

УДК 539.375

© 2002 г. А.Г. БАГДОЕВ, С.Г. СААКЯН

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Решение плоской задачи для трещины, движущейся с произвольной скоростью в изотропной однородной упругой среде, дано в [1] методом сверток.

Антиплоская и плоская задачи для однородной изотропной среды рассмотрены в [2]. Впервые решение антиплоской задачи для однородной изотропной среды дано в [3]. Широкий круг вопросов, связанных с распространением трещины, дан в [4]. Решения [2, 3] основаны на методе, развитом в задаче обтекания крыла [5]. Анизотропная антиплоская задача о трещине в однородной упругой среде рассмотрена в [6].

В настоящей работе рассматривается распространение трещины с произвольной скоростью в неоднородной анизотропной упругой среде для антиплоской задачи. Получены решения для малой и произвольной неоднородности для перемещения на трещине и для малой неоднородности для напряжений вне трещины.

1. В плоскости x, y трещина занимает некоторую область оси x , причем ее концы $x = l_1(t)$ и $x = l_2(t)$ движутся по произвольному закону. Имеется единственная компонента перемещения среды u по оси z и напряжения τ_{xz}, τ_{yz} .

Для напряжений имеют место [6] соотношения

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\tau_{yz}}{\rho} = a_{12}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

где ρ – плотность среды, a_1^2, a_2^2, a_{12}^2 – постоянные.

Рассматривается полуплоскость $y > 0$ и принято, что $\rho = \rho(y)$. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Подставляя (1.1) в (1.2) и вводя переменные

$$x_1 = x - (a_{12}^2 / a_2^2) y, \quad y_1 = (a / a_2^2) y \quad (1.3)$$

можно получить соотношения

$$\tau_{yz} / \rho = a \partial u / \partial y_1, \quad a^2 = a_1^2 a_2^2 - a_{12}^4 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{a_2^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Таким образом приходим к изотропной неоднородной среде. Полагая $\rho(y) = \rho_0 e^{ky_1}$ и вводя функцию

$$U = P e^{-\frac{1}{2}ky_1} \quad (1.6)$$

можно из (1.4), (1.5) получить

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho} = a \left(\frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{k}{2} P \right) e^{\frac{1}{2}ky_1} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} - \frac{k^2}{4} P = \frac{a^2}{a^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$y = 0, \quad \frac{\tau_{yz}}{\rho} = a \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\tau(x, t)}{\rho}, \quad l_1(t) < x < l_2(t) \quad (1.9)$$

$$u = 0, \quad x > l_2(t), \quad x < l_1(t)$$

Граничную задачу (1.8), (1.9) можно решать методом свертки [1], однако из-за неоднородности получаются сложные квадратуры.

Поэтому в начале предположим, что неоднородность мала, и оставим в решении только первые степени разложений по k (параметр неоднородности).

Тогда уравнение (1.8) запишется как для однородной изотропной упругой среды

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{a^2}{a_1^2} \quad (1.10)$$

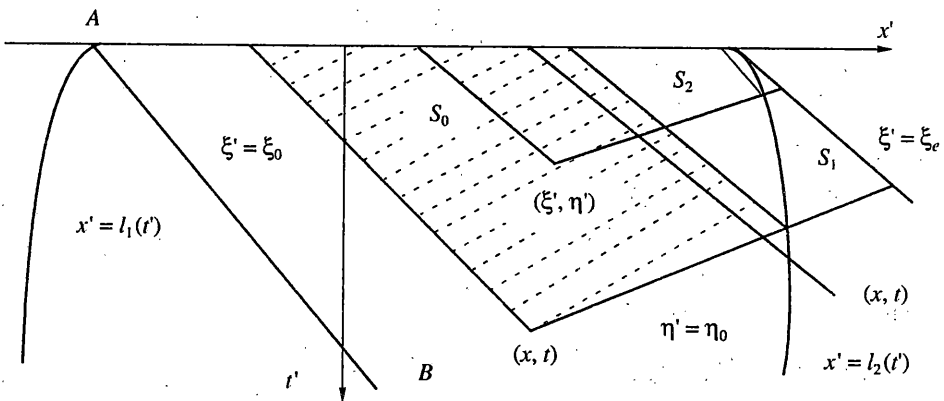
а граничные условия (1.9) дают

$$y = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{k}{2} P = \frac{\tau'(x, t)}{\rho a}, \quad l_1(t) < x < l_2(t) \quad (1.11)$$

$$P = 0, \quad x > l_2(t), \quad x < l_1(t)$$

Рассмотрим решение для полубесконечной трещины, полагая $l_1(t) = -\infty$, т.е. для тех значений x, t , для которых ее концы взаимно не влияют.

Для конечной трещины полученное далее решение верно правее характеристики AB (фигура).



Введем функции $v = \partial P / \partial y_1$, и при $y = 0$ положим

$$v(x, 0, t) = v(x, t), \quad P = P_+ + P_-, \quad v = v_+ + v_- \quad (1.12)$$

где индекс (+) соответствует функциям, равным нулю при $x < l_2(t)$, индекс (-) равным нулю при $x > l_2(t)$.

Тогда условия (1.11) запишутся в виде

$$v_- - \frac{k}{2} P_- = f(x, t), \quad f(x, t) = \frac{\tau'(x, t)}{\rho a}; \quad P_+ = 0 \quad (1.13)$$

2. Решение (1.10) при граничном условии $\partial P / \partial y_1 = v(x, t)$ имеет вид интеграла Поссю [3-5]:

$$P(x, t) = -\frac{c}{\pi} \iint \frac{v(x', t') dx' dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - (x-x')^2}} \quad (2.1)$$

Из формулы (2.1), используя условие $P = 0$ при $x > l_2(t)$ и вводя характеристические координаты [3, 5]:

$$\xi' = ct' - x', \quad \eta' = ct' + x'; \quad \xi_0 = ct - x, \quad \eta_0 = ct + x \quad (2.2)$$

можно показать, следуя [3-5], что решение для v_+ запишется в виде

$$v_+ = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\eta_0 - \eta_2(\xi_0)}} \int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)} v_-(x', t') \frac{\sqrt{\eta_2(\xi_0) - \eta'}}{\eta_0 - \eta'} d\eta' \quad (2.3)$$

Следует отметить, что как и в [3-5], принято $l_2(t) < c$, где точка означает дифференцирование по t :

$$\eta_2(\xi_0) = l_2(t_2) + ct_2, \quad ct_2 - l_2(t_2) = ct - x \quad (2.4)$$

Здесь $l_2(t_2)$, t_2 есть точка пересечения характеристики $\xi' = \xi_0 = \text{const}$ с кривой $x' = l_2(t')$ движения края трещины (фигура). Переход от интегрирования по η' к интегрированию по x' , согласно (2.2), (2.4), дает вдоль $\xi' = \xi_0$ [3]:

$$\begin{aligned} \eta_0 - \eta' &= 2(x_0 - x'), \quad \eta_2(\xi_0) - \eta' = 2\{l_2(t_2) - x'\} \\ \eta_0 - \eta_2(\xi_0) &= 2\{x - l_2(t_2)\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом из (2.3) получится

$$v_+ = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x - l_2(t_2)}} \int_{x-ct}^{l_2(t_2)} v_-(x', t + \frac{x' - x}{c}) \frac{\sqrt{l_2(t_2) - x'}}{x - x'} dx' \quad (2.6)$$

что совпадает с решением [3] в размерных координатах, причем в данном случае v_- неизвестно и по (1.13):

$$v_- = f(x, t) + \frac{1}{2} kP \quad (2.7)$$

где P также неизвестно. Следует отметить, что интегрирование в (2.1) ведётся по областям $s_0 + s_1 + s_2$, (фигура) [15].

При этом, согласно фигуре, из граничного условия $P = 0$ при $x > l_2(t)$ (2.1) следует из [2]:

$$\int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} \frac{\tau_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' + \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} \frac{\tau_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' = 0 \quad (2.8)$$

$$\tau_1(\xi', \eta') = v(x', t'), \quad \eta_2(\xi') = l_2(t'_2) + ct'_2, \quad l_2(t') - ct'_2 = \xi'$$

Тогда можно показать, что в (2.1) интегралы по s_1, s_2 сокращаются и останется [5] интеграл по s_0 , т.е. по заштрихованной области (см. фигуру). Тогда, интегрируя в (2.1), как и в [2, 4, 5], можно получить

$$P_- = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \int_{-\xi'}^{\eta_0} \frac{\nu_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' \quad (2.9)$$

$$\nu_1 = f(x', t') + \frac{1}{2} k \Phi_-(\xi', \eta'), \quad \Phi_-(\xi', \eta') = P_-(x', t') \quad (2.10)$$

При этом для $\Phi_-(\xi', \eta')$ получается интегральное уравнение $f_1(\xi', \eta') = f(x', t')$:

$$\Phi_-(\xi_0, \eta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \frac{f_1(\xi', \eta') + \frac{1}{2} k \Phi_-(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' \quad (2.11)$$

$$\xi_\alpha(\eta_0) = ct_3 - l_2(t_3), \quad ct_3 + l_2(t_3) = ct + x \quad (2.12)$$

взятым вдоль $\eta' = \eta_0$. В случае однородной среды $k = 0$ и тогда

$$\Phi_-^0(\xi_0, \eta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \int_{-\xi'}^{\eta_0} \frac{f_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' \quad (2.13)$$

Переходя к краю трещины $x \approx l_2(t)$ и учитывая узость области интегрирования по ξ' , можно получить в физических переменных x' с учетом (2.5):

$$\Phi^0(\xi_0, \eta_0) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\xi_0 - \xi_\alpha(\eta_0)} \sqrt{2} \int_{x-ct}^x f\left(x', t + \frac{x'}{c} - \frac{x}{c}\right) \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} \quad (2.14)$$

где согласно (2.12)

$$\xi_0 - \xi_\alpha(\eta_0) \approx \{l_2(t) - x\} \frac{2}{1 + l_2(t)/c} \quad (2.15)$$

Окончательно вблизи края трещины при $k = 0$, т.е. в нулевом приближении, будем иметь

$$\Phi_-^0 = P_-^0 = -\frac{1}{\pi} \sqrt{l_2(t) - x} \frac{2}{\sqrt{1 + l_2(t)/c}} \int_{x-ct}^x f\left(x', t + \frac{x'}{c} - \frac{x}{c}\right) \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} \quad (2.16)$$

Таким образом, в первом порядке по k из (2.11) получится замкнутое решение, причем под знаком интегралов в (2.11) $\Phi_-(\xi_0, \eta_0)$ берется по (2.13), при определении $\Phi^0(\xi', \eta')$ следует выбрать, как и в (2.13), область интегрирования, проводя характеристики $\eta'' = \eta', \xi'' = \xi', \xi'' = \xi_\alpha(\eta')$. Тогда получим

$$\Phi^0(\xi', \eta') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta')}^{\xi'} \frac{d\xi''}{\sqrt{\xi' - \xi''}} \int_{-\xi''}^{\eta'} \frac{f_1(\xi'', \eta'')}{\sqrt{\eta' - \eta''}} d\eta'' \quad (2.17)$$

$$\xi'_\alpha(\eta') = ct'_3 - l_2(t'_3), \quad ct'_3 + l_2(t'_3) = \eta'$$

Таким образом, формула (2.11) дает для любой точки (x, t) значение $P_-(x, t)$, равное $\Phi_-(\xi', \eta')$, причем для малых k под знаком интегралов $\Phi_-^0(\xi', \eta')$ дано (2.17); при $x \approx l_2(t)$ имеем

$$P_- = -\frac{2}{\pi} \sqrt{l_2(t) - x} \frac{1}{\sqrt{1 + l_2(t)/c}} \int_{x-ct}^x \left\{ f\left(x', t + \frac{x'}{c} - \frac{x}{c}\right) + \frac{k}{2} \Phi_-^0(\xi_0, \xi_0 + 2x') \right\} \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} \quad (2.18)$$

При этом для $y = 0$ перемещение на трещине $u = P_-$.

В то же время для любых значений x, t , где $x > l_2(t)$, v_+ , определяется по (2.3), (2.6), где под знаком интеграла

$$v_-\left(x', t + \frac{x'}{c} - \frac{x}{c}\right) = f\left(x', t + \frac{x'}{c} - \frac{x}{c}\right) + \frac{k}{2} \Phi_-^0(\xi_0, \eta') \quad (2.19)$$

Причем в (2.17) следует с учетом (2.8) соотношения, записанные для точки ξ', η' , так же как в (2.9), интегрировать по следующей области

$$\Phi_-^0(\xi_0, \eta') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta')}^{\xi_0} \frac{d\xi''}{\sqrt{\xi_0 - \xi''}} \int_{-\xi''}^{\eta'} \frac{f_1(\xi'', \eta'') d\eta''}{\sqrt{\eta' - \eta''}} \quad (2.20)$$

При этом для $x \approx l_2(t)$, $\xi_\alpha(\eta')$ в отличие от $\xi_\alpha(\eta_0)$ не близко к ξ_0 и неоднородность существенно влияет на напряжение v_+ вблизи края трещины.

Таким образом, при $x \approx l_2(t)$ можно с учетом (2.6) записать

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho a} = v_+ = \frac{1}{\pi} K \frac{1}{\sqrt{x - l_2(t)}}$$

$$K = -\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} l_2^2(t)} \int_{x-ct}^{l_2(t)} \frac{f(x', t + x'/c - x/c) + \frac{1}{2} k \Phi_-^0(\xi_0, \xi_0 + 2x')}{\sqrt{l_2(t) - x'}} dx'$$

где $\Phi_-^0(\xi_0, \eta')$ определяется из (2.20). Из (2.18) следует

$$u_- = P_- = \frac{1}{\pi} 2K \sqrt{l_2(t) - x} \frac{1}{\sqrt{1 - l_2^2(t)/c^2}}$$

Условие Ирвина дает

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 1/(c^2 l_2^2(t))}} \rho a \frac{K^2}{\pi} = 2\gamma'$$

где γ' есть поверхностная энергия раскрытия трещины.

В задаче о постоянном напряжении $f = \text{const}$ из (2.6) получим

$$v_+ = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x - l_2(t_2)}} f \int_{x-ct}^{l_2(t_2)} \frac{\sqrt{l_2(t_2) - x'}}{x - x'} dx' -$$

$$-\frac{k}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x - l_2(t_2)}} \int_{x-ct}^{l_2(t)} \Phi_-^0(\xi_0, \eta') \frac{\sqrt{l_2(t) - x'}}{x - x'} dx'$$

При этом Φ_-^0 можно вычислить в виде

$$\Phi_-^0(\xi_0, \eta') = -\frac{1}{\pi} f \left\{ \sqrt{\xi_0 - \xi_\alpha(\eta')} \sqrt{\eta' + \xi_\alpha(\eta')} + (\xi_0 + \eta') \arctg \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi_\alpha(\eta')}}{\sqrt{\eta' + \xi_\alpha(\eta')}} \right\}$$

$$\eta' = ct' + x', \quad \xi_0 = ct' - x' = ct - x$$

$$\xi_\alpha(\eta') = ct'_3 - l_2(t'_3), \quad ct'_3 + l_2(t'_3) = ct' + x'$$

Переход к физическим координатам дает

$$v_+ = \frac{-2f}{\pi \sqrt{x - l_2(t_2)}} \left\{ \sqrt{l_2(t_2) - x + ct} - \sqrt{x - l_2(t_2)} \arctg \frac{\sqrt{l_2(t_2) - x + ct}}{\sqrt{x - l_2(t_2)}} \right\} +$$

$$+ \frac{k}{\pi^2} \frac{f}{\sqrt{x-l_2(t_2)}} \int_{x-ct}^{l_2(t_2)} \left\{ \sqrt{l_2(t'_3) - x} \sqrt{ct - x + 2x' - l_2(t'_3)} + (ct - x + x') \arctg x \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{l_2(t'_3) - x'}}{\sqrt{ct - x + 2x' - l_2(t'_3)}} \right\} \frac{\sqrt{l_2(t_2) - x'}}{x - x'} dx'$$

3. В случае немалых k можно искать решение уравнения (1.5), в котором $(l\rho)(\partial\rho/\partial y_1) = k$, в виде интегральных преобразований Лапласа и Фурье

$$U_L = \int_0^{\infty} e^{-st} u dt', \quad U_L(x, y_1, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{LF} e^{-i\alpha_1 x - i\beta y_1} d\alpha_1 \quad (3.1)$$

где U_{LF} – преобразование Фурье от $U_L(x, 0, s)$.

Подставляя (3.1) в (1.5), получим

$$\beta = -\frac{ik}{2} - i\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2 + \frac{s^2}{c^2}} \quad (3.2)$$

Вводя функцию $\psi = \partial u / \partial y_1$, можно найти связи интегральных трансформант ψ и u , $\psi_{LF} = -i\beta U_{LF}$ или

$$U_{LF} = S_{LF} \psi_{LF}, \quad S_{LF} = \frac{1}{\frac{1}{2}k + \sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2 + s^2/c^2}} \quad (3.3)$$

Для оригиналов $S(x, t)$ и $u(x, t)$ будем иметь

$$S(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 l} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1 x} S_{LF} d\alpha_1 \quad (3.4)$$

При этом на границе $y = 0$ для функции $u(x, 0, t) = u(x, t)$ на трещине и вне ее можно получить ее связь с функцией $\partial u / \partial y_1 |_{y_1=0} = \psi(x, t)$ согласно формуле свертки

$$u(x, t) = \iint \psi(x', t') S(x - x', t - t') dx' dt' \quad (3.5)$$

причем интегрирование должно вестись по всей области $s_0 + s_1 + s_2$ (фигура). Тогда для $x < l_2(t)$ можно записать

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} f_1(\xi', \eta') S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') d\eta' + \frac{1}{2c} \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} \Psi_1(\xi', \eta') \times \\ \times S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') d\eta' + \frac{1}{2c} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} f_1(\xi', \eta') S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') d\eta' \quad (3.6)$$

где $f_1(\xi', \eta') = f(x', t')$ – заданная функция в областях s_0, s_2 позади края трещины, $\Psi_1(\xi', \eta') = \psi(x', t')$ – значение $(\partial u / \partial y_1)_{y_1=0}$ при $x' > l_2(t)$, т.е. вне трещины, которая в порядке k определяется из (2.6); $S_1(\xi', \eta') = S(x', t')$. Таким образом решение для u при $x < l_2(t)$ сводится к нахождению $S(x, t)$ из (3.3), (3.4).

Из граничного условия $u = 0$ при $x > l_2(t)$ и (3.5) следует, как и в (2.8) при $|\xi_0| > |\xi_\alpha|$:

$$\int_{\xi_e}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} f_1(\xi', \eta') S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') d\eta' + \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} \Psi_1(\xi', \eta') S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') d\eta' = 0 \quad (3.7)$$

Однако в отличие от (2.8), где $S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') = -c/(\pi\sqrt{(\xi_0 - \xi')(\eta_0 - \eta')})$, для произвольных $k \neq 0$ множители $(\xi_0 - \xi')^{-1/2}$ и $(\eta_0 - \eta')^{1/2}$ не разделяются. Поэтому исключить интеграл по области s_2 , в которой стоит сложное решение для ψ_1 , даваемое (2.6), не удастся, это отличает задачу с $k \neq 0$ от задачи в однородной среде [2, 5], решение которой следует из (2.13), (2.16).

Для вычисления $S(x, t)$ по (3.3), (3.4) необходимо вместо s ввести $s = pc\sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2}$ и учесть, что интегрирование по s заменится на интеграл Лапласа по p , умноженный на $c\sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2}$.

Тогда, учитывая, что преобразование Лапласа от функции

$$g(p) = \frac{-1}{k/2 + \sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2} p}$$

$$\text{есть } f(t') = -c \exp\left(-\frac{kc t'}{2\sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2}}\right)$$

и учитывая формулу (38) [8, стр. 123]:

$$g(\sqrt{p^2 + 1}) = f(t') - \int_0^{t'} J_1(u) f(\sqrt{t'^2 - u^2}) du$$

$$t' = c\sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2} t \tag{3.8}$$

можно, совершая обратное преобразование Лапласа от S_{LF} , получить

$$S_F = -ce^{\frac{kc}{2}} + c\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2} \int_0^{ct} J_1\left(v\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2}\right) e^{-\frac{k}{2}\sqrt{c^2 t^2 - v^2}} dv, \quad u = v\sqrt{k^2/4 + \alpha_1^2} \tag{3.9}$$

Учитывая, что $J_1(x) = -J'_0(x)$ и интегрируя по частям, получим

$$S_F = -cJ_0\left(ct\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2}\right) + \frac{kc}{2} \int_0^{ct} J_0\left(v\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2}\right) \frac{v}{\sqrt{c^2 t^2 - v^2}} e^{-\frac{k}{2}\sqrt{c^2 t^2 - v^2}} dv \tag{3.10}$$

Заменяя $\sqrt{c^2 t^2 - v^2} = u$, будем иметь

$$S_F = -cJ_0\left(\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2} ct\right) + \frac{kc}{2} \int_0^{ct} J_0\left(\sqrt{c^2 t^2 - u^2} \sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha_1^2}\right) e^{-\frac{k}{2}u} du \tag{3.11}$$

Учитывая четность S_F по α_1 , заменяя экспоненциальное преобразование Фурье на косинус-преобразование, и учитывая формулу [8, стр. 57 (35)], получим для $S(x, t)$ формулу

$$S(x, t) = -c \frac{H(ct - x)}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \cos\left(\frac{k}{2}\sqrt{c^2 t^2 - x^2}\right) - \frac{k}{2} \frac{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \times} \right. \\ \left. \times \frac{\cos(k\sqrt{c^2 t^2 - u^2}/c)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - u^2}} e^{-\frac{k}{2}u} du \right\} \tag{3.12}$$

Тогда функция $S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta')$ в (3.6) имеет значение

$$S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') = -\frac{c}{\pi} \left(\frac{1}{T} \cos \frac{kT}{2} - \frac{k}{2} \int_0^T \frac{\cos \frac{1}{2} k \sqrt{T^2 - u^2}}{\sqrt{T^2 - u^2}} e^{-\frac{k}{2} u} du \right) \quad (3.13)$$

$$T = \sqrt{(\xi_0 - \xi')(\eta_0 - \eta')} \quad (3.14)$$

Для малых k в первом порядке по k из (3.13), (3.14) получим

$$S_1(\xi_0 - \xi', \eta_0 - \eta') = -\frac{c}{\pi} \left(\frac{1}{T} - \frac{k\pi}{4} \right) \quad (3.15)$$

В равенстве (3.7) можно полагать $\psi_1 = v_+^0 + v_+^1$, где v_+^0 соответствует однородной среде с $k = 0$ и дается соотношением (2.3), в котором v_- следует заменить на $f_1(\xi_0, \eta')$ (для него выполнено условие (2.8)). Оставляя в (3.7) слагаемые порядка k , находим

$$-\frac{k\pi}{4} \int_{\xi_e}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} f_1 d\eta' - \frac{k\pi}{4} \int_{\xi_e}^{\xi_0} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\xi_0} v_+^0(\xi', \eta') d\eta' + \int_{\xi_e}^{\xi_0} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} v_+^1(\xi', \eta') \frac{d\eta'}{T} = 0 \quad (3.16)$$

Решение u , согласно (3.6), (3.15), можно записать в первом порядке по k в виде

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} \frac{1}{T} f_1(\xi', \eta') d\eta' + \frac{k}{8} \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} f_1(\xi', \eta') d\eta' - \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_e}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} (v_+^0 + v_+^1) \left(\frac{1}{T} - \frac{k\pi}{4} \right) d\eta' + \frac{1}{2c} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} f_1 S_1 d\eta' \quad (3.17)$$

В нулевом порядке по k в силу (2.8) первое слагаемое в (3.17) и слагаемое с v_+^0 сократятся.

С учетом (3.16) из (3.17) для членов до порядка k получим

$$u = \frac{k}{8} \int_{\xi_\alpha}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} f_1 d\eta' + \frac{k}{8} \int_{\xi_0}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} v_+^0 d\eta' - \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_\alpha(\eta_0)} d\xi' \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} \frac{v_+^1 d\eta'}{T} + \frac{1}{2c} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} f_1 S_1 d\eta' \quad (3.18)$$

Вблизи края трещины $x \approx l_2(t)$, $\xi_0 \approx \xi_\alpha(\eta_0)$ и удерживая члены порядка $\sqrt{\xi_0 - \xi_\alpha(\eta_0)}$ можно первые два слагаемые в правой части (3.18) отбросить. Тогда получится

$$u \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} d\xi' \int_{\xi_2(\xi')}^{\eta_0} v_+^1(\xi', \eta') \frac{d\eta'}{T} + \frac{1}{2c} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} f_1 S_1 d\eta' \quad (3.19)$$

Согласно (2.3), (2.7) в членах порядка k имеет место

$$v_+^1(\xi', \eta') = -\frac{k}{2\pi \sqrt{\eta' - \eta_2(\xi')}} \int_{-\xi'}^{\eta_2(\xi')} \Phi_-^0(\xi', \eta'') \frac{\sqrt{\eta_2(\xi') - \eta''}}{\eta' - \eta''} d\eta''$$

Подставляя это соотношение в равенство (3.19), меняя порядок интегрирования по η', η'' и учитывая, что $\xi' \approx \xi_0$, $\eta_2(\xi') \approx \eta_0$, можно получить вблизи края трещины

$$u = -\frac{k}{4\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \int_{-\xi_0}^{\eta_0} \Phi_-^0(\xi_0, \eta') \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} - \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_\alpha(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \int_{-\xi_0}^{\eta_0} \frac{f_1(\xi_0, \eta') d\eta'}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} \quad (3.20)$$

В последнем слагаемом в (3.20) учтено, что $\xi' \approx \xi_0$ и в основном порядке, согласно (3.14); второе слагаемое (3.19) такое же, как в однородной среде. То же выражение получается из решения в первом порядке по k из (2.11). Итак, полученные двумя подходами значения $u = \Phi_-(\xi_0, \eta_0)$ около края трещины совпадают.

Таким образом, как и в формуле (2.18), решение $u(x, t)$ в первом порядке по k имеет ту же особенность $\sim \sqrt{l_2(t) - x}$, что и для однородного случая, при этом коэффициент при указанном множителе существенно зависит от неоднородности.

Кроме нахождения смещения на трещине $u_-(x, t)$ следует найти функцию $\psi(x, t) = \partial u / \partial y_1 |_{y_1=0} = \psi_+$ вне трещины. Согласно [1, 4] можно записать, вводя обозначения (1.12) для функций u, ψ , решения в виде

$$u_-(x, t) = S_- ** \{(S_+ ** \psi_- - P_- ** u_+)\} H(l_2 - x) \quad (3.21)$$

$$\psi_+(x, t) = -P_+ ** \{(S_+ ** \psi_- - P_- ** u_+)\} H(x - l_2) \quad (3.22)$$

где $l_2 = l_2(t)$; $H(x)$ – единичная функция; звездочки обозначают свертки по x, t ; $S_{\pm}(x, t)$, $P_{\pm}(x, t)$ – оригиналы функций $S_{LF\pm}$, $P_{LF\pm}$, представляющие факторизацию функций S_{LF} , $P_{LF} = 1/S_{LF}$. Проведя ее согласно [7, 9], получим

$$S_{LF} = S_{LF+} S_{LF-} S_{LF\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \pm i \sqrt{k^2/4 + s^2/c^2}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp \sqrt{\frac{k^2}{4} + \frac{s^2}{c^2}}}^{\mp \infty} \ln \frac{(1 + \kappa) d\alpha'_1}{(1 - \kappa)(\alpha'_1 - \alpha_1)} \right\} \quad (3.23)$$

$$\kappa = k / (2 \sqrt{k^2/4 + \alpha_1'^2 + s^2/c^2})$$

После этого следует найти оригиналы $S_{\pm}(x, t)$ по (3.4).

Аналогично определяются оригиналы $P_{\pm}(x, t)$. Полученное решение $\psi_+(x, t)$ по (3.4), (3.22) и (3.23) является весьма громоздким, поэтому, по-видимому, лучше использовать упрощенное для малых k зависимости (2.6), (2.20). Следует отметить, что в порядке k слагаемые с k^2 в (3.23) отбрасываются. Вблизи края трещины $x \approx l_2(t)$, так же как в случае постоянной скорости трещины для однородной среды [9], нужно брать большие значения параметра α_1 . При этом, как показано в п. 2, в порядке k вблизи края трещины напряжение зависит от неоднородности, что проверяется также путем решения методом [9] задачи о неподвижной трещине или трещине, движущейся с постоянной скоростью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 54–73.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 2. М.: Мир, 1983. С. 525–880.
3. Костров Б.В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
4. Поручиков Б.В. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. Красильщикова Е.А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978. 223 с.

6. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1989. Вып. 7. С. 48–55.
7. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
9. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Задачи о трещинах в вязкоупругой среде // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 3. С. 3–10.

Ереван

Поступила в редакцию
4.02.1999