизонтальной направленной, совпадающей с недеформированной нейтральной линией.

Система координат, связанная с осью колеса, в стационарном режиме является инерциальной. В этих осях удобно использовать новую координату $\xi = s - ct$ для точек рельса перед колесом ($s > s_0$) и координату $\zeta = ct - s$ для точек рельса за колесом ($s < s_0$). Функции $W(\xi) = w(s, t)$, имеют производные, связанные равенствами вида

$$\dot{w} = -c \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad w' = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{w} = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \dot{w}'' = -c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}, \quad w'' = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (5.8)$$

и аналогично для функции $\Psi(\xi) = \psi(s, t)$. Производные от функции $W(\zeta) = w(s, t)$ (отличаются от (5.8) знаком в нечетном порядке) будут

$$\dot{w} = c \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad w' = -\frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{w} = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \dot{w}'' = c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}, \quad w''' = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (5.9)$$

и аналогично имеем для функций $\Psi(\zeta) = \psi(s, t)$.

Подставив (5.8), (5.9) в (4.11), получаем соответственно уравнения (оставляем одинаковое обозначение производных по переменным ξ и ζ):

$$(k_1 - Jc^2)W^{IV} + \varepsilon d_1 c W'''' + \rho c^2 W'' - \varepsilon d_2 c W' + k_2 W = 0, \quad \xi > 0 \quad (5.10)$$

$$(k_1 - Jc^2)W^{IV} - \varepsilon d_1 c W'''' + \rho c^2 W'' + \varepsilon d_2 c W' + k_2 W = 0, \quad \zeta > 0 \quad (5.11)$$

Условия на бесконечности $W(\pm\infty) = 0, W'(\pm\infty) = 0$.

В консервативном случае уравнения (5.10) и (5.11) совпадают

$$(k_1 - Jc^2)W^{IV} + \rho c^2 W'' + k_2 W = 0 \quad (5.12)$$

что приводит к симметрии решений относительно оси Oy_1 . Можно заметить, что порядок уравнения для консервативной системы тот же, что и уравнения, полученного с учетом внешнего вязкого трения.

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.12), вычисляются по формулам

$$D_n = \pm \left(\frac{-\rho c^2 \pm \Delta}{2(k_1 - Jc^2)} \right)^{1/2}, \quad \Delta = (\rho^2 c^4 + 4k_2 Jc^2 - 4k_1 k_2)^{1/2} \quad (n = 1, \dots, 4) \quad (5.13)$$

Величина Δ в (5.13) представляется в виде произведения

$$\Delta = \rho((c^2 - c_0^2)(c^2 - c_1^2))^{1/2}, \quad c_0^2 = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\rho}(-\sqrt{1 + \mu^2} - \mu)$$

$$c_1^2 = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\rho}(\sqrt{1 + \mu^2} - \mu), \quad \mu = \left(\frac{J}{\rho} \right) \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

Характерные скорости c_1 и c_2 ($c_2^2 = k_1 / J = \sqrt{k_1 k_2} / (\mu\rho)$, $c_2 > c_1$), разделяют весь диапазон скоростей на области, в которых форма рельса качественно различна. В областях $c < c_1$ и $c > c_2$ существуют нетривиальные решения уравнения (5.12) (консервативный случай), удовлетворяющие граничным условиям (значение критической скорости, найденное в [2] получается как значение c_1 при $\mu = 0$). Учет параметра J , как показывает выражение (см. (5.14)), снижает значение критической скорости c_1 и приводит к появлению второй характерной скорости c_2 .

В области скоростей $0 < c < c_1$ корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.12), имеют вид $\pm\alpha \pm i\beta$. Поэтому форма нейтральной оси рельса описывается уравнением

$$W(\xi) = C_1 \exp[(-\alpha + i\beta)\xi] + \bar{C}_1 \exp[(-\alpha - i\beta)\xi], \quad \xi > 0 \quad (5.15)$$

где C_1 и \bar{C}_1 – комплексные постоянные интегрирования (\bar{C}_1 – комплексное число, сопряженное с числом C_1), другие постоянные интегрирования равны нулю согласно условиям на бесконечности. Уравнения, аналогичное (5.15), получаем заменой ξ на ζ :

$$W(\zeta) = C_2 \exp[(-\alpha + i\beta)\zeta] + \bar{C}_2 \exp[(-\alpha - i\beta)\zeta], \quad \zeta > 0$$

При скоростях $c > c_2$ корни характеристического уравнения вещественные $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ и условия на бесконечности также можно удовлетворить при специальном выборе постоянных интегрирования.

В области скоростей колеса $c_2 > c > c_1$ корни характеристического уравнения чисто мнимые $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($\omega_1 < \omega_2$). В этой области параметров нетривиально удовлетворить условиям на бесконечности невозможно, но можно ожидать, что учет малого вязкого сопротивления изменит ситуацию.

Найдем малые поправки к корням характеристического уравнения консервативной системы в области скоростей $c_2 > c > c_1$.

Составляем характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (5.10), в форме

$$(k_1 - Jc^2)(D_n + \varepsilon\delta)^4 + \varepsilon d_1 c(D_n + \varepsilon\delta)^3 + \rho c^2(D_n + \varepsilon\delta)^2 - \varepsilon d_2 c(D_n + \varepsilon\delta) + k_2 = 0 \quad (n = 1, \dots, 4) \quad (5.16)$$

где величины D_n (5.13) удовлетворяют уравнению (5.12), а $\varepsilon\delta$ – малые приращения. С учетом малых первого порядка относительно ε из (5.16) находим, что корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ получают поправки $\varepsilon\delta_j$ ($j = 1, 2$), где

$$\delta_j = -(-1)^j \frac{c(d_2 + d_1\omega_j^2)}{2\Delta} \quad (\delta_1 > 0, \quad \delta_2 < 0) \quad (j = 1, 2) \quad (5.17)$$

Следовательно уравнение формы нейтральной оси рельса перед колесом описывается уравнением

$$W(\xi) = C_1 \exp[(\varepsilon\delta_2 + i\omega_2)\xi] + \bar{C}_1 \exp[(\varepsilon\delta_2 - i\omega_2)\xi], \quad \xi > 0 \quad (5.18)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (5.11) имеет вид

$$(k_1 - Jc^2)(D_n + \varepsilon\delta)^4 - \varepsilon d_1 c(D_n + \varepsilon\delta)^3 + \rho c^2(D_n + \varepsilon\delta)^2 + \varepsilon d_2 c(D_n + \varepsilon\delta) + k_2 = 0 \quad (n = 1, \dots, 4) \quad (5.19)$$

Далее имеем

$$\delta_j = (-1)^j \frac{c(d_2 + d_1\omega_j^2)}{2\Delta} \quad (\delta_1 < 0, \quad \delta_2 > 0) \quad (j = 1, 2)$$

и отрицательной является поправка $\varepsilon\delta_1$ к корням $\pm i\omega_1$. Соответственно, получаем решение уравнения (5.11):

$$W_*(\zeta) = C_2 \exp[(\varepsilon\delta_1 + i\omega_1)\zeta] + \bar{C}_2 \exp[(\varepsilon\delta_1 - i\omega_1)\zeta], \quad \zeta > 0 \quad (5.20)$$

описывающее форму нейтральной оси рельса за колесом. Для определения постоянных интегрирования в (5.18) и (5.20) имеем равенство этих функций и их производных (с учетом различия знаков в нечетных производных) до третьего порядка включительно в точке $\xi = \zeta = 0$. Форма нейтральной оси рельса имеет вид затухающих гармоник: гармоника кривой перед колесом имеет больший декремент и меньший период по сравнению с декрементом затухающей гармоника за колесом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Интеграция" и гранта Минобразования по фундаментальным исследованиям в области машиностроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций: Избр. работы. М.: Наука, 1975. 704 с.

2. Вильке В.Г. О качении жесткого колеса по деформируемому рельсу // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 512–517.
3. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
5. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
6. Румянцев В.В. Об интегральных принципах для неголономных систем // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 3–12.
7. Остроградский М.В. Заметка о равновесии упругой нити // Полн. собр. трудов. Киев: Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. С. 116–117.
8. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
9. Rocard Y. L'Instabilite en Mecanique. Automobiles. Avions. Ponts Suspendus. Paris: Masson, 1954.

Москва

Поступила в редакцию
21.03.2000